TEORÍA DE CONTROL

Tema 8. Controlabilidad y Observabilidad

La controlabilidad y la observabilidad son dos conceptos desarrollados para la representación de sistemas en espacio de estado, estos permiten caracterizar respectivamente la capacidad del control para ejercer una influencia sobre alguno sus estados y la posibilidad de extraer una información de alguno de sus estados mediante un observador. Sin embargo estos conceptos se pueden extender a otras representaciones.

Los métodos para la determinación de estas características de los sistemas varían según el tipo de sistema. En este se estudia solo lo correspondiente a los Sistemas Lineales Invariantes en el tiempo (LTI).

Controlabilidad

La controlabilidad es una característica de un sistema, generalmente representado por un modelo en espacio de estado, que nos indica si la evolución de una o varias de sus dinámicas (estados) pueden ser modificadas por las entradas del sistema (control).

Definición

Un estado x_i es controlable en t_0 siempre que se pueda determinar una entrada $u(t)$ que conduzca todo estado inicial $x_i(t_0)$ hacia 0 en un tiempo $t_0 \le t_1 \le t_f$.

Si esta propiedad se cumple $\forall\ t$ y $\forall\ i = 1,\cdots n$ entonces se dice que el sistema es completamente controlable.

Notas:

- Si un sistema no es completamente controlable entonces para algunas condiciones iniciales no existe ninguna entrada capaz de llevar el sistema al origen.

- La controlabilidad es una noción de suma importancia puesto que nos permite determinar si es posible controlar un sistema para modificar su comportamiento (estabilización de un sistema inestable, modificación de las dinámicas propias del sistema). Y es por ello que es fundamental en la teoría de la síntesis de controladores en espacio de estado.

Criterio de Controlabilidad (Kalman)

Este es un criterio que permite definir si los estados de un sistema LTI son controlables, considerando para ello las matrices A y B del sistema.

Un sistema LTI representado por la ecuación de estado,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

donde $A \in R^{n\times n}$, $B \in R^{n\times m}$, es controlable si y solo si la matriz de controlabilidad $\mathcal{C}$ tiene rango n,

$$\mathrm{rango}(\mathcal{C}) = \mathrm{rango}([B \ \vdots\ AB \ \vdots \cdots \vdots\ A^{n-1}B]) = n$$

Nota. La controlabilidad de un sistema de matrices características A y B se denominara controlabilidad del par A, B.

Rango de una matriz.

El rango de una matriz se define como el número máximo de vectores líneas (o columnas) linealmente independientes.
Este se puede calcular mediante la dimensión del más grande de los menores principales no nulos de la matriz.

Ejemplo 1. Para el sistema mecánico estudiado en el ejemplo 6 del tema 3:

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t) \qquad\qquad x(t_0) = x_0$$
$$y = Cx(t)$$

Con:

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{K}{M} & -\frac{C}{M}\end{bmatrix};\quad B=\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{M}\end{bmatrix};\quad C=[1\quad 0]$$

La matriz de controlabilidad es:

$$\mathcal{C}=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{M}\\ \frac{1}{M} & -\frac{C}{M^2}\end{bmatrix}$$

Como:

$$|\mathcal{C}|=-\frac{1}{M^2}\neq 0\ \Rightarrow \operatorname{rango}(\mathcal{C})=2$$

Y como $n=2$, entonces esta representación de estado del sistema es controlable.

Ejemplo 2. Para el sistema térmico estudiado en el ejemplo 8 del tema 3:

$$A=\begin{bmatrix}-\frac{1}{R_1C_C}-\frac{1}{R_2C_C} & \frac{1}{R_2C_C} & 0\\ \frac{1}{R_2C_V} & -\frac{1}{R_2C_V}-\frac{1}{R_3C_V} & \frac{1}{R_3C_V}\\ 0 & \frac{1}{R_3C_{Hg}} & -\frac{1}{R_3C_{Hg}}\end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix};\ C=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Y considerando los valores siguientes: $R_1=R_2=R_3=1; C_c=C_V=C_{Hg}=1$
Obtenemos las matrices siguientes para el cálculo de la matriz de controlabilidad:

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix};AB=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix};A^2B=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\-4\\1\end{bmatrix}$$

La matriz de controlabilidad será entonces:

$$\mathcal{C}=\begin{bmatrix}1 & -2 & 5\\ 0 & 1 & -4\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

Como: $\det\mathcal{C}=1\neq 0\ \Rightarrow \operatorname{rango}(\mathcal{C})=3$ entonces esta representación de estado del sistema es controlable.

Ejemplo 3. : Para el sistema representado por las matrices A y B siguientes:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

Calculamos las matrices que permiten determinar la matriz de controlabilidad:

$$AB=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$A^2B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

La matriz de controlabilidad es entonces:

$$\mathcal{C}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

La matriz de controlabilidad tiene rango 2, puesto que las dos últimas líneas son idénticas, y por tanto solo se pueden determinar menores principales diferentes de cero de dimensión 2. Por lo tanto esta representación de estado **No es Controlable.**

Nota: No se requiere la construcción de la matriz de controlabilidad $\mathcal{C}$ más allá de la dimensión $n \times n$.

Observabilidad

La observabilidad es una característica estructural complementaria de una representación de estado de un sistema, o del sistema en sí mismo, que nos indica la capacidad de poder estimar los valores históricos de un estado partiendo del conocimiento de las variables de salida y entrada del sistema.

Definición

Un estado x_i es observable en t_0 siempre que sea posible determinar $x_i(t_0)$ conociendo a $y(t)$.

Si esta propiedad se cumple $\forall\, t$ y $\forall\, i = 1,\cdots,n$ entonces el sistema es completamente observable.

Nota: La noción de observabilidad es crucial para los sistemas donde es imposible medir la totalidad del vector de estado, y en consecuencia se requiere de la estimación de este a partir de las variables de salida.

Criterio de Observabilidad (Kalman)

La determinación de la observabilidad de un sistema LTI depende de las matrices A y C del sistema.

Un sistema LTI representado por la ecuación dinámica de estado y la ecuación de salida:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t)$$

Donde $A \in R^{n\times n}$, $C \in R^{r\times n}$, es observable si y solo si la matriz de observabilidad $\mathcal{O}$ tiene rango n:

$$\text{rango}(\mathcal{O}) = \text{rango}\left(\begin{bmatrix} C \\ \cdots \\ CA \\ \cdots \\ \vdots \\ \cdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}\right) = n$$

Ejemplo 4. Para el sistema mecánico estudiado en el ejemplo 1, donde:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{K}{M} & -\dfrac{C}{M} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{M} \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz de observabilidad es:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como $|\mathcal{O}| = 1 \neq 0$ el rango de $\mathcal{O} = 2$ por lo tanto el sistema es observable.

Ejemplo 5: para el sistema térmico estudiado en el ejemplo 2, donde:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se calculan las matrices necesarias para la determinación de la matriz de observabilidad:

$$CA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$
$$CA^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz de observabilidad es:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Como $|\mathcal{O}| = 1 \neq 0$ el rango de $\mathcal{O} = 3$ por lo tanto el sistema es observable.

Dualidad

Se dice que las propiedades de Observabilidad y Controlabilidad son dos nociones duales, puesto que son propiedades intercambiables para sistemas duales adjuntos. Para explicar esto consideremos dos sistemas S y S^* definidos de la siguiente manera:

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t) \qquad\qquad \dot{x}^* = A^T x^*(t) + C^T u^*(t)$$
$$y = Cx(t) \qquad\qquad y^* = B^T x^*(t)$$

S^* se denomina sistema dual adjunto de S, puesto que está hecho con las mismas matrices pero transpuestas e intercambiando la posición e C y B.

Se puede demostrar que S es controlable si y solo si S^* es observable y que S es observable si y solo si S^* es controlable.

De hecho S^* es observable si y solo si:

$$[\, B^T \vdots\ B^T A^T \vdots\ B^T (A^T)^2 \vdots \ldots \vdots\ B^T (A^T)^{n-1} \,]^T$$

Tiene rango n, es decir si y solo si

$$[\, B \vdots\ AB \vdots\ A^2 B \vdots \ldots \vdots\ A^{n-1} B \,]^T$$ O sea que S sea controlable.

Teoría de la realización

Se denomina realización de una matriz de transferencia $G(s) \in \mathbb{C}^{r \times m}$, a toda representación de estado (A, B, C, D) obtenida con la expresión:

$$G(s) = C(s1 - A)^{-1}B + D$$

Cuando la realización (A, B, C, D) tiene un orden mínimo n $(x \in R^n)$ esta se denomina realización mínima o irreductible. El ejemplo siguiente muestra como la obtención de una realización influye notoriamente en las propiedades de observabilidad y controlabilidad del modelo en espacio de estado obtenido.

Ejemplo 6. Consideremos la función e transferencia:

$$G(s) = \frac{s + 1}{s^2 + 3s + 2} = \frac{s + 1}{(s + 1)(s + 2)} = \frac{1}{s + 2}$$

Dependiendo de si se utiliza la función de transferencia simplificada o no, se pueden obtener las cuatros realizaciones siguientes para $G(s)$.

- No observable y no controlable:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C_1 = [0 \quad 1]$$

- Observable y no controlable:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C_2 = [0 \quad 1]$$

- Controlable y no observable :

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C_3 = [1 \quad 1]$$

- Observable y controlable:

$$A_4 = [-2] \quad B_4 = [1] \quad C_4 = [1]$$

Se observa que la cuarta realización es mínima mientras que las otras tres no lo son.

El ejemplo muestra que por un lado las representaciones de estado no son equivalentes entre sí, y por otro lado que la simplificación de un polo con un cero está estrechamente a las propiedades de observabilidad y controlabilidad de la realización obtenida.

De esto se deduce que: Une realización de estado (A, B, C, D) de $G(s)$ es mínima si y solo si esta es observable y controlable.

Formas canónicas de representación de estado

El hecho de disponer de diferentes representaciones de estado para un mismo sistema, dado que el vector de estado no es único (ver no unicidad del conjunto de variables de estado en tema 3), es una ventaja sustancial de la representación de estado pues permite utilizar formas particulares de la misma, denominadas formas canónicas, cada una de las cuales presentan ciertas ventajas.

Mencionaremos aquí tres de las forma canónicas conocidas:
- La forma diagonal o cuasi-diagonal de Jordan.
- La forma de controlabilidad.
- La forma de observabilidad.

Forma Modal o Diagonal de Jordan.

En el caso de una función de transferencia de orden n, estrictamente propia, que posee polos $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ reales y diferentes (matriz $A \in R^{n\times n}$ con n valores propios distintos), se puede descomponer la función de transferencia en fracciones parciales:

$$G(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + \cdots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n} = \left[c_0 + \frac{c_1}{s-\lambda_1} + \frac{c_2}{s-\lambda_2} + \cdots + \frac{c_n}{s-\lambda_n}\right]$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Y(s)}{\prod_{i=1}^{n}(s-\lambda_i)} = c_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{(s-\lambda_i)}$$

Y en este caso se puede obtener una realización, donde la matriz A tenga una forma diagonal:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & \cdots & c_n \end{bmatrix} \quad D = [c_0]$$

En el caso particular de polos reales conjugados, se puede realizar la siguiente transformación para obtener una matriz A de términos reales:

$$\begin{bmatrix} \alpha + i\beta & 0 \\ 0 & \alpha + i\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -i/2 \\ 1/2 & i/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}$$

Forma cuasi-diagonal de Jordan

En el caso que la función de transferencia del sistema posea polos reales repetidos $(1/(s-\lambda)^{n'})$, la realización es irreductible a un esquema paralelo, puesto que la descomposición de la función de transferencia en fracciones parciales es:

$$G(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + \cdots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n} = \left[\frac{c_1}{(s-\lambda_1)^{n'}} + \cdots + \frac{c_{n'}}{(s-\lambda_1)^{n'}} + \frac{c_{n'+1}}{s-\lambda_{n'+1}} + \cdots + \frac{c_n}{s-\lambda_n}\right]$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{N(s)}{(s-\lambda_1)^{n'} \prod_{i=n'+1}^{n}(s-\lambda_i)} = \sum_{i=1}^{n'} \frac{c_i}{(s-\lambda_1)^i} + \sum_{i=n'+1}^{n} \frac{c_i}{(s-\lambda_i)}$$

Se puede por lo tanto obtener una realización con la matriz A de la forma denominada cuasi-diagonal de Jordan:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & & \vdots \\ & & & \lambda_{n'+1} & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = [c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad \cdots \quad c_n]$$

Forma canónica de controlabilidad

En el caso de una función e transferencia estrictamente propia de orden n:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_1 s^{n-1} + \cdots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n}$$

Se puede obtener una representación de estado denominada de controlabilidad de la forma:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & \cdots & a_1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = [b_n \quad b_{n-1} \quad \cdots \quad \cdots \quad b_1]$$

Para obtener esta representación multiplicamos y dividimos la función de transferencia por una variable intermediaria $Z(s)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{(b_1 s^{n-1} + \cdots + b_n)Z(s)}{(s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n)Z(s)}$$

Estas operaciones no modifican las relaciones en el sistema, podemos escribir entonces las dos relaciones:

$$Y(s) = (b_1 s^{n-1} + \cdots + b_n)Z(s)$$
$$U(s) = (s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n)Z(s)$$

La transformada inversa de Laplace de las dos relaciones es:

$$y = b_1 D^{n-1} z + \cdots + b_n z$$
$$u = D^n z + a_1 D^{n-1} z + \cdots + a_n z$$

Si seleccionamos como variables de estado a:

$$x_1 = z$$
$$x_2 = Dz$$
$$\vdots$$
$$x_n = D^{n-1} z$$

Obtenemos entonces las ecuaciones de estado:

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = x_3$$
$$\vdots$$
$$\dot{x}_4 = -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \cdots - a_1 x_n + u$$

Y la ecuación de salida:

$$y = b_1 x_n + \cdots + b_n x_1$$

Forma canónica de observabilidad

En el caso de una función e transferencia de orden n, estrictamente propia:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_1 s^{n-1} + \cdots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n}$$

Se puede obtener una representación de estado llamada forma canoníca de observabilidad de la forma:

$$A=\begin{bmatrix}-a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ -a_2 & 0 & 1 & & 0\\ -a_3 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & & \ddots & 1\\ -a_n & 0 & \cdots & \cdots & 0\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\\ 0\\ b_n\end{bmatrix}$$
$$C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}$$

Para obtener esta realización se considera la ecuación diferencial original del sistema:

$$D^n y + a_1 D^{n-1} y + \cdots + a_{n-1} D y + a_n y = b_1 D^{n-1} u + \cdots + b_{n-1} D u + b_n u$$

La cual reorganizamos de la forma siguiente:

$$D^n y + (a_1 D^{n-1} y - b_1 D^{n-1} u) + \cdots + (a_{n-1} D y - b_{n-1} D u) = b_n u - a_n y$$

Seleccionamos como variables de estado a:

$$\begin{aligned}&x_1 = y\\ &x_2 = \dot{x}_1 + a_1 y - b_1 u\\ &\vdots\\ &x_n = \dot{x}_{n-1} + a_{n-1} y - b_{n-1}\, u\end{aligned}$$

Y obtenemos una representación de estado de la forma:

$$\begin{aligned}&\dot{x}_1 = -a_1 x_1 - x_2 + b_1 u\\ &\dot{x}_2 = -a_2 x_1 - x_3 + b_2 u\\ &\vdots\\ &\dot{x}_{n-1} = -a_{n-1} y - x_n + b_{n-1}\, u\\ &\dot{x}_n = D^n y + (a_1 D^{n-1} y - b_1 D^{n-1} u) + \cdots + (a_{n-1} D y - b_{n-1} D u) = -a_n x_1 + b_n u\end{aligned}$$

Con la ecuación de salida:

$$y = x_1$$

También se puede obtener una forma canónica a partir de una realización cualquiera realizando un cambio de variable lineal.

Ejemplo 7: Obtener las realizaciones en las tres formas canónicas para el sistema representado por la ecuación diferencial siguiente:

$$D^3 y + 6 D^2 y + 11 D y + 6 y = 6u$$

La función de transferencia del sistema es:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{6}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} = \frac{6}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{c_1}{s+1} + \frac{c_2}{s+2} + \frac{c_3}{s+3}$$

Donde $c_i = \frac{(s-s_i)N(s)}{D(s)}$:

$$c_1 = \left.\frac{6(s+1)}{(s+1)(s+2)(s+3)}\right|_{s=-1} = 3;\quad c_2 = \left.\frac{6(s+2)}{(s+1)\,(s+2)(s+3)}\right|_{s=-2} = -6;\quad c_3 = \left.\frac{6(s+3)}{(s+1)(s+2)(s+3)}\right|_{s=-3} = 3$$

La representación de estado en la forma canónica de Jordan es:

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$
$$C=\begin{bmatrix}3 & -6 & 3\end{bmatrix}$$

La representación de estado en la forma canónica de controlabilidad es:

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -6 & -11 & -6\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$
$$C=\begin{bmatrix}6 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

La representación de estado en la forma canónica de observabilidad es:

$$A=\begin{bmatrix}-6 & 1 & 0\\ -11 & 0 & 1\\ -6 & 0 & 0\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}0\\0\\6\end{bmatrix}$$
$$C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Ejercicios

Para las siguientes funciones de transferencia obtener las realizaciones, determinar la observabilidad y controlabilidad de las mismas y presentar las realizaciones en las tres formas canónicas estudiadas.

1. $G(s) = \frac{s^2-s-2}{s^3+10s^2+29s+20}$
2. $G(s) = \frac{s^3+10s^2+29s+20}{s^4+8s^3+23s^2+28s+12}$
3. $G(s) = \frac{s+1}{s^4-5s^2+4}$
4. $G(s) = \frac{s+1}{s^3+11s^2+36s+36}$
5. $G(s) = \frac{s^2-s-2}{s^4-5s^2+4}$
6. $G(s) = \frac{s+1}{s^4+8s^3+23s^2+28s+12}$