TEORÍA DE CONTROL

Tema 3. Formas de representación del modelo matemático

Introducción

El modelo matemático de un sistema físico es una ecuación diferencial, en el caso simple de ecuaciones diferenciales lineales será una ecuación diferencial ordinaria invariante en el tiempo, cuya expresión general se puede escribir como:

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = b_0 \frac{d^m x}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \cdots + b_{n-1} \frac{dx}{dt} + b_n x \qquad n \geq m$$

Existen diversas formas de representar esa ecuación diferencial, ya sea simplemente con nomenclaturas diferentes, por ejemplo utilizando el operador matemático D:

$$a_0 D^n y + a_1 D^{n-1} y + \cdots + a_{n-1} Dy + a_n y = b_0 D^m x + b_1 D^{m-1} x + \cdots + b_{n-1} Dx + b_n x$$

O utilizando puntos para representar las derivadas:

$$a_0 \overset{n}{y} + a_1 \overset{n-1}{y} + \cdots + a_{n-2} \ddot{y} + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = b_0 \overset{m}{x} + b_1 \overset{m-1}{x} + \cdots + n_{m-2} \ddot{x} + b_{n-1} \dot{x} + b_n x$$

Pero también existen otras formas de representar las ecuaciones diferenciales cuyas características facilitan su estudio bajo ciertas condiciones, vamos a ver a continuación dos de estas formas de representación: la función de transferencia y la representación en espacio de estado. Adicionalmente con el desarrollo de los sistemas de control mediante computadoras se ha desarrollado la representación de los modelos matemáticos de forma discreta

Se utiliza la representación de un modelo matemático mediante funciones de transferencia en la denominada **teoría de control clásica** mientras que se representan los modelos matemáticos mediante ecuaciones en espacio de estado en la denominada **teoría de control moderna**.

La teoría de control moderna surge a partir de los años 60 para permitir el control de sistemas cada vez más complejos, con múltiples entradas y salidas, y con requisitos de funcionamiento cada vez más severos. Su desarrollo y aplicabilidad se han ido acrecentando con el uso de las computadoras personales.

Las diferencias entre la teoría de control moderna y la teoría de control clásica son las siguientes:

Teoría de control clásica	Teoría de control moderna
Sistemas lineales	Sistemas lineales y no lineales
Sistemas invariantes en el tiempo (LTI)	Variables o invariables en el tiempo
Una sola entrada y salida (SISO)	Múltiples entradas y salidas (MIMO)
Procedimientos en el dominio de la frecuencia complejas	Procedimientos en el dominio del tiempo

Adicionalmente con el desarrollo de los sistemas de control mediante computadoras se ha desarrollado la representación de los modelos matemáticos de forma discreta, estos modelos discretos también se pueden representar en forma de ecuaciones, funciones de transferencia discreta o representación estado discreta. Se incluirá en este tema un aparte completo a la representación de sistemas e forma discreta.

Representación de un modelo matemático con la Función de Transferencia

Esta representación se conoce también con el nombre de representación externa, pues no considera variables internas al sistema. Las funciones de transferencia son funciones que permiten caracterizar las relaciones entrada salida de componentes o sistemas que pueden describirse por ecuaciones diferenciales lineales, invariantes en el tiempo.

Esta se define como la relación entre la transformada de Laplace (L) de la salida (función respuesta) y la transformada de Laplace de la entrada (función excitación), bajo la suposición de que todas las condiciones iniciales son cero.

Función de transferencia: $G(s) = \left. \frac{L_{(salida)}}{L_{(entrada)}} \right|_{CI=0}$

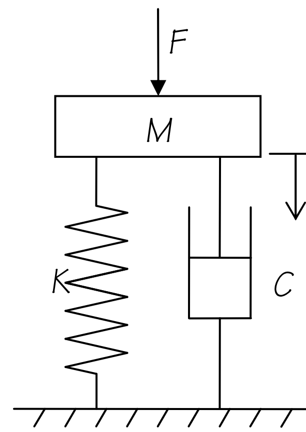
Para la ecuación diferencial anteriormente presentada x es la entrada e y es la salida, en este caso la función de transferencia se obtiene tomando la transformada de Laplace de ambos miembros en forma independiente, con la suposición de que todas las condiciones iniciales son cero y se obtiene:

$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{b_0 s^m+b_1 s^{m-1}+\cdots+b_{m-1}s+b_m}{a_0 s^n+a_1 s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n}$$

Utilizando este concepto de función de transferencia se puede representar la dinámica de un sistema por ecuaciones algebraicas en s. Si la potencia más alta de s en el denominador es n se dice que el sistema es de orden n.

Ejemplo 1: Para el sistema mecánico mostrado en la figura se tiene la ecuación diferencial:

$$MD^2x+CDx+Kx=F$$



La transformada de Laplace de cada miembro de la ecuación es:

$$Ms^2X(s)+CsX(s)+KX(s)=F(s)$$

Donde:

Transformada de la salida: $X(s)=L[x(t)]$

Transformada de la entrada: $F(s)=L[F(t)]$

La función de transferencia de este sistema será:

$$G(s)=\frac{X(s)}{F(s)}=\frac{1}{Ms^2+Cs+K}$$

Esta función de transferencia expresa la salida como una función de la entrada:

$$X(s)=G(s)F(s)=\frac{1}{Ms^2+Cs+K}F(s)$$

Comentarios sobre la función de transferencia

1. La función de transferencia es en efecto un modelo matemático ya que permite expresar la relación entre la variable de entrada y la variable de salida de un sistema.
2. Esta está limitada a sistemas de ecuaciones diferenciales lineales invariantes en el tiempo (LTI) con una sola entrada y una sola salida (SISO).
3. La función de transferencia es una propiedad del sistema en sí, y es independiente de la magnitud y naturaleza de la entrada.
4. La función de transferencia incluye las unidades necesarias para relacionar la entrada con la salida, sin embargo no brinda ninguna información respecto a la estructura física del sistema. Sistemas físicamente distintos pueden tener la misma función de transferencia.
5. El conocimiento de la función de transferencia permite el estudio de la respuesta del sistema a diversas formas de entrada, con lo cual se puede lograr una mejor comprensión de la naturaleza del sistema.
6. La función de transferencia se puede obtener experimentalmente introduciendo entradas conocidas y estudiando la respuesta del sistema. Esto se conoce como **identificación** de sistemas, para lo cual existen una multitud de métodos.
7. Una definición alternativa para la función de transferencia es : La transformada de Laplace de la respuesta al impulso:

   $$G(s)=\mathcal{L}[g(t)]$$

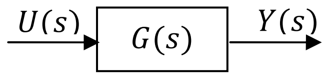
   $G(s)$ y $g(t)$ contienen la misma información.

   $$y(t)=g(t)u(t)\Leftrightarrow Y(s)=G(s)U(s)$$

   Modelo algebraico $G(s)$.
   Modelo temporal $g(t)$.

Función de transferencia y respuesta al impulso

Sea un sistema LTI, SISO sometido a una entrada $u(t)$ y representado por su función de transferencia $G(s)$.



Definición de la respuesta al impulso: Un sistema que tiene como función de transferencia $\mathrm{G(s)}$, tiene como respuesta al impulso la función:

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)]$$

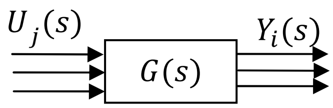
La respuesta de este sistema a una entrada cualquiera $\mathrm{u(t)}$ se puede calcular utilizando el teorema de convolución: La respuesta de un sistema cual función de transferencia $\mathrm{G(s)}$ esta dado por la siguiente integral de convolución:

$$y(t) = \int_0^t g(\tau)u(t-\tau)d\tau \ = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

El producto de convolución se expresa en general como $y(t) = g(t) * u(t) = u(t) * g(t)$

La Matriz de Transferencia

El concepto de Matriz de Transferencia es una extensión a sistemas MIMO de la función de transferencia.



Definición: la matriz $G(s) \in \mathbb{C}^{r\times m}$ se denomina Matriz de Transferencia, y relaciona la entrada $U(s)$ con la salida $Y(s)$.

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

Con:

m : Número de entradas; r : número de salidas

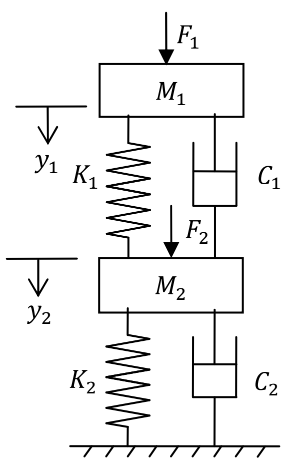
Que también puede expresarse en notación matricial explícita por elemento:

$$Y_i(s) = G_{ij}(s)U_j(s)$$

Se puede por lo tanto determinar la salida i con:

$Y_i(s) = \sum_{j=1}^{m} G_{ij}(s)U_j(s)$

Ejemplo 2: Se tiene el sistema mecánico MIMO con dos entradas (F_1 et F_2) y dos salidas (y_1 et y_2):



Las ecuaciones del sistema son:

$$F_1 - K_1(y_1 - y_2) - C_1D(y_1 - y_2) = M_1D^2y_1$$
$$F_2 + K_1(y_1 - y_2) + C_1D(y_1 - y_2) - K_2y_2 - C_2Dy_2 = M_2D^2y_2$$

La transformada de Laplace de las salidas será:

$$Y_2 = \frac{C_1s + K_1}{den}F_1 + \frac{M_1s^2 + C_1s + K_1}{den}F_2$$
$$Y_1 = \frac{M_2s^2 + (C_1 + C_2)s + K_1 + K_2}{den}F_1 + \frac{C_1s + K_1}{den}F_2$$

Donde:

$$\begin{aligned} den = {} & M_1M_2s^4 + (M_1(C_1 + C_2) + C_1M_2)s^3 \\ & + (M_1(K_1 + K_2) + C_1(C_1 + C_2) + K_1M_2 - C_1^2)s^2 \\ & + (C_1(K_1 + K_2) + K_1(C_1 + C_2) - 2C_1K_1)s + K_1(K_1 + K_2) - K_1^2 \end{aligned}$$

La matriz de transferencia, que determina la relación $[Y_1 \quad Y_2] = [G(s)]\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$ es:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{C_1 s + K_1}{den} & \dfrac{M_1 s^2 + C_1 s + K_1}{den} \\ \dfrac{M_2 s^2 + (C_1 + C_2)s + K_1 + K_2}{den} & \dfrac{C_1 s + K_1}{den} \end{bmatrix}$$

Polos y ceros de un sistema LTI, SISO.

Los polos y los ceros permiten la caracterización dinámica de un sistema. Estos se pueden definir a partir de funciones o matrices de transferencia (mas fácil para los sistemas SISO) o a partir de modelos de estado (mas practico en modelos MIMO).

La ecuación característica y los polos

Para un sistema LTI la ecuación característica D_s se define como el más pequeño denominador común de todos los posibles menores de $G(s)$ no nulos. En el caso de sistema SISO, este corresponde al denominador de la función de transferencia.

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

El orden de un modelo LTI (n) corresponde al exponente más elevado de la ecuación característica, y es también igual al mínimo número de estados del modelo.
Las raíces de la ecuación característica (s_0) se denominan Polos del sistema. Para matrices de transferencia, si s_0 es un polo de un elemento de $G(s)$ entonces será un Polo del sistema. Estos Polos son necesariamente números reales o complejos conjugados.
Si D_s tiene n_k raíces en $s = \lambda_k$, el polo λ_k se dice que tiene multiplicidad n_k

Ejemplo 3:
Para la función de transferencia del sistema mecánico del ejemplo 1:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{1}{MS^2 + Cs + K}$$

La ecuación característica es:

$$D_s = Ms^2 + Cs + K$$

Les polos serán entonces las raíces de la ecuación:

$$s_{1,2} = \frac{-C \pm \sqrt{C^2 - 4MK}}{2M}$$

Ejemplo 4:
Consideramos la matriz de transferencia:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{2}{s+1} & \frac{3}{s+2} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

La ecuación característica que se asocia al más pequeño común denominador es:

$$D_s = (s * 1)^2(s+2) = s^3 + 4s^2 + 5s + 2$$

Los polos del sistema serán las raíces de esta ecuación característica:

$$\mathrm{s}_1 = -1; \mathrm{s}_2 = -1; \mathrm{s}_3 = -2$$

Los ceros

En el caso de los sistemas denominados cuadrados, en donde el número de entradas es igual al número de salidas, los ceros se pueden determinar mediante la matriz o función de transferencia.

Se define el polinomio o ecuación de los ceros $N(s)$ como el más grande común divisor de los numeradores de los menores de orden máximo de $G(s)$ normalizado, para tener la ecuación característica $D(s)$ como denominador. Este polinomio se obtiene con:

$$\frac{N(s)}{D(s)} = |G(s)|$$

Les ceros (z_0) son las raíces de este polinomio de orden m, y se obtienen para: $\mathrm{N}(\mathrm{z}_0) = 0$

Ejemplo 5: para la misma matriz de transferencia del ejemplo 4: $\mathrm{G}(\mathrm{s}) = \begin{bmatrix} \frac{2}{s+1} & \frac{3}{s+2} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$

Existe un menor máximo de orden 2 que es:

$$|G(s)| = \frac{2}{(s+1)}\frac{1}{(s+1)} - \frac{3}{(s+2)}\frac{1}{(s+1)} = \frac{-s+1}{(s+1)^2(s+2)}$$

El polinomio de los ceros es:

$$\mathrm{N}(\mathrm{s}) = -\mathrm{s} + 1$$

Existe un solo cero: $\mathrm{z}_0 = 1$

NOTA:

Todas las definiciones son aplicables al caso más simple de un sistema SISO para las cuales $G(s)$ es una fracción racional donde:

- El numerador es $\pi_z(s)$ y sus raíces son los ceros
- El denominador es $\pi_s(s)$ y sus raíces son los polos.

Definiciones:

- La diferencia de grados entre $D(s)$ y $N(s)$ (n y m) se denomina el grado relativo.
- Si $n - m > 0$ el modelo es estrictamente propio (grado relativo positivo)
- Si $n - m = 0$ el modelo es bipropio (grado relativo cero).
- Si $n - m \geq 0$ el modelo es propio.
- Si $n - m < 0$ el modelo es impropio (grado relativo negativo).
- Los sistemas reales son estrictamente propio.
- Los controladores pueden ser propios o impropios. Los impropios se modifican para poder construirlos.

Representación de un modelo matemático en Espacio de Estado

La representación en espacio de estado, también conocida como representación interna, fue utilizada en otras disciplinas como la mecánica o termodinámica desde hace largo tiempo. Por ejemplo, para el comportamiento macroscópico de un gas puede describirse y predecirse con un número finito de variables físicas: el volumen V de ese gas, su presión P y su temperatura T. El conjunto P, V, T representa el estado termodinámico del gas. Su evolución en el tiempo dependerá del entorno exterior (aporte de calor por ejemplo) pudiéndose caracterizar su comportamiento dinámico con el conocimiento de ese entorno, que en control denominamos entrada del sistema.

En conclusión el estado dinámico de un sistema puede ser representado por un conjunto de variables denominadas variables de estado. Este conjunto de variables caracteriza completamente la configuración dinámica actual del sistema. Para esto se requiere de un número mínimo de variables de estado necesarias y suficientes que permiten la descripción dinámica del sistema.

Los sistemas automáticos modernos, a partir de los cuales se desarrollo la representación de estado para el control de procesos, aparecen en los años 60 para permitir el control de sistemas complejos tales como las aplicaciones espaciales Apolo y Polaris, las cuales tienen múltiples entradas y salidas (MIMO), y criterios de funcionamiento cada vez más severos. El uso del espacio de estado para representación de sistemas de control proviene de la capacidad que tiene esta representación de representar sistemas multivariables complejos. Su desarrollo y aplicación crece luego con el uso de los computadores.

El conjunto de variables de estado no es único, pero debe estar conformado para cada sistema por un número idéntico de variables de estado independientes. Esto significa que la selección de estas variables, así como de sus condiciones iniciales, constituye un conjunto que se puede fijar de forma arbitraria.
El estado inicial del sistema constituye su memoria: dado un estado inicial a un instante dado el conocimiento del pasado no permite el conocimiento del futuro del sistema, se requiero por lo tanto de unas funciones (ecuaciones de estado) que permiten la predicción del futuro, las funciones comúnmente utilizadas son las resultantes de una integración.

Para comprender correctamente el funcionamiento de esta representación se estudiaran las definiciones básicas de estado, variable de estado, vector de estado y espacio de estado. Luego se presentará la forma de las ecuaciones en espacio de estado, su relación con las funciones de transferencia y la forma de representar sistemas lineales en espacio de estado.

Definiciones

Estado

El estado de un sistema dinámico es el conjunto más pequeño de variables $x(t)$ (denominadas variables de estado) tales que el conocimiento de esas variables en $t = t_0$, conjuntamente con el conocimiento de la entrada $u(t)$ para todo tiempo $t \geq t_0$, y las ecuaciones que describen la dinámica $f(x,t,u)$ y $g(x,t,u)$, determinan completamente el comportamiento futuro de los estados $x(t)$ y salidas $y(t)$ del sistema para cualquier tiempo $t \geq t_0$.

Variables de estado

Las variables de estado de un sistema dinámico $x(t)$ son las variables que constituyen el conjunto más pequeño de variables que determinan el estado de un sistema dinámico.
Nótese que las variables de estado no deben ser necesariamente cantidades físicas mensurables u observables. Sin embargo es conveniente escoger como variables de estado de un sistema magnitudes.

Vector de estado

Si se requieren n variables de estado para describir completamente el comportamiento de un sistema dado, se puede considerar a esas n variables como los n componentes de un vector $\boldsymbol{x}$. Vector que recibe el nombre de vector de estado.

Ecuaciones en el espacio de estado

Las ecuaciones en espacio de estado manejan tres tipos de variables:

- Las variables de entrada, o vector de entrada $u(t) = [u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)]^T$
- Las variables de salida, o vector de salida $y(t) = [y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)]^T$
- Las variables de estado, o vector de estado $x(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T$

Donde n, m y r, representan el número de variables de estado, salida y entrada respectivamente.
La expresión general de estas ecuaciones es la siguiente:

- Para un sistema no lineal:

$$\dot{x}(t) = f(x,u,t)$$ Ecuación de estado

$y(t) = g(x,u,t)$ Ecuación de salida

- Para un sistema lineal

$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$ Ecuación de estado

$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t)$ Ecuación de salida

Donde:

$A(t)$ se denomina matriz de estado

$B(t)$ se denomina matriz de entrada

$C(t)$ se denomina matriz de salida

$D(t)$ se denomina matriz de transición directa

Si las funciones o vector de funciones f y g, o las matrices A, B, C y D comprenden explícitamente el tiempo el sistema se denomina variable en el tiempo, en el caso contrario el sistema se denomina invariante en el tiempo. En el caso de un sistema lineal invariante en el tiempo (LTI) las ecuaciones de estado se escriben entonces como:

$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ Ecuación de estado

$y(t) = Cx(t) + Du(t)$ Ecuación de salida

Representación de sistemas dinámicos en el espacio de estado

Cualquier ecuación diferencial de orden n se puede expresar como una ecuación de estado de primer orden en notación vectorial-matricial. Se presenta a continuación las técnicas para la obtención de estas ecuaciones de estado para dos ecuaciones diferenciales comunes.

Representación en espacio de estado a partir de ecuaciones diferenciales ordinarias (típicamente sistemas SISO)

Caso de una ecuación ordinaria de orden n en donde la función exitadora no incluye términos derivativos

Sea el siguiente sistema de orden n:

$$\overset{n}{y} + a_1 \overset{n-1}{y} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = u$$

Suponiendo que las condiciones iniciales $y(0),\ \dot{y}(0), \cdots \overset{n-1}{y}(0)$ y la entrada $u(t)$ para un tiempo $t \geq 0$ son conocidas, entonces las variables de estado deben ser tales que definan completamente el comportamiento futuro del sistema. Bajo esta premisa se puede entonces escoger como variables de estado:

$$x_1 = y; \quad x_2 = \dot{y}; \quad \cdots x_n = \overset{n-1}{y}$$

Entonces la ecuación diferencial se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= -a_n x_1 - \cdots a_1 x_n + u \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

O en forma matricial:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

Donde:

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix};\ A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\-a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1\end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix};\ C=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}$$

Esta forma de representación se denomina comúnmente **forma canónica controlador**.

Nota: La representación de estado de un sistema no es única, pues depende de la forma como se seleccionan las variables de estado, sin embargo todas las representaciones de un mismo sistema tendrán el mismo número de variables de estado.

Ejemplo 6: para el sistema mecánico mostrado en el ejemplo 1 se tiene la ecuación diferencial:

$$M\ddot{y}+C\dot{y}+Ky=F$$

Donde $u=F$

Se puede entonces definir las variables de estado como: $x_1=y;\quad x_2=\dot{y}$

Sustituyendo esto en la ecuación obtenemos:

$$M\dot{x}_2+Cx_2+Kx_1=u\quad\Rightarrow\quad\dot{x}_2=\frac{u-(Cx_2+Kx_1)}{M}$$

Se obtiene entonces el sistema de ecuaciones de estado:

$$\dot{x}_1=x_2$$

$$\dot{x}_2=-\frac{K}{M}x_1-\frac{C}{M}x_2+\frac{1}{M}u$$

$$y=x_1$$

El cual puede expresarse matricialmente como:

$$\dot{x}=Ax+Bu$$

$$y=Cx$$

Donde:

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\-\frac{K}{M} & -\frac{C}{M}\end{bmatrix};\quad B=\begin{bmatrix}0\\\frac{1}{M}\end{bmatrix};\quad C=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}$$

Caso de ecuaciones diferenciales de orden n en donde la función excitadora incluye términos derivativos

Sea el siguiente sistema de orden *n*:

$$\overset{n}{y}+a_1\overset{n-1}{y}+\cdots+a_{n-1}\dot{y}+a_ny=b_0\overset{n}{u}+b_1\overset{n-1}{u}+\cdots+b_{n-1}\dot{u}+b_nu$$

Suponiendo que las condiciones iniciales $y(0),\ \dot{y}(0),\cdots\overset{n-1}{y}(0)$ y la entrada $u(t)$ para un tiempo $t\geq 0$ son conocidas, entonces las variables de estado deben ser tales que definan completamente el comportamiento futuro del sistema. En este caso en particular las variables de estado deberán además ser tales que eliminen las derivadas de *u* en la ecuación de estado. Bajo esta premisa se pueden escoger como variables de estado:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= y - \beta_0 u \\
x_2 &= \dot{y} - \beta_0 \dot{u} - \beta_1 u = \dot{x}_1 - \beta_1 u \\
x_3 &= \ddot{y} - \beta_0 \ddot{u} - \beta_1 \dot{u} - \beta_2 u = \dot{x}_2 - \beta_2 u \\
&\vdots \\
x_n &= \overset{n-1}{y} - \beta_0 \overset{n-1}{u} - \beta_1 \overset{n-2}{u} - \cdots - \beta_{n-2}\dot{u} - \beta_{n-1} u = \dot{x}_{n-1} - \beta_{n-1} u
\end{aligned}
$$

Donde $\beta_0, \beta_1, \cdots \beta_n$ son coeficientes que se determinan como:

$$
\begin{aligned}
\beta_0 &= b_0 \\
\beta_1 &= b_1 - a_1\beta_0 \\
\beta_2 &= b_2 - a_1\beta_1 - a_2\beta_0 \\
\beta_3 &= b_3 - a_1\beta_2 - a_2\beta_1 - a_3\mathrm{B}_0 \\
&\vdots \\
\beta_n &= b_n - a_1\beta_{n-1} - \cdots - a_{n-1}\beta_1 - a_n\beta_0
\end{aligned}
$$

Con esta escogencia de variables de estado se obtiene el sistema de ecuaciones de estado:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 + \beta_1 u \\
\dot{x}_2 &= x_3 + \beta_2 u \\
&\vdots \\
\dot{x}_{n-1} &= x_n + \beta_{n-1} u \\
\dot{x}_n &= -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \cdots - a_1 x_n + \beta_n u \\
y &= x_1 + \beta_0 u
\end{aligned}
$$

O en forma matricial:

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= Ax + Bu \\
y &= Cx
\end{aligned}
$$

Donde:

$$
x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix};\ A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix};\ B = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{bmatrix};\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix};\ D = \beta_0 = b_0
$$

Ejemplo 7: para la ecuación diferencial siguiente:

$$
\dddot{y} + 18\ddot{y} + 192\dot{y} + 640y = 160\dot{u} + 640u
$$

Queremos obtener una representación en espacio de estado.
Se definen entonces las siguientes variables de estado:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= y - \beta_0 u \\
x_2 &= \dot{y} - \beta_0 \dot{u} - \beta_1 u = \dot{x}_1 - \beta_1 u \\
x_3 &= \ddot{y} - \beta_0 \ddot{u} - \beta_1 \dot{u} - \beta_2 u = \dot{x}_2 - \beta_2 u
\end{aligned}
$$

Donde:

$$\beta_0 = b_0 = 0$$
$$\beta_1 = b_1 - a_1\beta_0 = 0$$
$$\beta_2 = b_2 - a_1\beta_1 - a_2\beta_0 = 160$$
$$\beta_3 = b_3 - a_1\beta_2 - a_2\beta_1 - a_3\beta_0 = 640 - 18(160) = -2240$$

La ecuación de estado del sistema será entonces:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -640 & -192 & -18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 160 \\ -2240 \end{bmatrix} u$$

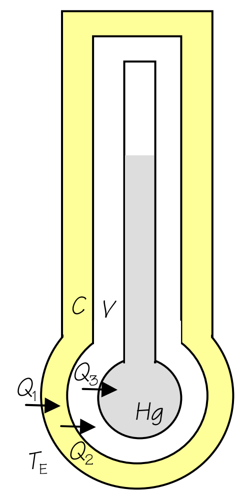
La ecuación de salida será:

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Representación de estado a partir de un sistema de ecuaciones diferenciales

En el caso de disponer de un sistema de ecuaciones diferenciales en lugar de una sola ecuación ordinaria es posible obtener una representación de estado directamente de este sistema de ecuaciones, los dos ejemplos siguientes ilustran esta opción.

Ejemplo 8: Se tiene el sistema térmico del termómetro mostrado en la figura, representado por las ecuaciones:



(1) $Q_1 - Q_2 = C_C D T_C$ (2) $Q_2 - Q_3 = C_V D T_V$ (3) $Q_3 = C_{Hg} D T_{Hg}$

(4) $Q_1 = \dfrac{T_E - T_C}{R_1}$ (5) $Q_2 = \dfrac{T_C - T_V}{R_2}$ (6) $Q_3 = \dfrac{T_V - T_{Hg}}{R_3}$

Para el cual queremos obtener una representación en espacio de estado.
El sistema puede simplificarse inicialmente para ponerlo en función solo de las temperaturas:

(7) $$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + C_C D\right) T_C = \frac{T_V}{R_2} + \frac{T_E}{R_1}$$

(8) $$\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + C_V D\right) T_V = \frac{T_C}{R_2} + \frac{T_{Hg}}{R_3}$$

(9) $$T_V = R_3\left(\frac{1}{R_3} + C_{Hg} D\right) T_{Hg}$$

En este caso queda claramente identificado que la entrada es $u = T_E$ y la salida es $y = T_H$.
Los estados se pueden definir de la siguiente manera:

$$x_1 = T_C; \quad x_2 = T_V; \quad x_3 = T_{Hg}$$

En base a esta definición de los estados se puede re-escribir el sistema como:

$$\frac{1}{R_1}x_1 + \frac{1}{R_2}x_1 + C_C\dot{x}_1 = \frac{x_2}{R_2} + \frac{u}{R_1}$$
$$\frac{1}{R_2}x_2 + \frac{1}{R_3}x_2 + C_V\dot{x}_2 = \frac{x_1}{R_2} + \frac{x_3}{R_3}$$
$$x_3 + R_3C_{Hg}\dot{x}_3 = x_2$$

A partir de estas ecuaciones se puede escribir el sistema en forma de espacio de estado:

$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{R_1C_C}x_1 - \frac{1}{R_2C_C}x_1 + \frac{1}{R_2C_C}x_2 + \frac{1}{R_1C_C}u$$
$$\dot{x}_2 = \frac{1}{R_2C_V}x_1 - \frac{1}{R_2C_V}x_2 - \frac{1}{R_3C_V}x_2 + \frac{1}{R_3C_V}x_3$$
$$\dot{x}_3 = \frac{1}{R_3C_{Hg}}x_2 - \frac{1}{R_3C_{Hg}}x_3$$
$$y = x_3$$

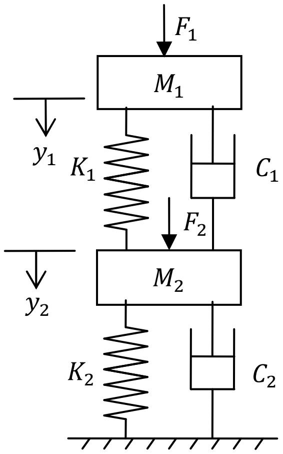
El cual puede escribirse en forma matricial como:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

Donde:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1C_C} - \frac{1}{R_2C_C} & \frac{1}{R_2C_C} & 0 \\ \frac{1}{R_2C_V} & -\frac{1}{R_2C_V} - \frac{1}{R_3C_V} & \frac{1}{R_3C_V} \\ 0 & \frac{1}{R_3C_{Hg}} & -\frac{1}{R_3C_{Hg}} \end{bmatrix};\ B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};\ C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 9: Consideremos el sistema mecánico MIMO con dos entradas (F_1 y F_2) y dos salidas (y_1 y y_2), mostrado en la figura:



Las ecuaciones del sistema son:

$$F_1 - K_1(y_1 - y_2) - C_1D(y_1 - y_2) = M_1D^2y_1$$
$$F_2 + K_1(y_1 - y_2) + C_1D(y_1 - y_2) - K_2y_2 - C_2Dy_2 = M_2D^2y_2$$

En este caso tenemos:

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix};\ y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Y podemos seleccionar como estados:

$$x = [y_1 \quad Dy_1 \quad y_2 \quad Dy_2]^T$$

Si sustituimos los estados, entradas y salidas en las ecuaciones originales tendremos:

$$u_1 - K_1x_1 + K_1x_3 - C_1x_2 + C_1x_4 = M_1\dot{x}_2$$
$$u_2 + K_1x_1 - K_1x_3 + C_1x_2 - C_1x_4 - K_2x_3 - C_2x_4 = M_2\dot{x}_4$$

Y obtenemos la representación de estado siguiente:

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -\frac{K_1}{M_1}x_1 - \frac{C_1}{M_1}x_2 + \frac{K_1}{M_1}x_3 + \frac{C_1}{M_1}x_4 + \frac{u_1}{M_1}$$
$$\dot{x}_3 = x_4$$
$$\dot{x}_4 = \frac{K_1}{M_2}x_1 + \frac{C_1}{M_2}x_2 - \frac{(K_1+K_2)}{M_2}x_3 - \frac{(C_1+C_2)}{M_2}x_4 + \frac{u_2}{M_2}$$
$$y_1 = x_1$$
$$y_2 = x_3$$

Expresado en forma de Matriz:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

Con:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{K_1}{M_1} & -\frac{C_1}{M_1} & \frac{K_1}{M_1} & \frac{C_1}{M_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{K_1}{M_2} & \frac{C_1}{M_2} & -\frac{K_1+K_2}{M_2} & -\frac{C_1+C_2}{M_2} \end{bmatrix};\ B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{M_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{M_2} \end{bmatrix};\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Relación entre función de transferencia y espacio de estado

Se puede obtener la función de transferencia de un sistema expresado en espacio de estado mediante una expresión simple.

Para el sistema expresado en espacio de estado en forma matricial:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

Las transformadas de Laplace están dadas por:

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s)$$
$$Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

Como la función de transferencia se define como la relación entre la trasformada de Laplace de la salida y la transformada de Laplace de la entrada cuando las condiciones iniciales son cero:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

Se supone entonces que la condición inicial $x(0)$ es igual a cero, se obtiene entonces que la expresión de las transformadas será:

$$sX(s) - AX(s) = BU(s) \text{ ó } (sI - A)X(s) = BU(s)$$

Pre multiplicando ambos miembros de la ecuación por $(sI - A)^{-1}$ se obtiene:

$$X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s)$$

Y al sustituirse esta expresión en la ecuación de salida obtenemos:

$$Y(s) = \left(C(sI - A)^{-1}B + D\right)U(s)$$

Por lo tanto:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Ejemplo 10: para el sistema mecánico teníamos que el modelo matemático expresado en espacio de estado es:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

Donde:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{K}{M} & -\dfrac{C}{M} \end{bmatrix};\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{M} \end{bmatrix};\ C=\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Si queremos obtener la función de transferencia a partir de esta expresión del modelo debemos entonces usar la expresión:

$$G(s)=C(sI-A)^{-1}B+D=\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\left(s\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{K}{M} & -\dfrac{C}{M} \end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{M} \end{bmatrix}+0$$

Al resolver esta ecuación obtenemos:

$$G(s)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s & -1 \\ \dfrac{K}{M} & s+\dfrac{C}{M} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{M} \end{bmatrix}$$

Recordatorio :

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}adj(A)^T$$

Donde:

$d_{ij}=(-1^{i+j})\left|\tilde{A}_{ij}\right|$ elementos de la matriz adj(A)

$\tilde{A}_{ij}$ menores principales

$$G(s)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\frac{1}{s^2+\dfrac{C}{M}s+\dfrac{K}{M}}\begin{bmatrix} s+\dfrac{C}{M} & 1 \\ -\dfrac{K}{M} & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{M} \end{bmatrix};\quad G(s)=\frac{1}{s^2+\dfrac{C}{M}s+\dfrac{K}{M}}\begin{bmatrix} s+\dfrac{C}{M} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{M} \end{bmatrix}$$

$$G(s)=\frac{1}{s^2+\dfrac{C}{M}s+\dfrac{K}{M}}\frac{1}{M};\quad G(s)=\frac{1}{Ms^2+Cs+K}$$

Que es exactamente la función de transferencia encontrada a partir de la ecuación diferencial.

Ejemplo 11: A partir del modelo matemático en representación de estado obtenido en el ejemplo 8, queremos obtener la función de transferencia de éste sistema se puede entonces obtener con la expresión:

$$G(s)=C(sI-A)^{-1}B+D$$

$$G(s)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s+\dfrac{1}{R_1C_C}+\dfrac{1}{R_2C_C} & -\dfrac{1}{R_2C_C} & 0 \\ -\dfrac{1}{R_2C_V} & s+\dfrac{1}{R_2C_V}+\dfrac{1}{R_3C_V} & -\dfrac{1}{R_3C_V} \\ 0 & -\dfrac{1}{R_3C_{Hg}} & s+\dfrac{1}{R_3C_{Hg}} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Con:

$$[sI-A]^{-1}=\frac{\begin{bmatrix} \left(\begin{array}{l}\left(s+\frac{1}{R_2C_V}+\frac{1}{R_3C_V}\right)\left(s+\frac{1}{R_3C_{Hg}}\right)\\ -\left(-\frac{1}{R_3C_V}\right)\left(-\frac{1}{R_3C_{Hg}}\right)\end{array}\right) & -\left(\left(-\frac{1}{R_2C_V}\right)\left(s+\frac{1}{R_3C_{Hg}}\right)\right) & \left(\left(-\frac{1}{R_2C_V}\right)\left(-\frac{1}{R_3C_{Hg}}\right)\right) \\ -\left(\left(-\frac{1}{R_2C_C}\right)\left(s+\frac{1}{R_3C_{Hg}}\right)\right) & \left(\left(s+\frac{1}{R_1C_C}+\frac{1}{R_2C_C}\right)\left(s+\frac{1}{R_3C_{Hg}}\right)\right) & -\left(\left(s+\frac{1}{R_1C_C}+\frac{1}{R_2C_C}\right)\left(-\frac{1}{R_3C_{Hg}}\right)\right) \\ \left(\left(-\frac{1}{R_2C_C}\right)\left(-\frac{1}{R_3C_V}\right)\right) & -\left(\left(s+\frac{1}{R_1C_C}+\frac{1}{R_2C_C}\right)\left(-\frac{1}{R_3C_V}\right)\right) & \left(\begin{array}{l}\left(s+\frac{1}{R_1C_C}+\frac{1}{R_2C_C}\right)\left(s+\frac{1}{R_2C_V}+\frac{1}{R_3C_V}\right)\\ -\left(-\frac{1}{R_2C_C}\right)\left(-\frac{1}{R_2C_V}\right)\end{array}\right) \end{bmatrix}}{\begin{array}{c}\left(s+\frac{1}{R_1C_C}+\frac{1}{R_2C_C}\right)\left(s+\frac{1}{R_2C_V}+\frac{1}{R_3C_V}\right)\left(s+\frac{1}{R_3C_{Hg}}\right)\\ -\left(-\frac{1}{R_2C_C}\right)\left(-\frac{1}{R_2C_V}\right)\left(s+\frac{1}{R_3C_{Hg}}\right)-\left(-\frac{1}{R_3C_V}\right)\left(-\frac{1}{R_3C_{Hg}}\right)\left(s+\frac{1}{R_1C_C}+\frac{1}{R_2C_C}\right)\end{array}}$$

En este caso se observa que el cálculo algebraico se vuelve relativamente largo, por lo cual es más fácil obtener la función de transferencia directamente de la ecuación diferencial del sistema:

$$T_E=a_1D^3T_{Hg}+a_2D^2T_{Hg}+a_3DT_{Hg}+a_4T_{Hg}$$

Con:

$$a_1=R_1R_3C_{Hg}C_VC_C$$

$$a_2=R_1\left(\frac{R_3C_{Hg}C_V}{R_1}+\frac{R_3C_{Hg}C_V}{R_2}+\frac{R_3C_{Hg}C_C}{R_2}+C_{Hg}C_C+C_VC_C\right)$$

$$a_3=R_1\left(\frac{R_3C_{Hg}}{R_1R_2}+\frac{C_{Hg}}{R_1}+\frac{C_V}{R_1}+\frac{R_3C_{Hg}}{R_2^{\ 2}}+\frac{C_{Hg}}{R_2}+\frac{C_V}{R_2}+\frac{C_C}{R_2}+\frac{C_C}{R_3}-R_3C_{Hg}-\frac{C_C}{R_3}\right)$$

$$a_4=R_1\left(\frac{1}{R_1R_2}+\frac{1}{R_2^{\ 2}}-1\right)$$

En cuyo caso la función de transferencia puede escribirse como:

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{1}{a_1s^3+a_2s^2+a_3s+a_4}$$

No unicidad del conjunto de variables de estado

La no unicidad del conjunto de variables de estado significa que para un sistema cualquiera existen diversas representaciones de estado posibles. De forma recíproca matrices A diferentes pueden representar un mismo sistema y por ende una misma ecuación característica.
Para probar que esto es posible utilicemos el ejemplo siguiente:

Ejemplo 12: Supongamos que inicialmente se tiene el sistema en forma de ecuación diferencial:

$$\dddot{y}+6\ddot{y}+11\dot{y}+6y=6u$$

Para obtener una representación en forma de espacio de estado se pueden tomar los siguientes estados:

$$x_1 = y; \quad x_2 = \dot{y}; \quad x_3 = \ddot{y}$$

Con estos estados se obtiene la representación de estado siguiente:

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = x_3$$
$$\dot{x}_3 = -6x_1 - 11x_2 - 6x_3 + 6u$$

Que puede expresarse en forma matricial como:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

Donde:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}; \; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}; \; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La función de transferencia de este sistema es:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{6}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} = \frac{6}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

Consideremos ahora el sistema lineal representado por las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}; \; B = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}; \; C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Se puede obtener la función de transferencia del sistema con la relación:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \left(s \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} s+1 & 0 & 0 \\ 0 & s+2 & 0 \\ 0 & 0 & s+3 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(s+2)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(s+3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)} & \frac{1}{(s+2)} & \frac{1}{(s+3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{3}{(s+1)} - \frac{6}{(s+2)} + \frac{3}{(s+3)}$$

$$G(s) = \frac{6}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

Se observa que esta segunda representación de estado corresponde exactamente al mismo sistema pues posee la misma función de transferencia.

Forma canónica de Jordan

La forme canónica de Jordan o forma Modal, es la correspondiente a la segunda representación del ejemplo anterior, en la cual la matriz A solo posee elementos en la diagonal, es una matriz llamada diagonal. Estos elementos de la diagonal corresponden directamente a los valores propios de la matriz, los cuales son los polos del sistema o raíces de su ecuación característica.

$$A_J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

La no unicidad de la representación de estado permite modificar la representación para obtener modelos más simples de manipulación, tal como el caso de la forma de Jordan con matrices diagonales.

En el ejemplo 12 vimos que la matriz A bajo la forma canónica de Jordan es:

$$A_J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Si determinamos la ecuación característica correspondiente a esta nueva matriz obtenemos:

$$|sI - A_J| = \begin{bmatrix} \lambda+1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+3 \end{bmatrix} = (\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3) = 0$$

La ventaja de la representación canónica de Jordan es que muestra directamente la estabilidad del sistema y además las operaciones matemáticas con las matrices diagonales son más sencillas.

La representación canónica de Jordan es solo otra representación en espacio de estado posible para un sistema lineal.

Cambio de variable lineal

De hecho se puede demostrar que para toda representación de estado de un sistema se puede determinar un nuevo conjunto de variables de estado, mediante un cambio de variable lineal de la forma:

$$z = Px$$

Donde P es una matriz cualquiera con las mismas dimensiones que A.
En este caso el nuevo sistema queda determinado por:

$$P\dot{z} = APz + Bu$$

$$y = CPz$$

Es decir:

$$\dot{z} = P^{-1}APz + P^{-1}Bu$$

$$y = CPz$$

Donde P^{-1} es la inversa de P.
Ejemplo 13: Supóngase que se quiere definir un nuevo conjunto de variables de estado para nuestro ejemplo usando la matriz

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

La inversa de esta matriz es:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

En este caso nuestra nueva representación de estado estará definida por:

$$\dot{z} = A_z z + B_z u$$
$$y = C_z z$$

Donde las matrices vienen definidas por:

$$A_z = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -17 & -8 & -12 \\ -2 & -2 & 0 \\ 20 & 10 & 13 \end{bmatrix}; \quad B_z = P^{-1}B = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}; \quad C_z = CP = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Podemos observar que esta nueva representación de estado corresponde al mismo sistema lineal, de hecho la ecuación característica de esta es:

$$|sI - A| = \begin{bmatrix} \lambda+17 & 8 & 12 \\ 2 & \lambda+2 & 0 \\ -20 & -10 & \lambda+13 \end{bmatrix}$$
$$= ((\lambda+17)(\lambda+2)(\lambda+13) - 240) - (-240(\lambda+2) + 16(\lambda+13))$$
$$= \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6 = (\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3) = 0$$

Diagonalización de matrices

De hecho la representación de Jordan es un caso particular de cambio de variable, donde la matriz P que permite la diagonalización de la matriz A. La forma de la matriz P necesaria para la obtención de la representación canónica de Jordan se puede generalizar par una matriz A cuya forma es de tipo canónica controlador:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}$$

Como:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^{\,2} & \lambda_2^{\,2} & \lambda_3^{\,2} & \cdots & \lambda_n^{\,2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{\,n-1} & \lambda_2^{\,n-1} & \lambda_3^{\,n-1} & \cdots & \lambda_n^{\,n-1} \end{bmatrix}$$

Para nuestro ejemplo la matriz P que permite la obtención de la forma canónica de Jordan es:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

Cuya inversa es:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2.5 & 0.5 \\ -3 & -4 & -1 \\ 1 & 1.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

De hecho:

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & 2.5 & 0.5 \\ -3 & -4 & -1 \\ 1 & 1.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = A_J$$

En esta representación bajo la forma canónica de Jordan las matrices B y C serán:

$$B_J = P^{-1}B = \begin{bmatrix} 3 & 2.5 & 0.5 \\ -3 & -4 & -1 \\ 1 & 1.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$C_J = CP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Nota: Para que una representación de estado sea equivalente a otra obtenida por cambio de variable es necesario la transformación de todas las matrices que representan el sistema.

Ejercicios

1. Para los ejercicios del tema 2 obtener una representación en espacio de estado de las ecuaciones del modelo, utilizando la ecuación diferencial obtenida y otra utilizando el sistema de ecuaciones que representa el sistema.
2. Obtener la función o matriz de transferencia de los sistemas utilizados para el ejercicio 1.
3. Para los siguientes sistemas en representación de estado obtener la función de transferencia, la ecuación diferencial del sistema y la forma canónica de Jordan.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -12 & -8 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -23 & -7 & -7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$