

# TEORÍA DE CONTROL

## Tema 7. Análisis de la respuesta en frecuencia

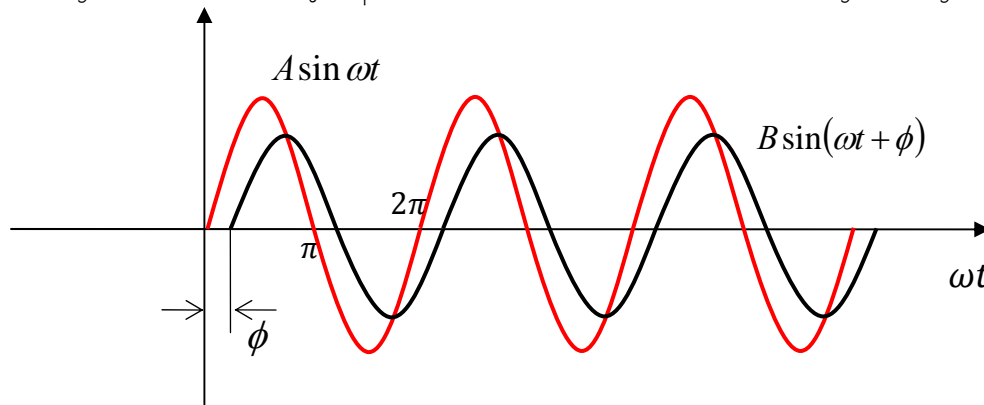
### Introducción

Se denomina respuesta en frecuencia a la respuesta en estado estable de un sistema sujeto a una señal sinusoidal de amplitud ( $A$ ) fija pero a una frecuencia ( $\omega$ ) variable en cierto rango.



La respuesta en estado estable a una entrada de este tipo será de la forma:  $B \sin(\omega t + \phi)$

La representación gráfica de la entrada y respuesta en estado estable está dada en la siguiente figura.



En la práctica raras veces los sistemas de control están sometidos a señales sinusoidales, pero la información que se obtiene por el análisis sinusoidal se puede usar para establecer la naturaleza de la respuesta a una gran variedad de señales. Además el análisis es conveniente para el manejo analítico y experimental.

### Cálculo de la respuesta en frecuencia

Se puede demostrar que cuando un sistema se somete a una entrada sinusoidal ( $A \sin \omega t$ ) la respuesta en estado estable se puede calcular sustituyendo a  $s$  por  $j\omega$  en la función de transferencia:  $G(s) \rightarrow G(j\omega)$ .

Luego la respuesta en estado estable, de la forma ( $B \sin(\omega t + \phi)$ ), se puede obtener a partir de un valor complejo que se puede expresar como:

$$M(\omega) = |G(j\omega)| = \sqrt{\text{Im}^2 + \text{Re}^2}$$

$$\phi(\omega) = \angle G(j\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{\text{Im}}{\text{Re}}\right)$$

Donde:

**Im**: parte imaginaria de  $G(j\omega)$

**Re**: parte real de  $G(j\omega)$

$$M(\omega) = \frac{B}{A} \text{ se le conoce como relación de amplitud}$$

$\phi(\omega)$  se le conoce como ángulo de fase.

La respuesta en estado estable del sistema será de la forma:  $M(\omega)A \sin(\omega t + \phi(\omega))$

**Ejemplo 1.** Si se tiene un sistema de primer orden cuya función de transferencia es:

$$G(s) = \frac{1}{\tau s + 1}$$

La respuesta en estado estable para una entrada sinusoidal de la forma  $H \sin(\omega t)$  se puede hallar sustituyendo a  $s$  por  $j\omega$  como sigue:

$$G(s) = \frac{1}{j\omega + 1}$$

Si se multiplica y divide por el conjugado para no tener términos imaginarios en el denominador:

$$G(s) = \frac{1}{j\omega + 1} \times \frac{j\omega - 1}{j\omega - 1} = \frac{1 - j\omega\tau}{\tau^2\omega^2 + 1}$$

En este caso la relación de amplitud y el ángulo de fase serán:

$$M(\omega) = |G(j\omega)| = \sqrt{\left(\frac{-\omega\tau}{\omega^2\tau^2 + 1}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega^2\tau^2 + 1}\right)^2} = \sqrt{\frac{\omega^2\tau^2}{(\omega^2\tau^2 + 1)^2} + \frac{1}{(\omega^2\tau^2 + 1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}}$$

$$\phi(\omega) = \angle G(j\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{\text{Im}}{\text{Re}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\left(\frac{-\omega\tau}{\omega^2\tau^2 + 1}\right)}{\left(\frac{1}{\omega^2\tau^2 + 1}\right)}\right) = -\tan^{-1}(\omega\tau)$$

La respuesta en estado estable (respuesta en frecuencia) será:

$$y(t)_{EE} = \frac{H}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} \sin(\omega t - \tan^{-1}(\omega\tau))$$

### Procedimiento para la obtención de la respuesta en frecuencia

1. Se obtiene la función de transferencia para el elemento o sistema. Todas las condiciones iniciales se desprecian porque no afectan la respuesta en estado estable.
2. Se sustituye  $s$  por  $j\omega$  en la función de transferencia
3. Para varios valores de frecuencia  $\omega$  se encuentra la relación de amplitud  $M$  y el ángulo de fase  $\phi$
4. Se grafican los resultados obtenidos en el punto anterior ya sea en coordenada rectangulares (Diagramas de Bode) o en coordenadas polares (Diagramas de Nyquist)

### Diagramas de BODE

Los diagramas de Bode son una forma de representar la respuesta en frecuencia de un sistema de control en coordenadas rectangulares, este consiste de dos gráficos:

1. Diagrama de amplitud o atenuación: en donde se grafica la relación de amplitud  $M$  de  $G(j\omega)$  en decibelios (db) contra el logaritmo de la frecuencia.

El valor  $M$  expresado en decibelios se obtiene como:  $M_{db} = 20 \log_{10} M(\omega)$

2. Diagrama de fase: en donde se grafica el ángulo de fase de  $G(j\omega)$  contra el logaritmo de la frecuencia.

Los diagramas de Bode tienen las siguientes características:

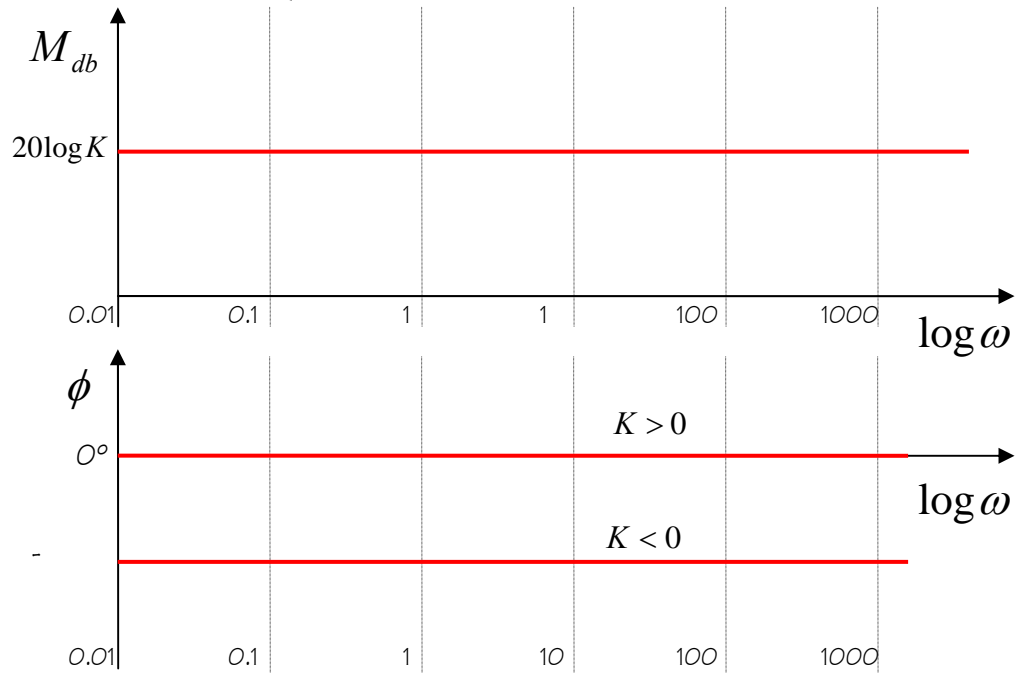
- Como se grafica el logaritmo de  $\omega$ , los factores producto y cociente de  $G(j\omega)$  se convierten en sumas de rectas.
- Los ángulos de fase también se suman y restan en forma natural.
- El diagrama de Bode en la mayoría de los casos se puede aproximar mediante segmentos de recta lo cual simplifica la construcción.

## Diagramas de Bode de Funciones comunes

Ganancia ( $G(s) = K$ )

Amplitud:  $M_{db} = 20 \log K = cte$

Fase:  $\phi = \tan^{-1} \frac{0}{K} = \begin{cases} 0^\circ & \text{si } K > 0 \\ -180^\circ & \text{si } K < 0 \end{cases}$



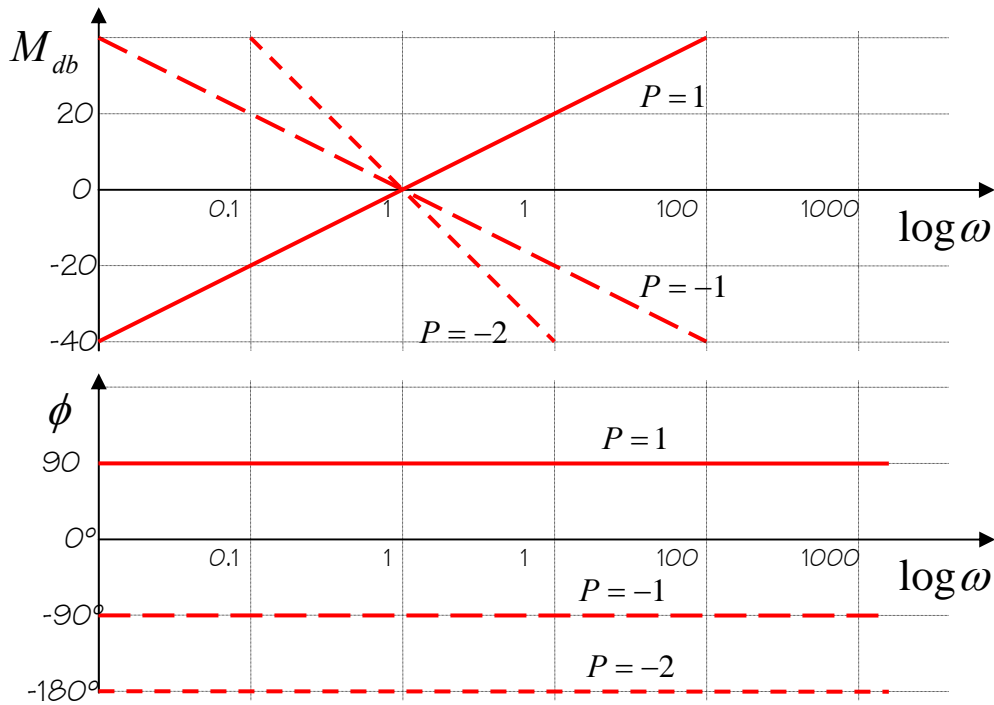
Polos y ceros en el origen ( $G(s) = s^{\pm P}$ )

También conocidos como factor integral y derivativo. Al sustituir a  $s$  por  $j\omega$  se obtiene:  $G(j\omega) = j\omega^{\pm P}$

Amplitud:  $M_{db} = 20 \log |j\omega^{\pm P}| = \pm 20 \log \omega$

Fase:  $\phi = \tan^{-1}(j\omega^{\pm P}) = \pm 90^\circ P$

La amplitud en este caso es una recta con pendiente  $\pm 20P$  y pasa por  $M_{db} = 0$  para  $\omega = 1$ . Es así como la pendiente será de 20 db por década de frecuencia. Es decir cambia de 20 db cada vez que el valor de la frecuencia es multiplicado por 10. El ángulo de fase es una recta horizontal que pasa por  $90P$ .



### Factores de primer orden ( $G(s) = (1 + s\tau)^{\pm 1}$ )

En el caso del polo simple al sustituir a  $s$  por  $j\omega$  se obtiene:  $G(j\omega) = \left( \frac{1}{1 + j\omega\tau} \right)$

Amplitud: 
$$M_{db} = 20 \log \left| \frac{1}{1 + j\omega\tau} \right| = -20 \log \sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}$$

- Si  $\omega \ll 1/\tau$  se puede aproximar a  $M_{db} = 20 \log 1 = 0$  línea recta horizontal
- Si  $\omega \gg 1/\tau$  se puede aproximar a  $M_{db} = 20 \log (\omega\tau)$  línea recta con pendiente 20db/década

Las dos rectas anteriores son asíntotas del diagrama de amplitud exacto, a las cuales se puede aproximar el diagrama de amplitud. En donde el valor de frecuencia en el punto donde se encuentran las dos rectas se denomina frecuencia de corte y se encuentra en  $\omega = 1/\tau$ .

Fase: 
$$\phi = \tan^{-1}(-\omega\tau) = -\tan^{-1} \omega\tau$$

- $\omega = 0 \rightarrow \phi = 0^\circ$
- $\omega = 1/\tau \rightarrow \phi = -45^\circ$
- $\omega = \infty \rightarrow \phi = -90^\circ$

En el caso del cero simple al sustituir a  $s$  por  $j\omega$  se obtiene:  $(1 + j\omega\tau)$

Amplitud: 
$$M_{db} = 20 \log |1 + j\omega\tau| = -20 \log \left| \frac{1}{1 + j\omega\tau} \right|$$

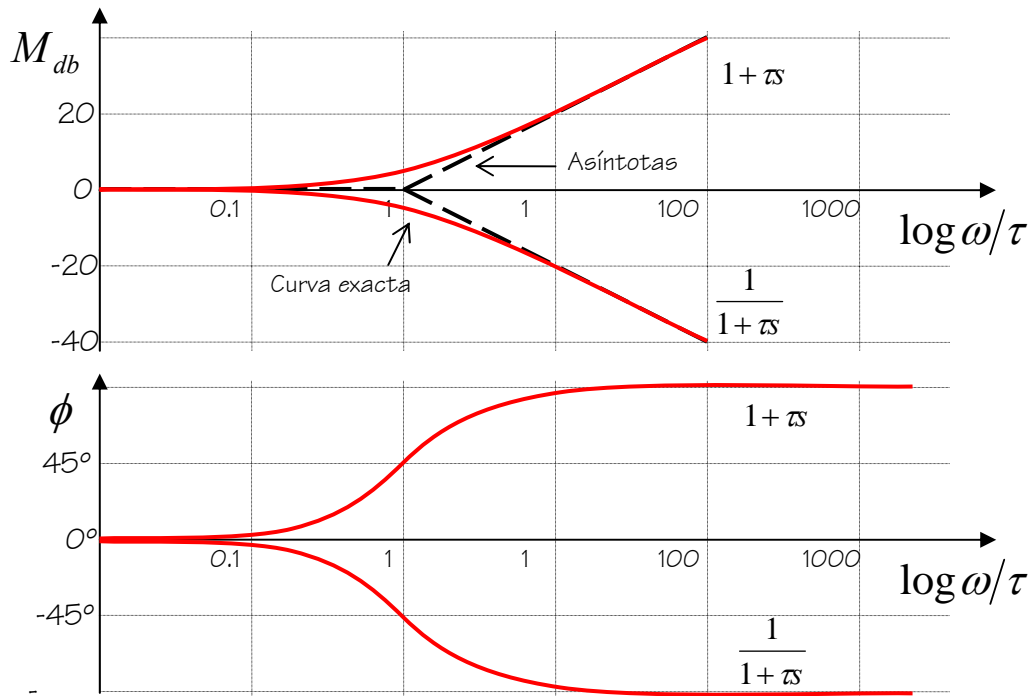
Fase: 
$$\phi = \tan^{-1}(\omega\tau)$$

Se obtienen en este caso curvas idénticas pero con signo invertido

Si se requiere el valor exacto del diagrama de Bode basta con corregir el valor de la amplitud y esto se hace calculando el error en algunos puntos.

El error máximo se produce a la frecuencia de cruce y es aproximadamente igual a 3db ya que:

$$E_{\max} = -20 \log \sqrt{1+1} + 20 \log = -10 \log 2 = -3.03 \text{ db}$$



**Factores de cuadráticos**  $(G(s) = \left( \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \right)^{\pm 1})$

En el caso de la función de transferencia de segundo orden al sustituir a  $s$  por  $j\omega$  se obtiene:

$$G(j\omega) = \left( \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\xi\omega_n j\omega + \omega_n^2} \right) = \left( \frac{1}{(j\omega)^2/\omega_n^2 + 2\xi j\omega/\omega_n + 1} \right) = \frac{1}{(1 - (\omega/\omega_n)^2) + j2\xi(\omega/\omega_n)}$$

Se estudiará aquí el caso en que  $\xi \leq 1$ , ya que en los otros casos  $G(s)$  puede descomponerse en el producto de polos simples.

Amplitud:  $M_{db} = -20 \log \sqrt{(1 - (\omega/\omega_n)^2)^2 + 4\xi^2(\omega/\omega_n)^2}$

- Si  $\omega \ll \omega_n$  se puede aproximar a  $M_{db} = 20 \log 1 = 0$  línea recta horizontal
- Si  $\omega \gg \omega_n$  se puede aproximar a  $M_{db} = -20 \log \sqrt{\omega^4/\omega_n^4} = -40 \log (\omega/\omega_n)$  línea recta con pendiente -40db/década

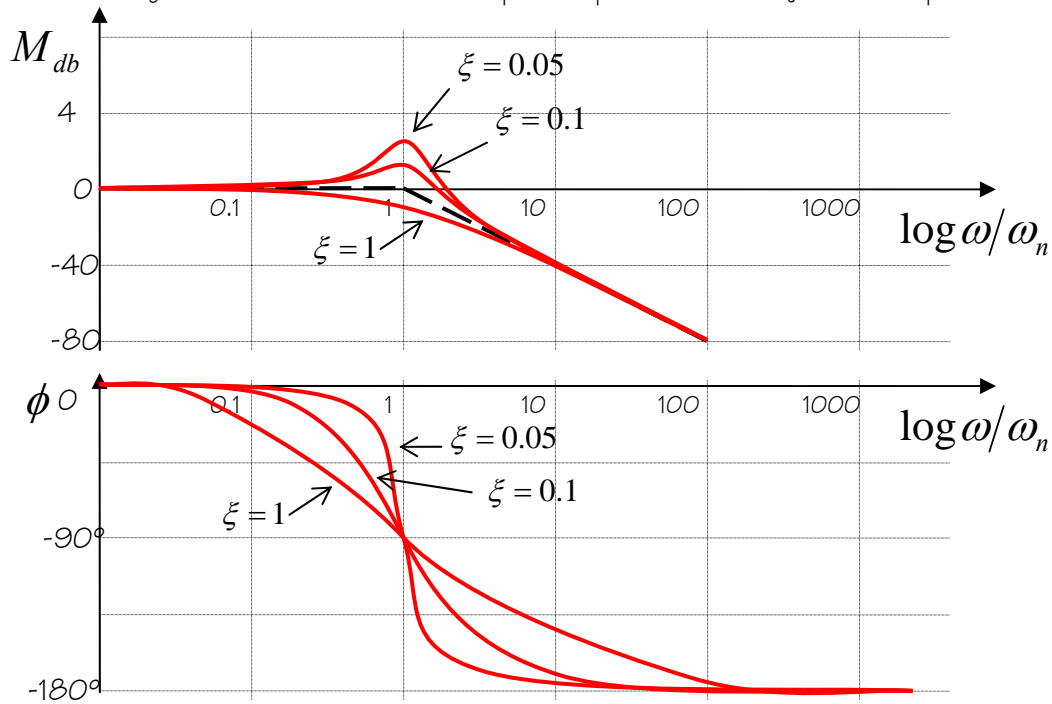
Las dos rectas anteriores son asíntotas del diagrama de amplitud, a las cuales se puede aproximar el diagrama de amplitud. La frecuencia de corte se encuentra en  $\omega = \omega_n$ .

En este caso en la curva real cerca de la frecuencia de corte se produce un pico de resonancia el cual depende del valor de  $\xi$  y tiende a crecer cuando  $\xi$  decrece.

Fase:  $\phi = -\tan^{-1} \frac{2\xi \omega/\omega_n}{1 - (\omega/\omega_n)^2}$

- $\omega = 0 \rightarrow \phi = 0^\circ$
- $\omega = \omega_n \rightarrow \phi = -90^\circ$
- $\omega = \infty \rightarrow \phi = -180^\circ$

La curva del ángulo de fase es antisimétrica respecto al punto de inflexión y también depende del valor de  $\xi$ .



El diagrama de Bode para  $G(s) = \left( \frac{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}{\omega_n^2} \right)$  se puede obtener invirtiendo las curvas anteriores.

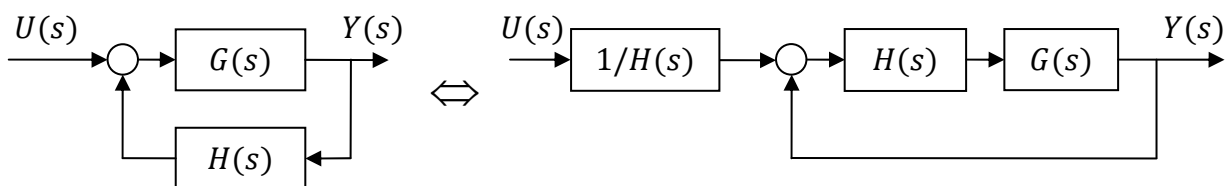
### Procedimiento general para trazar diagramas de Bode

- En primer lugar se describe la función de transferencia sinusoidal como un producto de los factores básicos analizados anteriormente
- Luego se identifican las frecuencias de cruce asociadas con cada uno de esos factores
- Se trazan las curvas asintóticas del logaritmo de la magnitud con las pendientes adecuadas entre las frecuencias de cruce. Esto se hace sumando algebraicamente los aportes de cada uno de los factores. Si se requiere una curva exacta se puede obtener agregando las correcciones apropiadas.
- Las curvas de ángulo de fase se pueden obtener sumando las curvas de ángulo de fase de cada factor.

### Análisis de estabilidad utilizando los diagramas de Bode

Esto se hace utilizando los conceptos de margen de ganancia y margen de fase que se definen a continuación.

El método permite determinar la estabilidad relativa de un sistema de control de lazo cerrado como se muestra en la figura con el simple análisis del sistema de lazo abierto  $G(s)H(s)$ .



### Margen de ganancia ( $MG$ )

Es una medida de la estabilidad relativa, se define como la magnitud del recíproco de la función de transferencia de lazo abierto y se calcula a la frecuencia  $\omega_c$  a la cual el ángulo de fase es de  $-180^\circ$ .

$$MG = \frac{1}{|G(j\omega_c)|} = 20\log 1 - 20\log|G(j\omega_c)|$$

Donde:

$$\phi(j\omega_c) = -180^\circ = -\pi_{rad}$$

$\omega_c$ : frecuencia de cruce de fase o frecuencia crítica.

### Margen de fase ( $m\phi$ )

Es una medida de la estabilidad relativa y se define como la suma de  $180^\circ$  al ángulo de fase  $\phi_g$  de la función de transferencia de lazo abierto y ganancia unidad.

$$m\phi = (180^\circ + \phi(j\omega_g))_{\text{grados}}$$

Donde:

$$|G(j\omega_g)| = 1 \Rightarrow 20\log|G(j\omega_g)| = 0$$

$\omega_g$  se denomina frecuencia de cruce de ganancia.

### Estabilidad relativa

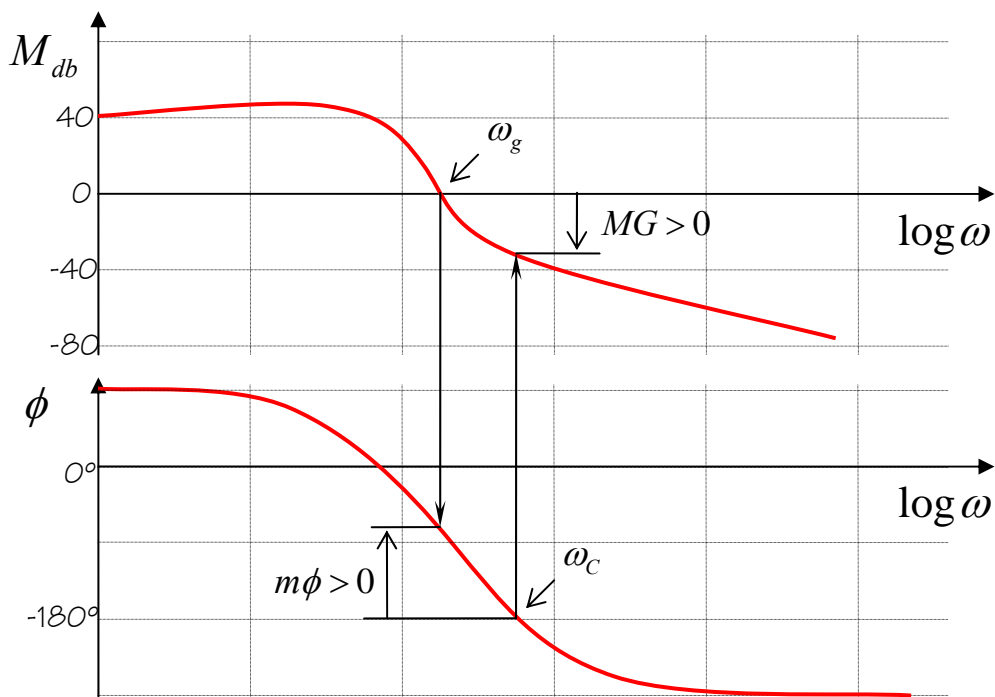
Los conceptos de margen de ganancia y margen permiten determinar la estabilidad de un sistema según el siguiente criterio:

Un sistema es estable si  $MG > 0$  y  $m\phi > 0$

Nótese aquí que estos conceptos no solo indican la estabilidad en términos absolutos sino que permiten dar un margen de que tan lejos está un sistema de la estabilidad o inestabilidad, esto ya que entre más pequeños se hagan los valores del margen de ganancia y de fase más tenderá el sistema hacia la inestabilidad y viceversa.

### Procedimiento para determinar la estabilidad utilizando los diagramas de BODE

1. Se determina la frecuencia crítica ( $\omega_c$ ) trazando para ello una horizontal que pase por  $-180^\circ$  hasta cortar el diagrama de fase luego se traza una vertical hasta el eje de las frecuencias.
2. Se traza una vertical que pase por  $\omega_c$  y que corte el diagrama de amplitud. La diferencia entre el punto de corte con  $Odb$  da el margen de ganancia ( $MG$ ).
3. Se determina la frecuencia de ganancia crítica ( $\omega_g$ ), trazando para ello una horizontal que pase por  $Odb$  hasta cortar el diagrama de amplitud luego se baja verticalmente hasta el eje de las frecuencias.
4. Se traza una vertical que pasa por  $\omega_g$  y corte el diagrama de fase. La diferencia entre  $-180^\circ$  y el punto de corte da el margen de fase.
5. Si  $MG > 0$  y  $m\phi > 0$  se dice que el sistema es estable.



6.

### Comentarios sobre los márgenes de fase y ganancia

Los márgenes de fase y ganancia adecuados permiten tener una cierta seguridad en cuanto a la estabilidad del sistema cuando ocurre una variación en algún parámetro de este. Para tener un comportamiento satisfactorio el margen de fase debe estar entre  $30^\circ$  y  $60^\circ$  y el margen de ganancia debe ser superior a 6db. Esto significa que la pendiente de la curva del logaritmo de la magnitud a la frecuencia de cruce debe ser más suave que -40 db/década.

**Ejemplo 2.** Hacer el diagrama de Bode y analizar la estabilidad de:

$$G(s) = \frac{10(s+3)}{s(s+2)(s^2+s+2)}$$

Se sustituye a  $s$  por  $j\omega$  y se obtiene:

$$G(s) = \frac{10(j\omega+3)}{j\omega(j\omega+2)((j\omega)^2+j\omega+2)}$$

Por comodidad para el trazado de las graficas se rescribe la ecuación en la forma normalizada con los términos independientes iguales a 1:

$$G(s) = \frac{(10)(3)(j\omega/3+1)}{j\omega(2)(j\omega/2+1)(2)((j\omega)^2/2+j\omega/2+1)} = \frac{7.5(j\omega/3+1)}{j\omega(j\omega/2+1)((j\omega)^2/2+j\omega/2+1)}$$

Esta función se descompone en factores conocidos, que son en este caso:

$$\underbrace{7.5}_1 \quad \underbrace{\frac{1}{j\omega}}_2 \quad \underbrace{(1+j\omega/3)}_3 \quad \underbrace{\frac{1}{(1+j\omega/2)}}_4 \quad \underbrace{\frac{1}{(1+j\omega/2+(j\omega)^2/2)}}_5$$

### Gráfica asintótica

Seguidamente se hace la gráfica con las asíntotas identificando las frecuencias de cruce para los factores 3, 4 y 5:

1. Amplitud:  $M_{db} = 20\log 7.5 = 17.5$ : recta horizontal que pasa por 17.5

Fase:  $\phi = \tan^{-1} \frac{0}{7.5} = 0^\circ$ : recta horizontal que pasa por  $0^\circ$



2. Amplitud:  $M_{db} = 20\log|j\omega^{-1}| = -20\log\omega$ : con pendiente  $-20P$  y pasa por  $M_{db} = 0$  para  $\omega = 1$ .

Fase:  $\phi = \tan^{-1}(j\omega^{-1}) = -90^\circ$ : recta horizontal que pasa por  $90$ .

3. Frecuencia de cruce  $\omega = 1/\tau$  como  $\tau = 1/3 \Rightarrow \omega = 3$

Amplitud:  $M_{db} = 20\log\left|1 + j\frac{\omega}{3}\right| = -20\log\left|\frac{1}{1 + j\omega/3}\right|$

- Si  $\omega \ll 3$  se puede aproximar a  $M_{db} = 20\log 1 = 0$ : línea recta horizontal
- Si  $\omega \gg 3$  se puede aproximar a  $M_{db} = 20\log\frac{\omega}{3}$ : línea recta con pendiente  $20\text{db/década}$

Fase:  $\phi = \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{3}\right)$

- $\omega = 0 \rightarrow \phi = 0^\circ$
- $\omega = 1/\tau \rightarrow \phi = 45^\circ$
- $\omega = \infty \rightarrow \phi = 90^\circ$

4. Frecuencia de cruce  $\omega = 2$

Amplitud:  $M_{db} = 20\log\left|\frac{1}{1 + j\omega\tau}\right| = -20\log\sqrt{1 + \omega^2(1/2)^2}$

- Si  $\omega \ll 2$  se puede aproximar a  $M_{db} = 20\log 1 = 0$ : línea recta horizontal
- Si  $\omega \gg 2$  se puede aproximar a  $M_{db} = 20\log\frac{\omega}{2}$ : línea recta con pendiente  $-20\text{db/década}$

Fase:  $\phi = \tan^{-1}\left(-\frac{\omega}{2}\right) = -\tan^{-1}\frac{\omega}{2}$

- $\omega = 0 \rightarrow \phi = 0^\circ$
- $\omega = 1/\tau \rightarrow \phi = -45^\circ$
- $\omega = \infty \rightarrow \phi = -90^\circ$

5. Frecuencia de cruce  $\omega = \omega_n$  como  $\omega_n^2 = 2 \Rightarrow \omega = \sqrt{2}$ , y  $\xi = 1/2\sqrt{2}$

Amplitud:  $M_{db} = -20\log\sqrt{\left(1 - (\omega/\sqrt{2})^2\right)^2 + 4\left(1/2\sqrt{2}\right)^2(\omega/\sqrt{2})^2}$

- Si  $\omega \ll \sqrt{2}$  se puede aproximar a  $M_{db} = 20\log 1 = 0$  línea recta horizontal
- Si  $\omega \gg \sqrt{2}$  se puede aproximar a  $M_{db} = -20\log\sqrt{\frac{\omega^4}{2}} = -40\log\frac{\omega}{\sqrt{2}}$  línea recta con pendiente  $-40\text{db/década}$

Fase:  $\phi = -\tan^{-1}\frac{2\xi\omega/\sqrt{2}}{1 - (\omega/\sqrt{2})^2}$

- $\omega = 0 \rightarrow \phi = 0^\circ$
- $\omega = \omega_n \rightarrow \phi = -90^\circ$

$$\omega = \infty \rightarrow \phi = -180^\circ$$

### Grafica exacta

Para la gráfica exacta se debe calcular el valor exacto de la curva de magnitud y fase en algunos puntos adicionales, los puntos mínimos necesarios son en general los correspondientes a las frecuencias de cruce.

### Magnitud

$$\text{En } \omega = \sqrt{2}$$

$$M_{db} = -20\log 7.5 - 20\log \sqrt{\sqrt{2}^2} + 20\log \sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2} - 20\log \sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} - 20\log \sqrt{\left(1 - \frac{\sqrt{2}^2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$

$$M_{db} = 16.61$$

$$\text{En } \omega = 2$$

$$M_{db} = -20\log 7.5 - 20\log \sqrt{2^2} + 20\log \sqrt{1^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} - 20\log \sqrt{1^2 + \left(\frac{2}{2}\right)^2} - 20\log \sqrt{\left(1 - \frac{2^2}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{2}\right)^2}$$

$$M_{db} = 7.06$$

$$\text{En } \omega = 3$$

$$M_{db} = -20\log 7.5 - 20\log \sqrt{3^2} + 20\log \sqrt{1^2 + \left(\frac{3}{3}\right)^2} - 20\log \sqrt{1^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} - 20\log \sqrt{\left(1 - \frac{3^2}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2}$$

$$M_{db} = -5.75$$

### Fase

$$\text{En } \omega = \sqrt{2}$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{0}{7.5}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{0}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}/3}{1}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}/2}{1}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}/2}{1 - \sqrt{2}^2/2}\right) = -190^\circ$$

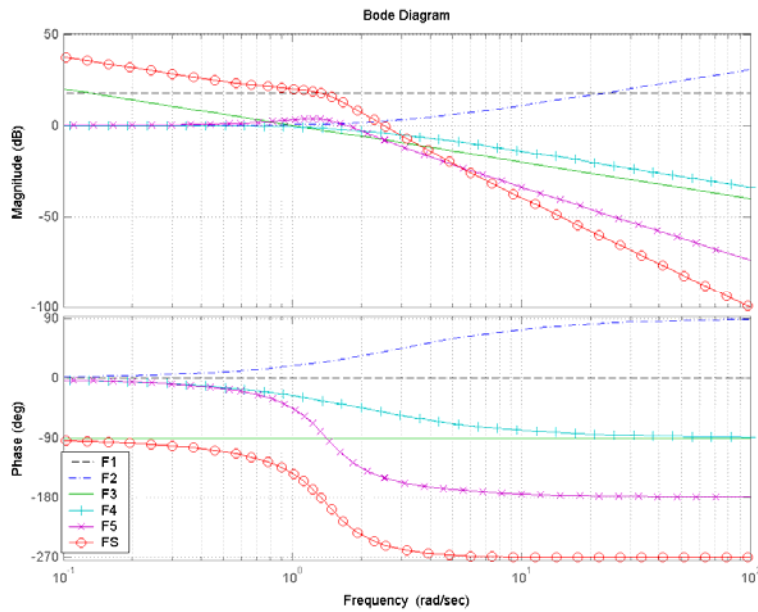
$$\text{En } \omega = 2$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{0}{7.5}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{2}{0}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{2/3}{1}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{2/2}{1}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{2/2}{1 - 2^2/2}\right) = -143$$

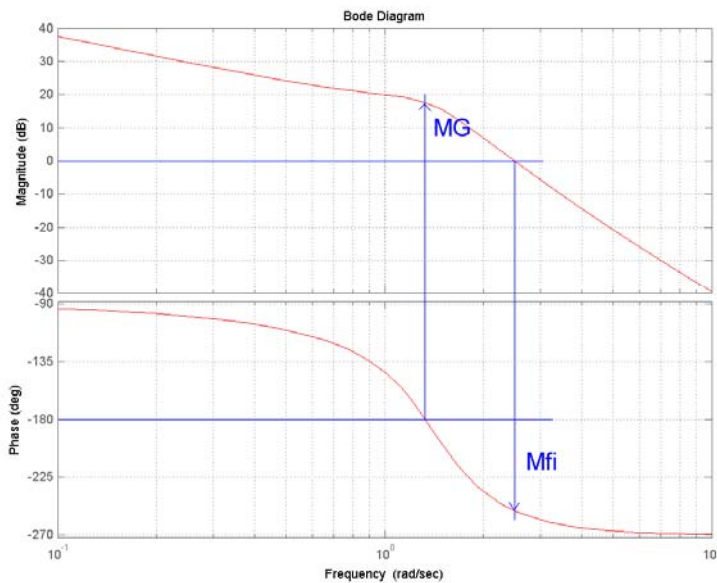
$$\text{En } \omega = 3$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{0}{7.5}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{3}{0}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{3/3}{1}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{3/2}{1}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{3/2}{1 - 3^2/2}\right) = -258.11$$

## Diagrama de Bode



## Estabilidad en diagrama de Bode



## Análisis de estabilidad

$$MG \cong -18$$

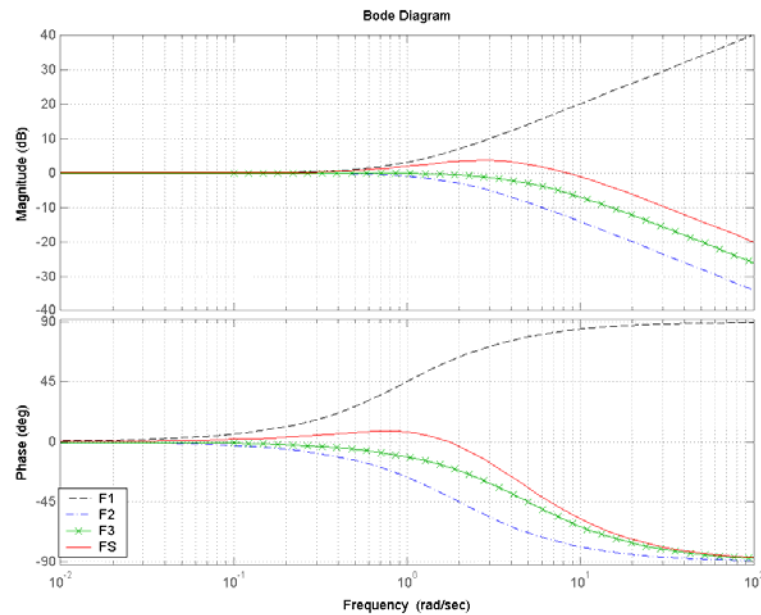
$$m\phi \cong -50^\circ$$

Por tanto el sistema es **inestable**

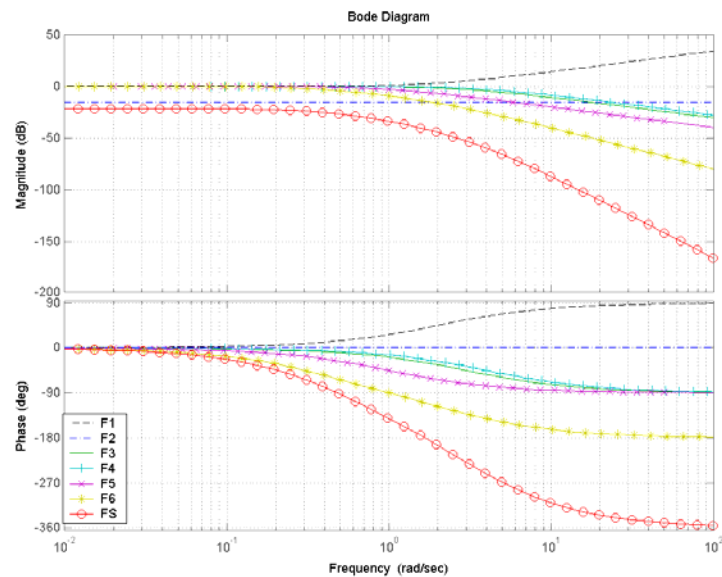
## Ejercicios

Hacer el diagrama de Bode de las siguientes funciones:

$$G(s) = \frac{10(s+1)}{(s+2)(s+5)} = \frac{10s+10}{s^2+7s+10}$$

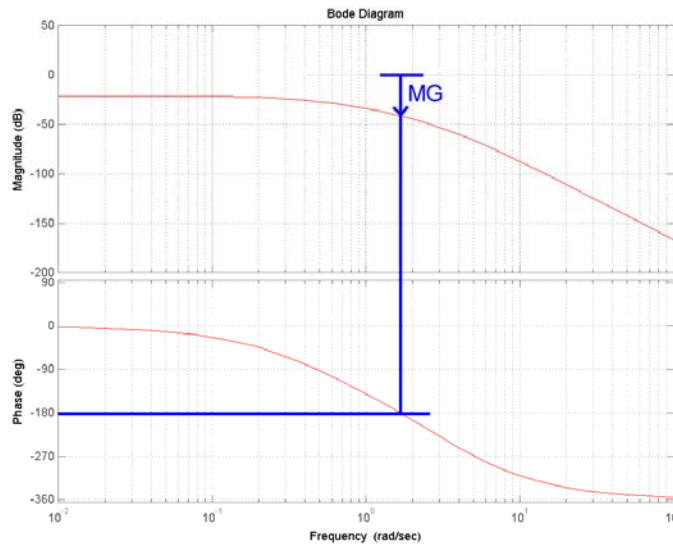


$$G(s) = \frac{(s+2)}{(s+3)(s+4)(s+1)(s^2+3s+1)} = \frac{s+2}{s^5+11s^4+44s^3+77s^2+55s+12}$$



Determine la estabilidad e las siguientes funciones mediante los diagramas de Bode.

$$G(s) = \frac{(s+2)}{(s+3)(s+4)(s+1)(s^2+3s+1)} = \frac{s+2}{s^5+11s^4+44s^3+77s^2+55s+12}$$



## Diagrama de Nyquist

El diagrama polar comúnmente denominado diagrama de Nyquist de una función de transferencia sinusoidal  $G(j\omega)$  es un diagrama de la magnitud o módulo de  $G(j\omega)$  en función del ángulo de fase de  $G(j\omega)$  en coordenadas polares al variar el valor de  $\omega$  de menos infinito a infinito. Entonces, el diagrama polar es el lugar de los vectores  $|G(j\omega)|\angle G(j\omega)$  cuando  $\omega$  varía de  $-\infty$  a  $\infty$ .

La figura presenta un ejemplo de este diagrama. Cada punto en el diagrama polar de  $G(j\omega)$  representa el extremo terminal de un vector para un valor determinado de  $\omega$ .

Para construir el diagrama polar se calcula directamente la magnitud  $|G(j\omega)|$  y el ángulo de fase  $\angle G(j\omega)$  para cada frecuencia  $\omega$ .

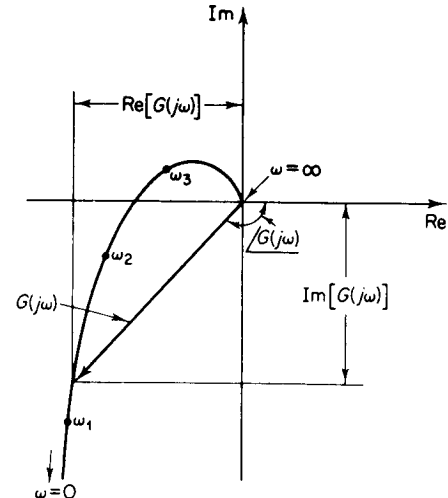
Los datos también se pueden obtener a partir del diagrama de Bode.

Si se requiere la multiplicación de dos funciones de transferencia sinusoidales, se puede obtener multiplicando, para cada frecuencia, las funciones de transferencia sinusoidales individuales por medio de una multiplicación algebraica compleja. Es decir:

$$\text{Si } G(j\omega) = G_1(j\omega) \cdot G_2(j\omega)$$

Entonces

$$\begin{aligned} |G(j\omega)| &= |G_1(j\omega)| \cdot |G_2(j\omega)| \\ \angle G(j\omega) &= \angle G_1(j\omega) + \angle G_2(j\omega) \end{aligned}$$



En general, si se desea el diagrama polar de  $G(j\omega) = G_1(j\omega) \cdot G_2(j\omega)$ , es conveniente trazar primero el diagrama logarítmico de  $G(j\omega)$  y luego convertirlo en un diagrama polar, en lugar de dibujar los diagramas polares de  $G_1(j\omega)$  y  $G_2(j\omega)$  y multiplicar ambos en el plano complejo para obtener el diagrama polar de  $G(j\omega)$ .

Una ventaja al utilizar un diagrama polar es que presenta las características de respuesta en frecuencia de un sistema en todo el rango de frecuencias, en un solo diagrama, la desventaja es que el diagrama no indica claramente las contribuciones de cada factor individual de la función de transferencia.

## Diagramas de Nyquist de Funciones comunes

### Factores integral y derivativo $G(j\omega) = (j\omega)^{\pm 1}$

El diagrama polar de  $G(j\omega) = 1/j\omega$  es el eje imaginario negativo ya que:

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = -j \frac{1}{\omega} = \frac{1}{\omega} \angle -90^\circ$$

El diagrama polar de  $G(j\omega) = j\omega$  es el eje real positivo.

### Factores de primer orden $G(j\omega) = (1 + j\omega T)^{\pm 1}$

Para la función de transferencia sinusoidal

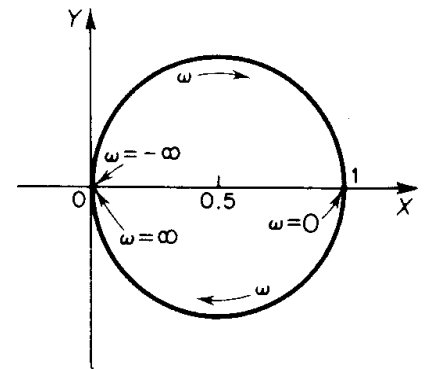
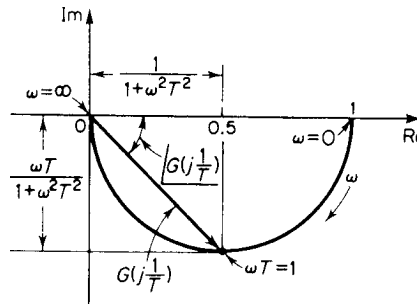
$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \angle -\tan^{-1} \omega T$$

Para  $\omega = 0$ :  $G(j0) = 1 \angle 0^\circ$

$\omega = 1/T$ :

$$G\left(j \frac{1}{T}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \angle -45^\circ$$

Si  $\omega$  tiende a infinito, la magnitud de  $G(j\omega)$  tiende a cero y el ángulo de fase tiende a  $-90^\circ$ . El diagrama polar de esta función de transferencia es un semicírculo, con centro en 0.5 sobre el eje real y radio igual a 0.5, cuando la frecuencia  $\omega$  varía de cero a infinito, como se puede ver en la figura.



El diagrama polar de la función de transferencia  $G(j\omega) = 1 + j\omega T$  es simplemente la mitad superior de la recta que pasa por el punto (1, 0) en el plano complejo, y es paralela al eje imaginario. El diagrama polar de  $G(j\omega) = 1 + j\omega T$  es totalmente diferente al de  $G(j\omega) = 1/(1 + j\omega T)$ .

### Factores cuadráticos $G(j\omega) = (1 + 2\xi(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2)^{\pm 1}$

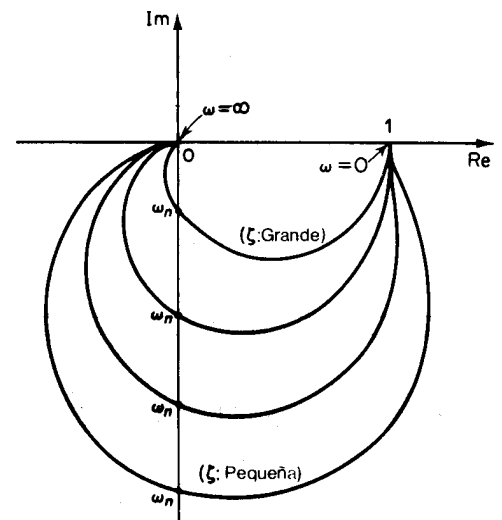
Las partes de alta y baja frecuencia del diagrama polar de la función de transferencia sinusoidal:

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\xi(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2} \text{ para } \xi > 0$$

Están dadas respectivamente por:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = 1 \angle 0^\circ \text{ y } \lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = 0 \angle -180^\circ$$

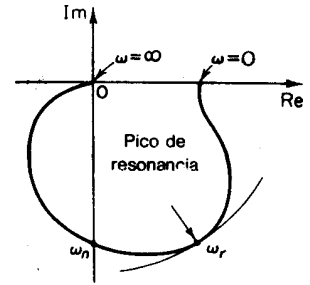
El diagrama polar de esta función de transferencia sinusoidal comienza en  $1 \angle 0^\circ$  y finaliza en  $0 \angle 180^\circ$  al aumentar  $\omega$  de cero a infinito. Esto indica que la porción de alta frecuencia de  $G(j\omega)$  es tangente al eje real negativo.



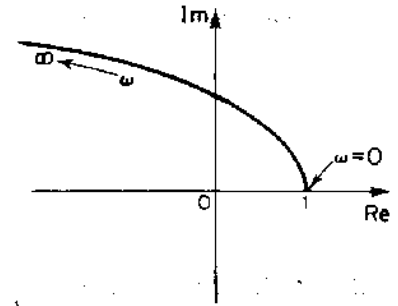
La figura presenta ejemplos de diagramas polares de esta función de transferencia. La forma exacta del diagrama polar depende del valor de la relación de amortiguamiento  $\xi$ , pero la forma general es la misma, tanto para el caso subamortiguado ( $1 > \xi > 0$ ) como para el caso sobreamortiguado ( $\xi > 1$ ).

Para el caso subamortiguado en  $\omega = \omega_n$  se tiene que el ángulo de fase es  $-90^\circ$ . Por tanto, se puede ver que la frecuencia a la cual el diagrama corta al eje imaginario, es la frecuencia natural.

El punto del diagrama polar cuya distancia al origen es máxima, corresponde a la frecuencia de resonancia  $\omega_r$ .



Para el caso sobreamortiguado, al incrementar  $\xi$  más allá de la unidad, el lugar de  $G(j\omega)$  tiende a ser un semicírculo, lo que resulta del hecho de que para un sistema fuertemente amortiguado las raíces características son reales, y una de ellas es mucho más pequeña que la otra. Como para un valor de  $\xi$  suficientemente alto la raíz más grande de la respuesta se hace muy pequeña, el sistema se comporta como uno de primer orden.



Para la función de transferencia sinusoidal

$$G(j\omega) = 1 + 2\xi \left( \frac{j\omega}{\omega_n} \right) + \left( \frac{j\omega}{\omega_n} \right)^2 = \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right) + j \left( \frac{2\xi\omega}{\omega_n} \right)$$

La porción de baja frecuencia de la curva es:  $\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = 1 \angle 0^\circ$

La porción de alta frecuencia es:  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = \infty \angle 180^\circ$

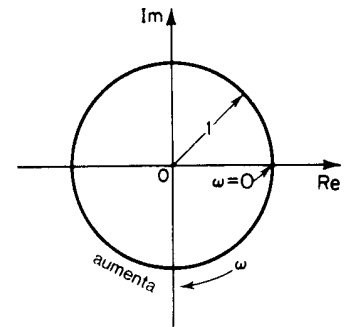
Como la parte imaginaria de  $G(j\omega)$  es positiva y crece en forma monótona para  $\omega > 0$ , y la parte real de  $G(j\omega)$  decrece en forma monótona a partir de la unidad, la forma general del diagrama polar de  $G(j\omega)$  es como aparece en la figura. El ángulo de fase está entre  $0^\circ$  y  $180^\circ$ .

### Retardo de transporte.

El retardo de transporte, o tiempo muerto  $G(j\omega) = e^{-j\omega T}$ , se puede escribir como:

$$G(j\omega) = 1 \angle \cos \omega T - j \sin \omega T$$

Como la magnitud de  $G(j\omega)$  es siempre la unidad, y el ángulo de fase varía linealmente con  $\omega$  el diagrama polar del retardo de transporte es un círculo unitario, como se puede ver en la figura.



### Formas generales de los diagramas polares

Los diagramas polares de una función de transferencia de la forma:

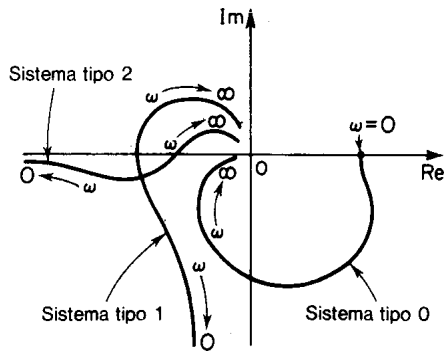
$$G(j\omega) = \frac{b_0(j\omega)^m + b_1(j\omega)^{m-1} + \dots}{a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots} = \frac{K(1 + j\omega T_a)(1 + j\omega T_a) \dots}{(j\omega)^{\lambda}(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2) \dots}$$

Donde  $n > m$  o el grado del polinomio denominador es mayor que el del numerador, tendrán las siguientes formas generales:

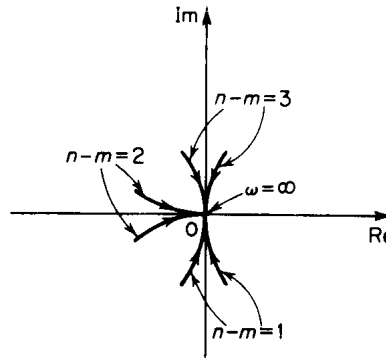
1. Para  $\lambda = 0$  o sistemas tipo 0: el punto de inicio del diagrama polar (que corresponde a  $\omega = 0$ ) es finito y está sobre el eje real positivo. La tangente al diagrama polar en  $\omega = 0$  es perpendicular al eje real. El punto terminal, que corresponde a  $\omega = \infty$ , está en el origen y la curva es tangente a uno de los ejes.
2. Para  $\lambda = 1$  o sistemas de tipo 1: el término  $j\omega$  en el denominador contribuye con  $-90^\circ$  al ángulo de fase total de  $G(j\omega)$  para  $0 \leq \omega \leq \infty$ . Para  $\omega = 0$ , la magnitud de  $G(j\omega)$  es infinita, y el ángulo de fase es igual a menos  $90^\circ$ . A frecuencias bajas, el diagrama polar es asintótico a una línea paralela al eje imaginario negativo. En  $\omega = \infty$ , la magnitud es cero, la curva converge hacia el origen y es tangente a uno de los ejes.

3. Para  $\lambda = 2$  o sistemas de tipo 2: el término  $(j\omega)^2$  en el denominador contribuye con  $-180^\circ$  al ángulo de fase total de  $G(j\omega)$  para  $0 \leq \omega \leq \infty$ . En  $\omega = 0$  la magnitud de  $G(j\omega)$  es infinita, y el ángulo de fase es igual a menos  $180^\circ$ . A frecuencias bajas, el diagrama polar es asintótico a una línea paralela al eje real negativo. En  $\omega = \lambda$ , la magnitud se hace cero, y la curva es tangente a uno de los ejes.

En la figura se pueden ver las formas generales de las porciones de baja frecuencia de los diagramas polares de los sistemas de tipo 0, tipo 1 y tipo 2.



Bajas frecuencias



Altas frecuencias

Nótese que si el grado del polinomio denominador de  $G(j\omega)$  es mayor que el del numerador, los lugares de  $G(j\omega)$  convergen hacia el origen en sentido horario. En  $\omega = \lambda$ , los lugares son tangentes a uno de los ejes, como se ve en la figura para altas frecuencias.

La tabla siguiente muestra diagramas polares de diversas funciones de transferencia comunes.




## Ejemplos

1. Considere la siguiente función de transferencia de segundo orden:

$$G(s) = \frac{1}{s(Ts + 1)}$$

Trace el diagrama polar para esta función de transferencia.

Como la función de transferencia sinusoidal se puede escribir como

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega(1 + j\omega T)} = -\frac{T}{1 + \omega^2 T^2} - j\frac{1}{\omega(1 + \omega^2 T^2)}$$

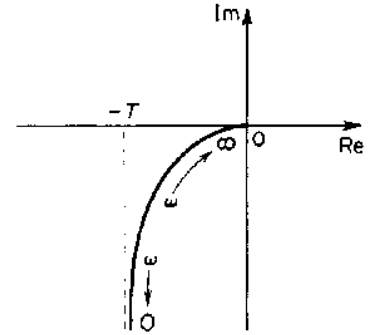
La porción de baja frecuencia del diagrama polar es:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = -T - j\infty = \infty \angle -90^\circ$$

La porción de alta frecuencia es:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = 0 - j0 = 0 \angle -180^\circ$$

En la figura aparece la forma general del diagrama polar de  $G(j\omega)$ . Este es asíntotico a la línea vertical que pasa por el punto  $(-T, 0)$ . Como esta función de transferencia incluye un integrador ( $1/s$ ), la forma general del diagrama polar difiere de las funciones de transferencia de segundo orden que no tienen un integrador.



2. Obtenga el diagrama polar de la función de transferencia siguiente:

$$G(j\omega) = \frac{e^{-j\omega L}}{1 + j\omega T} = \left( e^{-j\omega L} \right) \cdot \left( \frac{1}{1 + j\omega T} \right)$$

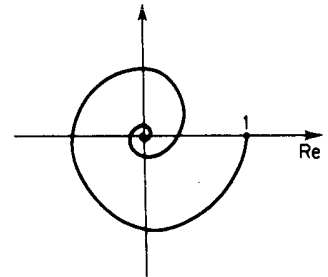
La magnitud y el ángulo de fase son, respectivamente,

$$|G(j\omega)| = |e^{-j\omega L}| \cdot \left| \frac{1}{1 + j\omega T} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}$$

y

$$\angle G(j\omega) = \angle(e^{-j\omega L}) + \angle\left(\frac{1}{1 + j\omega T}\right) = -\omega L - \tan^{-1} \omega T$$

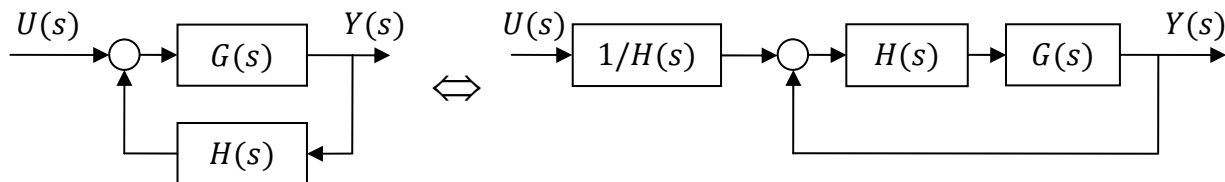
Como la magnitud decrece en forma monótona a partir de la unidad y el ángulo de fase también decrece monótona e indefinidamente, el diagrama polar de la función de transferencia dada es una espiral, como aparece en la figura.



Nótese que en los ejemplos mostrados anteriormente se desarrolló el diagrama polar para una frecuencia  $\omega$  entre 0 e infinito. El diagrama polar para una frecuencia entre menos infinito y cero será la imagen espejo respecto al eje real del diagrama para frecuencias de cero a infinito. Y el diagrama entre infinito y menos infinito será siempre el origen de coordenadas.

## Análisis de estabilidad utilizando diagramas de Nyquist

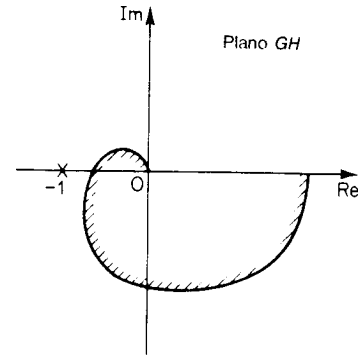
El criterio de estabilidad de Nyquist permite determinar la estabilidad relativa de un sistema de control de lazo cerrado como se muestra en la figura con el simple análisis del diagrama de Nyquist del sistema de lazo abierto  $G(s)H(s)$ .



### Criterio de estabilidad de Nyquist

(Para un caso especial en que  $G(s)H(s)$  no tiene polos ni ceros sobre el eje  $j\omega$ )

En el sistema que aparece en la figura, si la función de transferencia de lazo abierto  $G(s)H(s)$  tiene  $k$  polos en el semiplano derecho del plano  $s$  y  $\lim_{s \rightarrow \infty} G(s)H(s) = Cte$ , entonces para que haya estabilidad, la gráfica de  $G(j\omega)H(j\omega)$  al variar  $\omega$  de  $-\infty$  a  $\infty$  debe rodear  $k$  veces al punto  $-1 + j0$  en sentido anti horario.



### Observaciones sobre el criterio de estabilidad de Nyquist

1. Este criterio se puede expresar como  $Z = N + P$

Donde:

$Z$  = cantidad de ceros de  $1 + G(s)H(s)$  en el semiplano derecho del plano  $s$

$N$  = cantidad de rodeos alrededor del punto  $-1 + j0$  en sentido horario

$P$  = cantidad de polos de  $G(s)H(s)$  en el semiplano derecho del plano  $s$

Si  $P$  no es cero, para que un sistema de control sea estable, se debe tener  $Z = 0$ , o  $N = -P$ , lo que significa que hay que tener  $P$  rodeos antihorarios alrededor del punto  $-1 + j0$ .

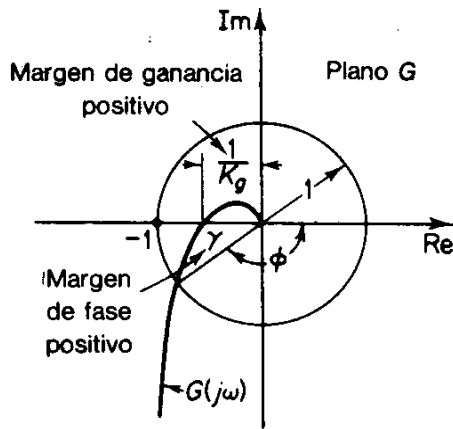
Si  $G(s)H(s)$  no tiene polos en el semiplano derecho del plano  $s$ , entonces  $Z = N$ . Por lo tanto, para que haya estabilidad, no debe haber rodeos alrededor del punto  $-1 + j0$  por parte de la gráfica  $G(j\omega)H(j\omega)$ . En este caso no es necesario considerar la gráfica para el eje  $j\omega$  completo, pues basta solamente con la porción de frecuencia positiva. La estabilidad de tal sistema se puede determinar viendo si el punto  $-1 + j0$  queda rodeado por el diagrama de Nyquist de  $G(j\omega)H(j\omega)$ . En la figura se puede ver la región encerrada por el diagrama de Nyquist. Para que haya estabilidad, el punto  $-1 + j0$  debe quedar fuera de la región sombreada.

2. Se debe tener mucho cuidado al verificar la estabilidad de sistemas con lazos múltiples, ya que pueden incluir polos en el semiplano derecho del plano  $s$ . (Nótese que aunque un lazo interior sea inestable, se puede hacer que todo el sistema de lazo cerrado sea estable con un diseño adecuado). Para determinar la inestabilidad de sistemas con lazos múltiples no basta la simple inspección de los rodeos alrededor del punto  $-1 + j0$  por la gráfica  $G(j\omega)H(j\omega)$ . En esos casos, sin embargo, se puede determinar fácilmente si hay o no algún polo de  $1 + G(s)H(s)$  en el semiplano derecho del plano  $s$ , al aplicar el criterio de estabilidad de Routh al denominador de  $G(s)H(s)$ .
3. Si el lugar de  $G(j\omega)H(j\omega)$  pasa por el punto  $-1 + j0$ , hay ceros de la ecuación característica o polos de lazo cerrado, ubicados sobre el eje  $j\omega$ . Esto no es deseable para sistemas de control prácticos. En un sistema de control de lazo cerrado bien diseñado, ninguna de las raíces de la ecuación característica debe quedar sobre el eje  $j\omega$ .

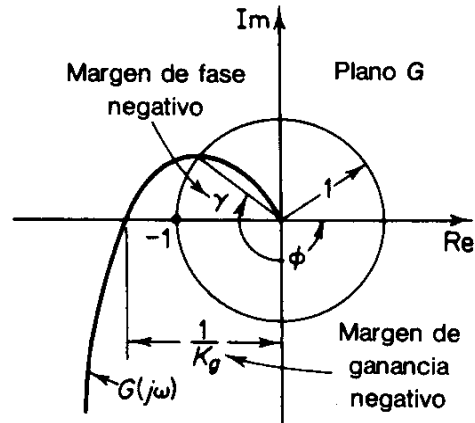
En los diagramas de Nyquist se puede obtener también en forma gráfica los valores del margen de ganancia y del margen de fase definidos para los diagramas de Bode, la obtención de estos valores se muestra en la figura siguiente.

Al examinar la estabilidad de los sistemas de control lineales utilizando el criterio de estabilidad de Nyquist, se pueden presentar tres posibilidades:

1. No hay rodeo del punto  $-1 + j0$ . Esto implica que el sistema es estable si no hay polos de  $G(s)H(s)$  en el semiplano derecho del plano  $s$ ; en caso contrario, el sistema es inestable.
2. Hay un rodeo en sentido anti horario o rodeos del punto  $-1 + j0$ . En este caso el sistema es estable si la cantidad de rodeos antihorarios es la misma que la cantidad de polos de  $G(s)H(s)$  en el semiplano derecho del plano  $s$ ; en caso contrario, el sistema es inestable.
3. Hay un rodeo o rodeos del punto  $-1 + j0$  en sentido horario. En este caso, el sistema es inestable.



Sistema Estable



Sistema Inestable

## Ejemplos

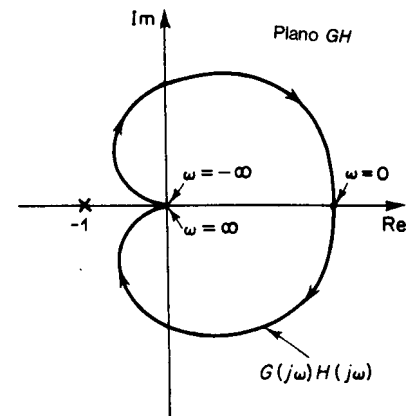
En los ejemplos siguientes, se supone que los valores de la ganancia  $K$  y de las constantes de tiempo (como  $T$ ,  $T_1$ , y  $T_2$ ) son todos positivos.

1. Considere un sistema cuya función de transferencia de lazo abierto está dada por:

$$G(s)H(s) = \frac{K}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$$

Examine la estabilidad del sistema.

La figura muestra un diagrama de Nyquist de  $G(j\omega)H(j\omega)$ . Como  $G(s)H(s)$  no tiene ningún polo en el semiplano derecho del plano  $s$ , y el punto  $-1 + j0$  no está rodeado por el lugar de  $G(j\omega)H(j\omega)$ , este sistema es estable para cualquier valor positivo de  $K$ ,  $T_1$ , y  $T_2$ .



2. Considere el sistema con la siguiente función de transferencia de lazo abierto:

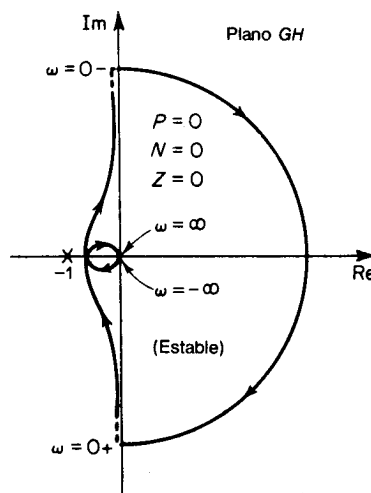
$$G(s) = \frac{K}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$$

Determine la estabilidad del sistema para dos casos:

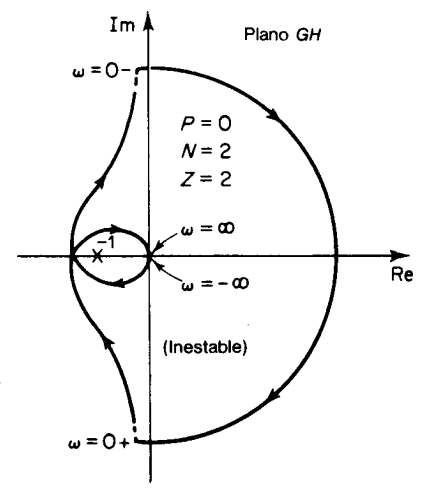
- (1) la ganancia  $K$  es pequeña,
- (2)  $K$  es grande.

En la figura aparecen los diagramas de Nyquist de la función de transferencia de lazo abierto con un valor pequeño de  $K$  y un valor grande de  $K$ .

La cantidad de polos de  $G(s)H(s)$  en el semiplano derecho del plano  $s$  es cero. Por lo tanto, para que este



K pequeña



K grande

sistema sea estable, es necesario que  $N = Z = 0$  o que el lugar de  $G(s)H(s)$  no rodee al punto  $-1 + j0$ .

Para valores pequeños de  $K$ , no hay rodeo al punto  $-1 + j0$ . Por lo tanto, el sistema es estable.

Para valores grandes de  $K$ , el lugar de  $G(s)H(s)$  rodea al punto  $-1 + j0$  dos veces en sentido horario, lo que indica dos polos en el semiplano derecho del plano  $s$  y el sistema es inestable.

Para lograr buena exactitud,  $K$  debe ser grande. Sin embargo, desde el punto de vista de la estabilidad un valor elevado de  $K$  brinda estabilidad pobre, incluso inestabilidad. Se debe hallar una solución de compromiso entre exactitud y estabilidad.

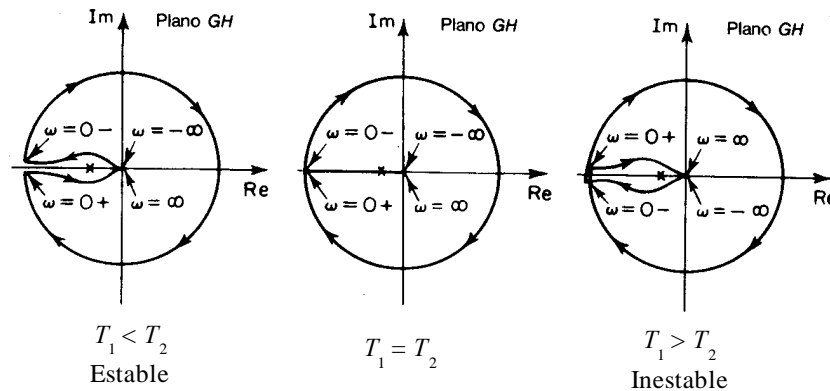
3. La estabilidad de un sistema de lazo cerrado con la siguiente función de transferencia de lazo abierto

$$G(s)H(s) = \frac{K(T_2s+1)}{s^2(T_1s+1)}$$

depende de las magnitudes relativas de  $T_1$  y  $T_2$ .

Trace los diagramas de Nyquist y determine la estabilidad del sistema.

En la figura se muestran diagramas de  $G(s)H(s)$  para tres casos,  $T_1 < T_2$ ,  $T_1 = T_2$ , y  $T_1 > T_2$ .



Para  $T_1 < T_2$ , el lugar de  $G(s)H(s)$  no rodea al punto  $-1 + j0$ , y el sistema de lazo cerrado es estable.

Para  $T_1 = T_2$ , el lugar de  $G(s)H(s)$  pasa por el punto  $-1 + j0$ , lo que indica que los polos de lazo cerrado están ubicados sobre el eje  $j\omega$ .

Para  $T_1 > T_2$ , el lugar de  $G(s)H(s)$  rodea al punto  $-1 + j0$  dos veces en sentido horario. Entonces, el sistema de lazo cerrado tiene dos polos de lazo cerrado en el semiplano derecho del plano  $s$ , el sistema es inestable.

4. Considere el sistema de lazo cerrado con la siguiente función de transferencia de lazo abierto

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(Ts-1)}$$

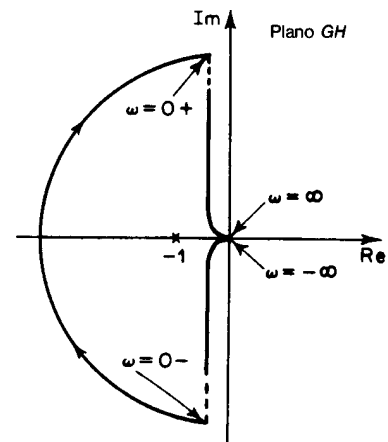
Determine la estabilidad del sistema.

La función  $G(s)H(s)$  tiene un polo ( $s = 1/T$ ) en el semiplano derecho del plano  $s$ . Por tanto,  $P = 1$ .

El diagrama de Nyquist de la figura indica que el punto  $-1 + j0$  es rodeado una vez en sentido horario por la gráfica de  $G(s)H(s)$ .

Entonces  $N = 1$ . Como  $Z = N + P$ , resulta que  $Z = 2$ .

Esto significa que el sistema de lazo cerrado tiene dos polos de lazo cerrado en el semiplano derecho del plano  $s$  y es inestable.

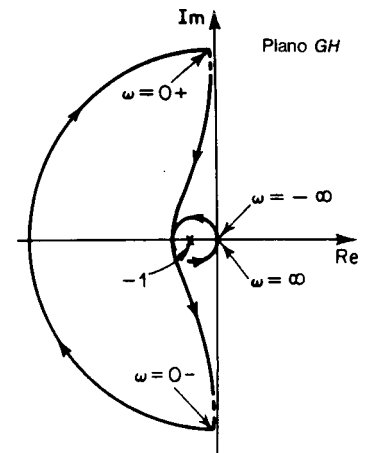


5. Determine la estabilidad de un sistema de lazo cerrado que tiene la siguiente función de transferencia de lazo abierto:

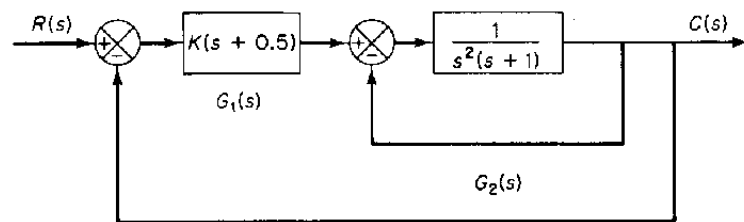
$$G(s)H(s) = \frac{K(s+3)}{s(s-1)}$$

La función de transferencia de lazo abierto tiene un polo ( $s = 1$ ) en el semiplano derecho del plano  $s$ , o sea  $P = 1$ . El sistema de lazo abierto es inestable.

El diagrama de Nyquist que se ve en la figura indica que el punto  $-1 + j0$  es rodeado por la gráfica de  $G(s)H(s)$  una vez en sentido antihorario. Por lo tanto,  $N = -1$ . Entonces, se determina que  $Z = N + P$  es igual a cero, lo que indica que no hay ceros de  $1 + G(s)H(s)$  en el semiplano derecho del plano  $s$ , y el sistema de lazo cerrado es estable. Este es uno de los ejemplos donde un sistema inestable de lazo abierto se vuelve estable cuando se cierra el lazo.



6. Considere el sistema de control de la figura, que incluye dos lazos.



Se pide determinar el rango de ganancia  $K$  que hace al sistema estable utilizando el criterio de estabilidad de Nyquist. (La ganancia  $K$  es positiva).

Para examinar la estabilidad del sistema de control, hay que trazar el lugar de Nyquist de  $G(s)$ , donde

$$G(s) = G_1(s)G_2(s)$$

Sin embargo, en este punto no se conocen los polos de  $G(s)$ . Por lo tanto, hay que examinar el lazo menor por posible presencia de polos en el semiplano positivo del plano  $s$ . Esto es fácil de realizar utilizando el criterio de estabilidad de Routh. Como:

$$G_2(s) = \frac{1}{s^3 + s^2 + 1}$$

La tabla de Routh es:

$s^3$	1	0	0
$s^2$	1	1	0
$s$	-1	0	0
$s^0$	1	0	0

Nótese que hay dos cambios de signo en la primera columna. Por lo tanto, hay dos polos de  $G_2(s)$  en el semiplano derecho del plano  $s$ .

Una vez hallada la cantidad de polos de  $G_2(s)$  en el semiplano derecho del plano  $s$  se traza el diagrama de Nyquist de  $G(s)$ , donde:

$$G(s) = G_1(s)G_2(s) = \frac{K(s+0.5)}{s^3 + s^2 + 1}$$

El problema consiste en determinar el rango de ganancia  $K$  para la estabilidad. Por tanto, en lugar de trazar los diagramas de Nyquist de  $G(j\omega)$  para diversos valores de  $K$ , se dibuja el diagrama de Nyquist de  $G(j\omega)/K$ . En la figura se puede ver un diagrama de Nyquist o diagrama polar de  $G(j\omega)/K$ .

Como  $G(s)$  tiene dos polos en el semiplano derecho del plano  $s$ , se tiene que  $P_1 = 2$ . Como  $Z_1 = N_1 + P_1$ , para la estabilidad se requiere que  $Z_1 = 0$  o  $N_1 = -2$ .

Es decir, el diagrama de Nyquist de  $G(j\omega)/K$  debe rodear al punto  $-1 + j0$  dos veces en sentido anti horario. De la figura se ve que, si el punto crítico queda entre 0 y  $-0.5$ , entonces el diagrama de  $G(j\omega)/K$  rodea al punto crítico dos veces en sentido antihorario. Por lo tanto, se requiere que  $-0.5K < -1$

Entonces el rango de ganancia de  $K$  por condición de estabilidad es  $2 < K$ .

