TEORÍA DE CONTROL

Tema 9. Acciones de Control

Introducción

Un controlador tiene como tarea la de mantener la variable controlada en correspondencia muy próxima con la señal de referencia, eliminando la influencia de las perturbaciones que tienden a cambiar el valor de la variable controlada.
La acción de control de un controlador se define como la relación entre el error en la señal de salida ($e(t)$) y la señal actuante ($m(t)$). En otras palabras es la función de transferencia del controlador:

$$F(s)=\frac{M(s)}{E(s)} \text{ ó en el dominio del tiempo } f(t)=\frac{m(t)}{e(t)}$$

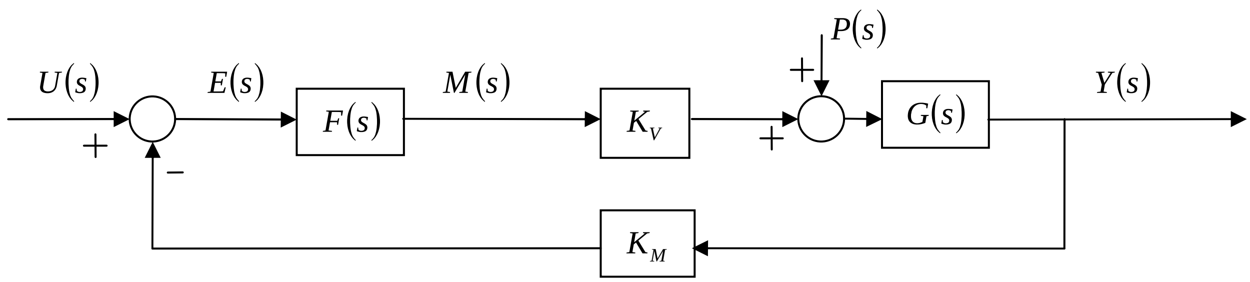


Diagrama de bloques típico de un sistema de control retroalimentado

Tipos de acción de control

Existen múltiples formas de acción de control, cuyo tipo depende de la forma de obtención de la ley de control. Sin embargo existen unos tipos básicos de acción de control que se usan comúnmente en procesos industriales y que son:

1. Acción de control discontinua o de dos posiciones (ON-OFF).
2. Acción de control proporcional.
3. Acción de control derivativa.
4. Acción de control integral.

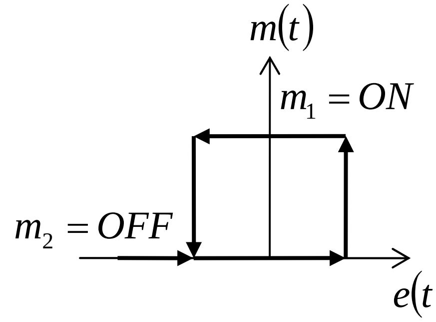
En la práctica los controles integral y derivativo no se pueden usar solos, por lo tanto estos se suelen usar en combinación con otras, y se obtienen las siguientes acciones de control posibles:

5. Acción de control proporcional más derivativa.
6. Acción de control proporcional más integral.
7. Acción de control proporcional más integral más derivativa.

1. Acción de control discontinua o de dos posiciones (ON-OFF)

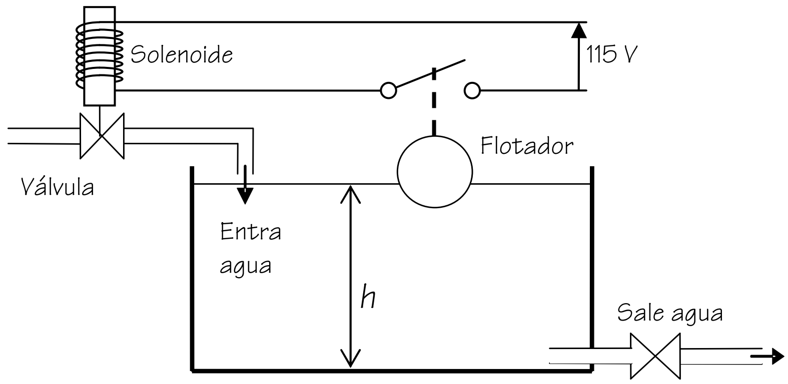
En este tipo de acción de control el controlador adopta solo dos posiciones, que por lo general es abierto y cerrado (conectado o desconectado). Dicho de otra forma la señal actuante del controlador ($m(t)$) se mueve entre dos límites requeridos para que la variable controlada oscile entre dos valores dados.

$$m(t)=m_1 \text{ para } e(t)>0$$
$$m(t)=m_2 \text{ para } e(t)<0$$

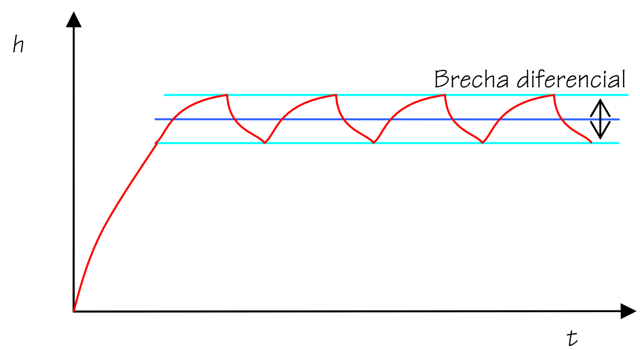


En la práctica un controlador discontinuo debe tener una zona muerta o histéresis (brecha diferencial). Esta zona muerta se debe minimizar para mantener el error pequeño pero debe estar para evitar que se produzcan oscilaciones.

Por ejemplo un control de nivel eléctrico:



La presencia de la brecha diferencial produce un error entre el valor deseado (nivel deseado en el ejemplo) y el valor real de la variable (nivel real en el ejemplo). Pero esta es necesaria para evitar conexiones y desconexiones muy cercanas en tiempo.



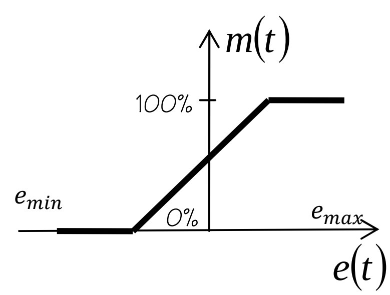
Es por esto que a brecha diferencial se debe ajustar dependiendo de la exactitud deseada, de la frecuencia de conexión y desconexión del elemento final de control (válvula solenoide) y de los valores a obtener.

2. Acción de control proporcional (P)

Un control proporcional tiene una salida que es proporcional al error:

$$m(t) = K_P e(t) \text{ ó } F(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = K_p$$

Donde K_P es la ganancia del controlador proporcional.



Este es esencialmente un amplificador de ganancia y se usa cuando se quiere un control lineal en una región del error.
Para errores negativos grandes la salida del controlador es cero (0%) o un valor mínimo y para errores positivos la salida será el valor máximo (100%), y en la mayoría de los controladores estos valores máximos y mínimos son ajustables.
En cierta forma es similar al controlador ON-OFF solo que en vez de una zona muerta posee una región de respuesta lineal.

Banda Proporcional

La acción de control proporcional se puede expresar mediante el concepto de banda proporcional, la cual se define como el inverso de K_P expresado en porcentaje:

$$B_P = \frac{100}{K_P}$$

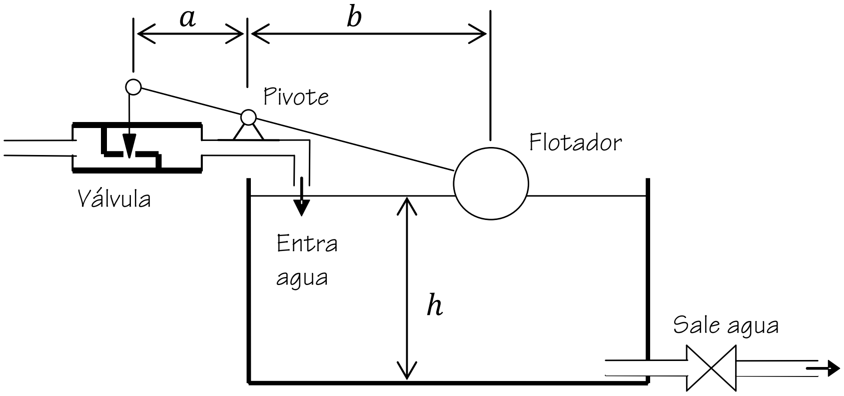
Esta se puede entender como el cambio necesario en el error (expresado en porcentaje del valor máximo de la variable controlada) para que se produzca un cambio del 100% en la salida del controlador. Para que la salida del controlador pase de su valor mínimo (totalmente cerrado) a su valor máximo (totalmente abierto).

La banda proporcional deseada es de 100%, si esta es menor (ganancia grande) entonces el instrumento se hace muy sensible lo que produce que el sistema entre en ciclage (similar a un sistema ON-OFF con una zona muerta pequeña). Si la banda proporcional es muy grande entonces el sistema es muy lento.

Características de la acción proporcional

- La conexión física directa entre el error y la acción de control produce una respuesta rápida y estable.
- Los sistemas con acción de control proporcional al introducirles una perturbación sostenida (rampa) nunca llevan la variable controlada al valor deseado, se produce un error en estado estable (OFF-SET)

Por ejemplo un control de nivel mecánico:



3. Acción de control derivativa (D)

La salida de un controlador con acción de control derivativa es proporcional a la rata de cambio del error:

$$m(t) = K_D \frac{de(t)}{dt} \text{ ó } F(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = K_D s$$

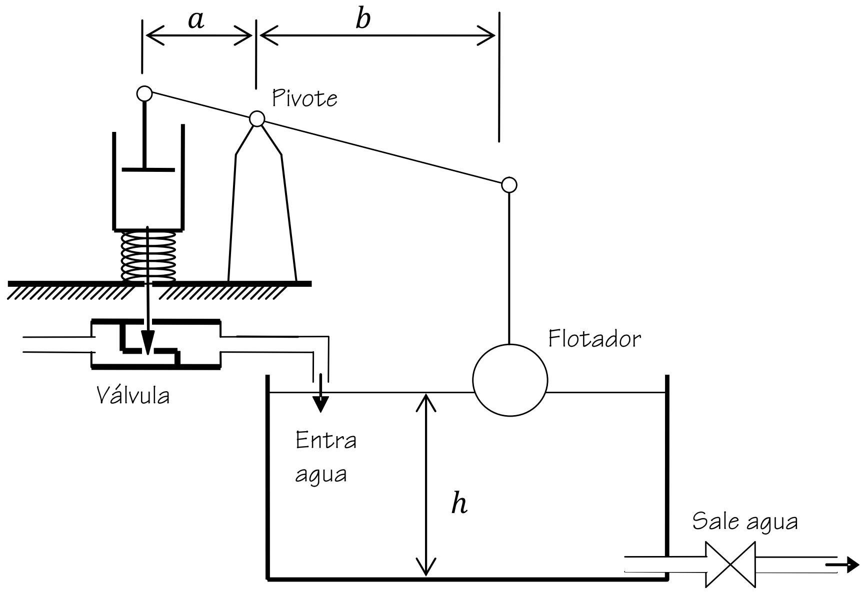
Donde K_D es la constante de acción integral.

En otras palabras la salida del controlador varía en proporción a la velocidad de cambio del error, si el error es constante no se produce ninguna acción de control.

Características de la acción de control derivativa

- No tiene noción alguna del error de la variable en estado estable. Si el error no cambia no hay acción de control. Por lo tanto no se puede usar sola.
- Se produce un adelanto de la acción de control, si la variable controlada cambia rápidamente la acción correctora es rápida y de gran amplitud, por lo que el sistema de control actúa rápidamente antes de que el error sea grande. Por supuesto la acción de control no puede anticipar a un error que aún no se ha producido.
- Amplifica las señales de ruido.
- Produce un efecto de saturación en el actuador.

Por ejemplo un control de nivel mecánico con amortiguador



4. Acción de control integral (I)

El controlador integral tiene una salida que es proporcional a la integral del error:

$$m(t) = K_I \int_0^t e(t)dt \text{ ó } F(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = \frac{K_I}{s}$$

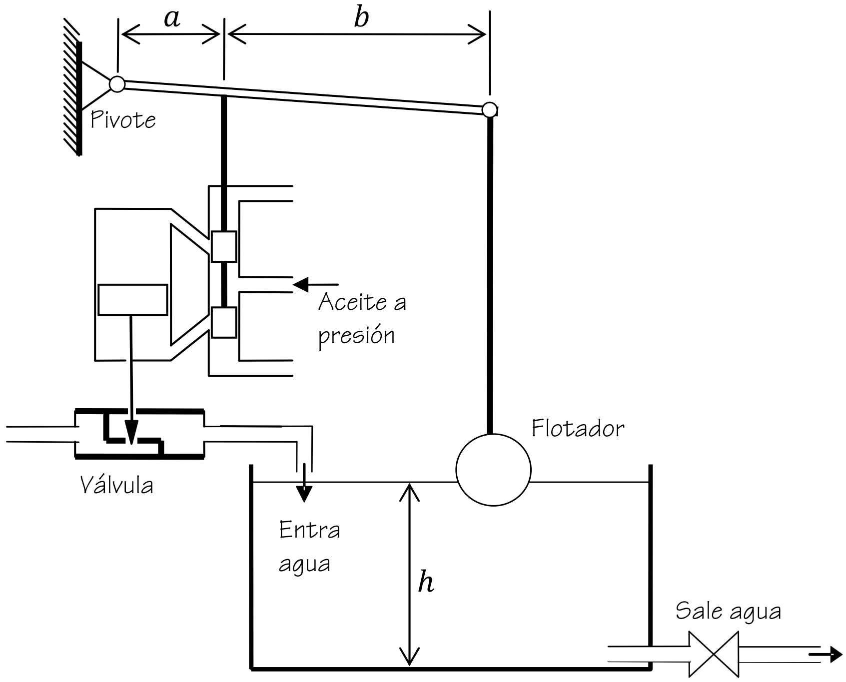
Donde K_I es la constante de acción integral.

En otras palabras la velocidad de la salida del controlador es proporcional al error o la rata de cambio de la salida del controlador es proporcional al error. Por lo cual la tendencia es a minimizar el error.

Características de la acción integral

- Es relativamente lenta debido a la conexión elástica entre los elementos de control. Por lo cual no se usa solo.
- No permite error en estado estable.
- Tiende a sobre corregir el error, por lo cual es posible que vuelva oscilatorio al sistema. De hecho aumenta el orden del mismo.

Por ejemplo un control de nivel hidráulico



5. Control proporcional más derivativa (PD)

La salida del controlador es proporcional al error y a su derivada:

$$m(t) = K_P e(t) + K_D \frac{de(t)}{dt} \text{ ó } F(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = K_P + K_D s$$

Este combina las ventajas del control proporcional más el derivativo, pero se usa poco por no ser capaz de eliminar el error en estado estable.

Tiempo de acción derivativa

La ecuación de este control se puede escribir también como:

$$m(t) = K_P \left(e(t) + T_D \frac{de(t)}{dt} \right)$$

Donde $T_D = \dfrac{K_D}{K_P}$ es el tiempo de acción derivativa.

Esta se define como el cambio lineal en el error, cuando la respuesta proporcional iguale a la derivativa.
Se acostumbra expresar la acción derivativa en minutos de adelanto, que representa el tiempo en minutos con que la acción derivativa se anticipa al efecto de acción proporcional.
La principal ventaja de este control es que produce señales de adelanto que actúan rápidamente cuando la variable controlada cambia bruscamente.

6. Control proporcional más integral (PI)

En un controlador proporcional integral la salida es proporcional al error y a la integral del error:

$$m(t) = K_P e(t) + K_I \int_0^t e(t) dt \text{ ó } F(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = K_P + \frac{K_I}{s}$$

Este es un esfuerzo para combinar las ventajas del controlador proporcional más el controlador integral, es decir tiene una buena respuesta transitoria por el efecto proporcional y corrige el error en estado establo por el efecto integral.

Tiempo de acción integral

$$m(t) = K_P\left(e(t) + \frac{1}{T_I}\int_0^t e(t)dt\right)$$

Donde $T_I = \frac{K_P}{K_I}$ es el tiempo de acción integral.

Esta se define como el tiempo necesario para que la respuesta integral iguale a la proporcional después de un cambio en escalón del error.

7. Control proporcional más integral más derivativo (PID)

La salida del controlador es proporcional al error, a su derivada y a su integral:

$$m(t) = K_P e(t) + K_I\int_0^t e(t)dt + K_D\frac{de(t)}{dt} \text{ ó } F(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s$$

O expresado en función del tiempo de acción integral y derivativa:

$$m(t) = \frac{100}{BP}\left(e(t) + \frac{1}{T_I}\int_0^t e(t)dt + T_D\frac{de(t)}{dt}\right)$$

Este controlador ofrece rápida respuesta proporcional al error, mientras que tiene un reajuste automático desde la parte integral que elimina el error en estado estable. La acción derivativa permite que el controlador responda rápidamente a cambios en el error.

Generalmente en los controladores PID se puede ajustar:

- K_P en % de la banda proporcional
- T_I en minutos de acción integral
- T_D en minutos de acción derivativa

Resumen

Control	Función de transferencia	Velocidad de respuesta	Error en estado estable	Uso solo	Costo
Proporcional (P)	K_P	Media	Existe	Si	Bajo
Derivativo (D)	$K_D s$	Alta	Existe	No	Medio
Integral (I)	$\frac{K_I}{s}$	Baja	No hay	No	Medio
PI	$K_P + \frac{K_I}{s}$	Media	No hay	Si	Alto
PD	$K_P + K_D s$	Alta	Existe	Poco	Alto
PID	$K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s$	Alta	No hay	Si	Alto

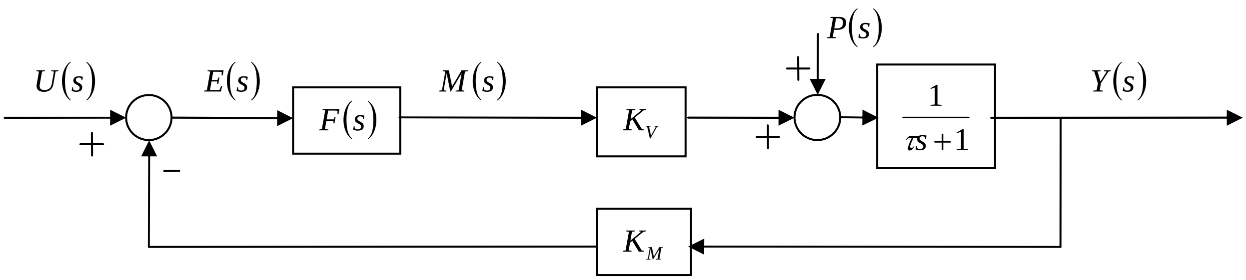
Ejemplo de estudio del efecto de una acción de control en un sistema

Se tiene un proceso que responde a una ecuación de primer orden:

$$\tau Dy + y = u$$

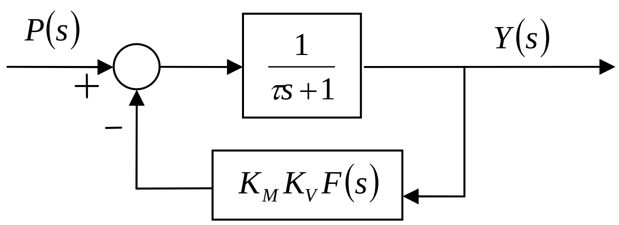
Donde la función de transferencia es:

$$G(s) = \frac{1}{\tau s + 1} \text{ o en el dominio del tiempo } g(t) = \frac{1}{\tau D + 1}$$

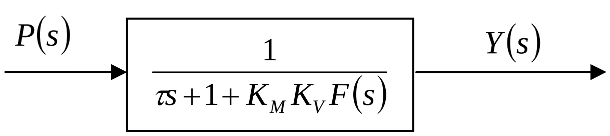


Si se supone la referencia $R(s)$ es constante, el elemento que puede afectar al sistema es la perturbación. Por tanto por comodidad podemos tomar $R(s) = 0$, esto implica que la respuesta del sistema $C(s)$ debe tender a cero para cualquier perturbación $P(s)$ en el transcurso del tiempo.

En estas condiciones puedo transformar el diagrama de bloque del sistema completo en:



Reduciendo el diagrama de bloques obtenemos:



Si el controlador es proporcional

$$F(s) = K_P$$

La función de transferencia del sistema completo será:

$$\frac{Y(s)}{P(s)} = \frac{1}{\tau s + 1 + K_M K_V K_P}$$

Donde para simplificar se puede escribir $K_M K_V K_P + 1 = K$

Luego la función de transferencia será:

$$\frac{Y(s)}{P(s)} = \frac{1}{\tau s + K}$$

Estudio de estabilidad del sistema

Vemos que el sistema es de primer orden y su ecuación característica es:

$$\tau s + K = 0$$

Este sistema tiene una sola raíz negativa:

$$s = -\frac{K}{\tau}$$

Por lo tanto el sistema es estable al igual que el proceso.

Estudio del valor en estado estable

Para este estudio utilizaremos un concepto de las transformadas de Laplace denominado teorema del valor final que dice:

$$VF = \lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

El valor en estado estable es por definición el valor que se obtendría cuando la parte transitoria de la respuesta se hace despreciable, es decir el valor de la respuesta para un tiempo suficientemente grande cercano al infinito. Por esto el valor en estado estable se puede obtener con el teorema del valor final:

$$Y_{EE} = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{Y(s)}{P(s)}P(s) = \lim_{s\to 0} \frac{sP(s)}{\tau s + K}$$

Si suponemos que la perturbación cambia bruscamente y luego se mantiene constante en el tiempo, lo cual está representado por un escalón:

$$p(t) = H \quad \Leftrightarrow \quad P(s) = \frac{H}{s}$$

El valor en estado estable será:

$$Y_{EE} == \lim_{s\to 0} \frac{sH}{(\tau s + K)s} = \frac{H}{K}$$

Según lo supuesto al principio el valor deseado para la salida en estado estable debería ser cero, puesto que nuestra señal de referencia es cero, luego este valor en estado estable indica que con este tipo de controlador se produce un error en estado estable que es igual a H/K.

Estudio de la respuesta del sistema

Para analizar la respuesta del sistema en este caso podemos escribir entonces la ecuación del mismo que será:

$$\tau Dy + Ky = H \quad \text{dividiendo por K obtenemos} \quad \frac{\tau}{K}Dy + y = \frac{H}{K}$$

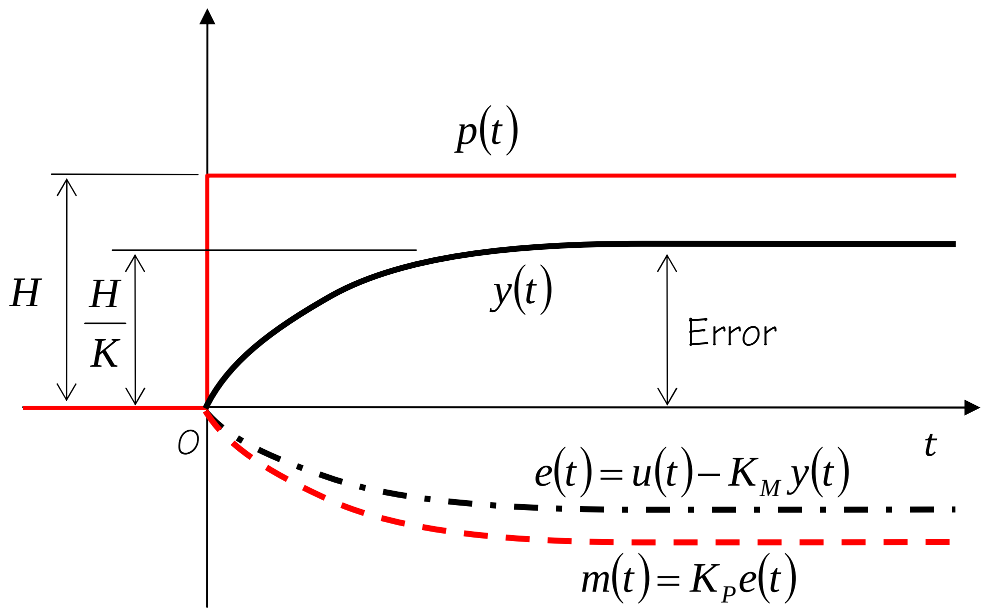
Por lo tanto el sistema es un sistema de primer orden y responde como tal. Suponiendo que en las condiciones iniciales la salida toma el valor de la señal de referencia:

$$t = 0 \quad \to \quad Y_0 = 0$$

La respuesta del sistema será de la forma:

$$y = -\frac{H}{K}e^{(-K/\tau)t} + \frac{H}{K}$$

La gráfica de la respuesta de este sistema será:



Si el controlador es proporcional mas derivativo

$$F(s)=K_P+K_D s$$

La función de transferencia del sistema completo será:

$$\frac{Y(s)}{P(s)}=\frac{1}{\tau s+1+K_M K_V(K_P+K_D s)}=\frac{1}{(\tau+K_M K_V K_D)s+1+K_M K_V K_P}$$

Donde para simplificar se puede escribir $K_M K_V K_P+1=K$ y $\tau+K_M K_V K_D=\tau_K$

Luego la función de transferencia será:

$$\frac{Y(s)}{P(s)}==\frac{1}{\tau_K s+K}$$

Estudio de estabilidad del sistema

Vemos que el sistema es de primer orden y su ecuación característica es:

$$\tau_K s+K=0$$

Este sistema tiene una sola raíz negativa:

$$s=-\frac{K}{\tau_K}$$

Por lo tanto el sistema es estable al igual que el proceso.

Estudio del valor en estado estable

El valor en estado estable se puede obtener con el teorema del valor final:

$$Y_{EE}=\lim_{s\to 0} s\frac{Y(s)}{P(s)}P(s)=\lim_{s\to 0}\frac{sP(s)}{\tau_K s+K}$$

Si suponemos que la perturbación cambia bruscamente y luego se mantiene constante en el tiempo, lo cual está representado por un escalón:

$$p(t)=H \quad \Leftrightarrow \quad P(s)=\frac{H}{s}$$

El valor en estado estable será:

$$Y_{EE} == \lim_{s\to 0}\frac{sH}{(\tau_K s + K)s} = \frac{H}{K}$$

Según lo supuesto al principio el valor deseado para la salida en estado estable debería ser cero, puesto que nuestra señal de referencia es cero, luego este valor en estado estable indica que con este tipo de controlador se produce un error en estado estable que es igual a H/K.

Estudio de la respuesta del sistema

Para analizar la respuesta del sistema en este caso podemos escribir entonces la ecuación del mismo que será:

$$\tau_K Dy + Ky = H \quad \text{dividiendo por K obtenemos} \quad \frac{\tau_K}{K}Dy + y = \frac{H}{K}$$

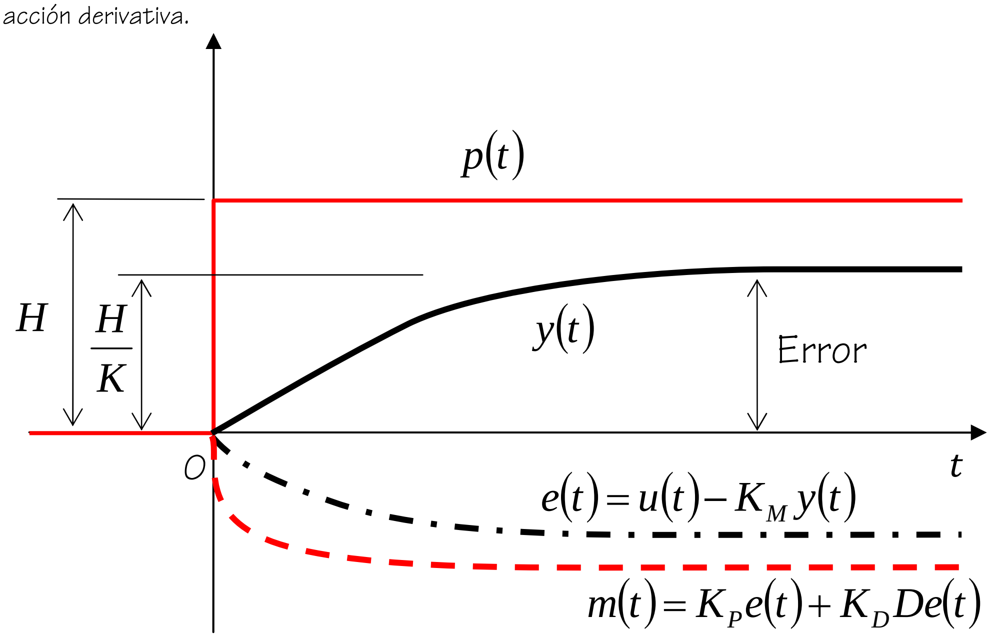
Por lo tanto el sistema es un sistema de primer orden y responde como tal. Suponiendo que en las condiciones iniciales la salida toma el valor de la señal de referencia:

$$t = 0 \quad \to \quad Y_0 = 0$$

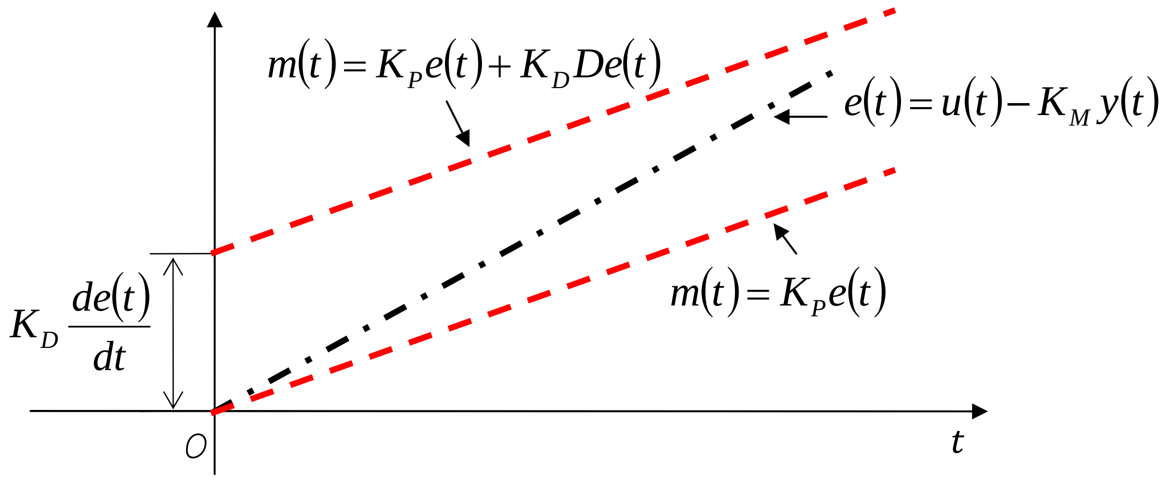
La respuesta del sistema será de la forma:

$$y = -\frac{H}{K}e^{(-K/\tau_K)t} + \frac{H}{K}$$

La gráfica de la respuesta de este sistema será casi idéntica al control proporcional, solo cambiara la duración de la etapa transitoria, que será más larga, en función del nuevo valor de la constante de tiempo, que en este caso depende del tiempo de acción derivativa.



La diferencia entre una acción de control proporcional y una proporcional derivativa, se puede apreciar más claramente si suponemos que el error varía en forma de rampa (esta suposición es meramente ilustrativa ya que en un caso real es muy difícil obtener un error variando de esta forma, en todo caso no corresponde a una perturbación variando en forma de rampa). Podemos observar si graficamos el error y la salida del controlador lo siguiente:



Si el controlador es proporcional más integral

$$F(s)=K_P+\frac{K_I}{s}$$

La función de transferencia del sistema completo será:

$$\frac{Y(s)}{P(s)}=\frac{1}{\tau s+1+K_M K_V\left(K_P+\frac{K_I}{s}\right)}=\frac{1}{\tau s+1+K_M K_V K_P+\frac{K_M K_V K_I}{s}}$$

$$\frac{Y(s)}{P(s)}==\frac{s}{\tau s^2+(1+K_M K_V K_P)s+K_M K_V K_I}$$

En este caso el sistema se vuelve de segundo orden, la función de transferencia será de la forma:

$$\frac{Y(s)}{P(s)}=\frac{\tau s}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n{}^2}$$

Donde:

$$2\xi\omega_n=\frac{(1+K_M K_V K_P)}{\tau};\ \omega_n{}^2=\frac{K_M K_V K_I}{\tau}$$

Estudio de estabilidad del sistema

Como el sistema es de segundo orden su ecuación característica es de la forma:

$$s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n{}^2=0$$

Este sistema tiene dos raíces, y la estabilidad y forma de la respuesta dependen del valor de ξ.
Se observa entonces aquí que la principal diferencia que aparece con respecto a la acción de control proporcional y derivativo es que el sistema completo es de un orden superior al proceso, luego es posible que este se vuelva oscilatorio.

Estudio del valor en estado estable

El valor en estado estable se puede obtener con el teorema del valor final:

$$Y_{EE}=\lim_{s\to 0} s\frac{Y(s)}{P(s)}P(s)=\lim_{s\to 0} s\frac{\tau s}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n{}^2}P(s)$$

Si suponemos que la perturbación cambia bruscamente y luego se mantiene constante en el tiempo, lo cual está representado por un escalón:

$$p(t) = H \quad \Leftrightarrow \quad P(s) = \frac{H}{s}$$

El valor en estado estable será:

$$Y_{EE} = \lim_{s \to 0} \frac{\tau s^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \frac{H}{s} = 0$$

Según lo supuesto al principio el valor deseado para la salida en estado estable debe ser cero, puesto que nuestra señal de referencia es cero, luego este valor en estado estable indica que con este tipo de controlador no existe error en estado estable.

Estudio de la respuesta del sistema

Para analizar la respuesta del sistema en este caso podemos escribir entonces la ecuación del mismo que será:

$$D^2 y + 2\xi\omega_n Dy + \omega_n^2 y = \tau Dp$$

$$D^2 y + 2\xi\omega_n Dy + \omega_n^2 y = \frac{K_M K_V K_I}{\omega_n^2} Dp$$

$$D^2 y + 2\xi\omega_n Dy + \omega_n^2 y = \omega_n^2 p'$$

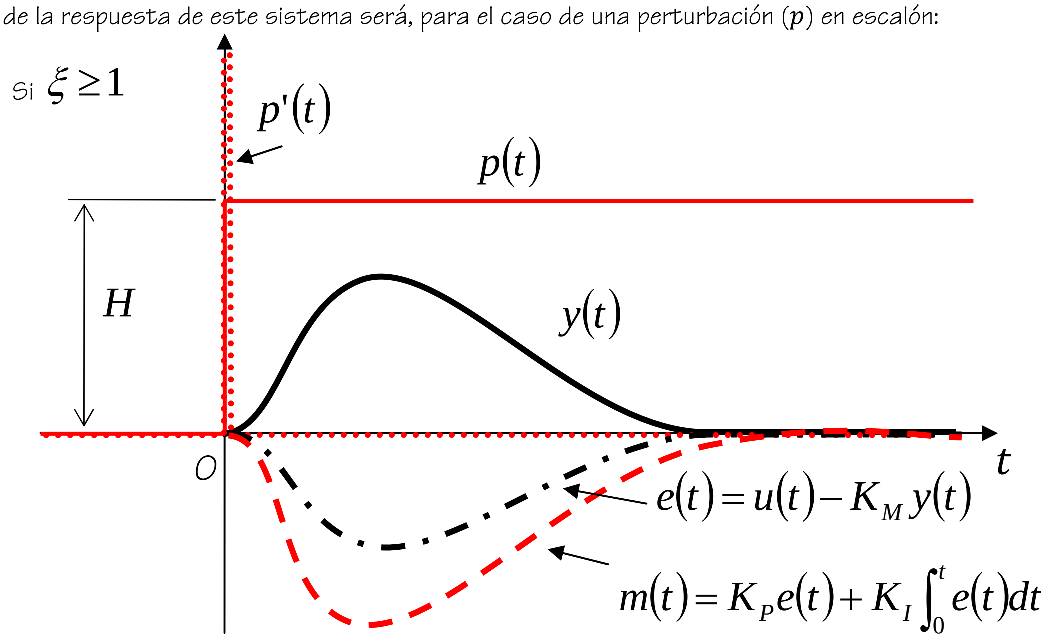
Donde: $p' = \dfrac{K_M K_V K_I}{\omega_n^4} Dp$

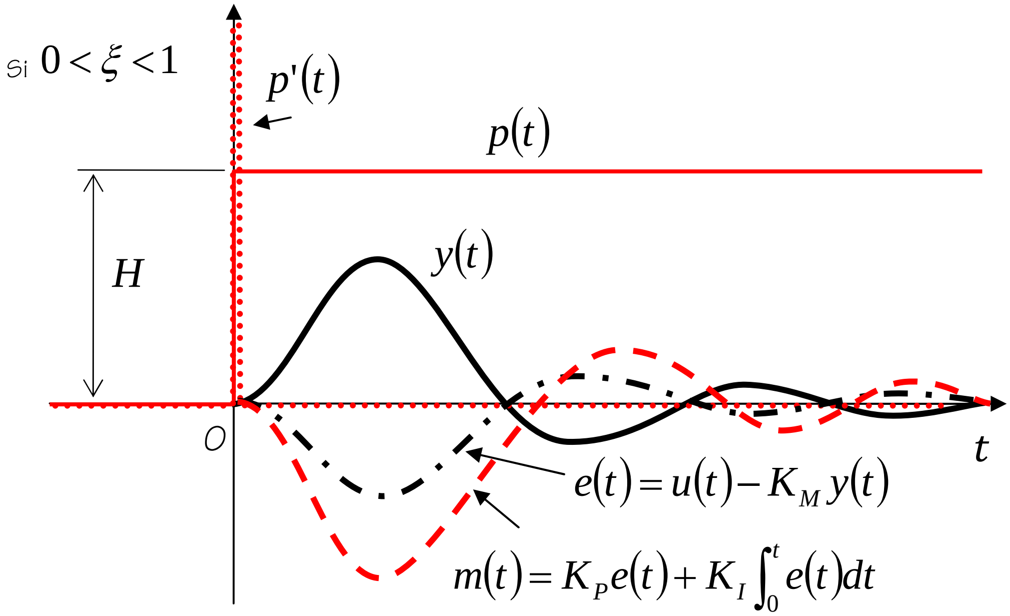
Por lo tanto el sistema es un sistema de segundo orden y responde como tal. Suponiendo que en las condiciones iniciales la salida toma el valor de la señal de referencia:

$$t = 0 \quad \rightarrow \quad Y_0 = 0$$

La respuesta del sistema podrá tomar cualquiera de las cuatro formas posibles en sistemas de segundo orden

La gráfica de la respuesta de este sistema será, para el caso de una perturbación (p) en escalón:





Si el controlador es proporcional más integral más derivativo

$$F(s)=K_P+\frac{K_I}{s}+K_D s$$

La función de transferencia del sistema completo será:

$$\frac{Y(s)}{P(s)}=\frac{1}{\tau s+1+K_M K_V\left(K_P+\frac{K_I}{s}+K_D s\right)}=\frac{1}{\tau s+1+K_M K_V K_P+\frac{K_M K_V K_I}{s}+K_M K_V K_D s}$$

$$\frac{Y(s)}{P(s)}=\frac{s}{(\tau+K_M K_V K_D)s^2+(1+K_M K_V K_P)s+K_M K_V K_I}$$

En este caso el sistema se vuelve de segundo orden, la función de transferencia será de la forma:

$$\frac{Y(s)}{P(s)}=\frac{(\tau+K_M K_V K_D)s}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n{}^2}$$

Donde:

$$2\xi\omega_n=\frac{(1+K_M K_V K_P)}{(\tau+K_M K_V K_D)};\ \omega_n{}^2=\frac{K_M K_V K_I}{(\tau+K_M K_V K_D)}$$

Estudio de estabilidad del sistema

Como el sistema es de segundo orden su ecuación característica es de la forma:

$$s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n{}^2=0$$

Este sistema tiene dos raíces, y la estabilidad y forma de la respuesta dependen del valor de ξ.
Se observa entonces aquí que la principal diferencia que aparece con respecto a la acción de control proporcional más integral es que el radio de amortiguamiento y la frecuencia natural son diferentes, por lo cual la parte transitoria será probablemente más corta y la respuesta estará más cerca del valor deseado.

Sin embargo al afectar el valor del radio de amortiguamiento esta acción podría hacer tender al sistema hacia la inestabilidad si este valor se acerca mucho a cero, por lo cual se debe tener cuidado con la calibración del tiempo de acción integral.

Estudio del valor en estado estable

El valor en estado estable se puede obtener con el teorema del valor final:

$$Y_{EE} = \lim_{s\to 0} s\frac{Y(s)}{P(s)}P(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{(\tau + K_M K_V K_D)s}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^{\ 2}}P(s)$$

Si suponemos que la perturbación cambia bruscamente y luego se mantiene constante en el tiempo, lo cual está representado por un escalón:

$$p(t) = H \quad \Leftrightarrow \quad P(s) = \frac{H}{s}$$

El valor en estado estable será:

$$Y_{EE} = \lim_{s\to 0} s\frac{(\tau + K_M K_V K_D)s}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^{\ 2}}\frac{H}{s} = 0$$

Según lo supuesto al principio el valor deseado para la salida en estado estable debe ser cero, puesto que nuestra señal de referencia es cero, luego este valor en estado estable indica que con este tipo de controlador no existe error en estado estable.

Estudio de la respuesta del sistema

Para analizar la respuesta del sistema en este caso podemos escribir entonces la ecuación del mismo que será:

$$D^2y + 2\xi\omega_n Dy + \omega_n^{\ 2}y = (\tau + K_M K_V K_D)Dp$$

$$D^2y + 2\xi\omega_n Dy + \omega_n^{\ 2}y = \frac{K_M K_V K_I}{\omega_n^{\ 2}}Dp$$

$$D^2y + 2\xi\omega_n Dy + \omega_n^{\ 2}y = \omega_n^{\ 2}p'$$

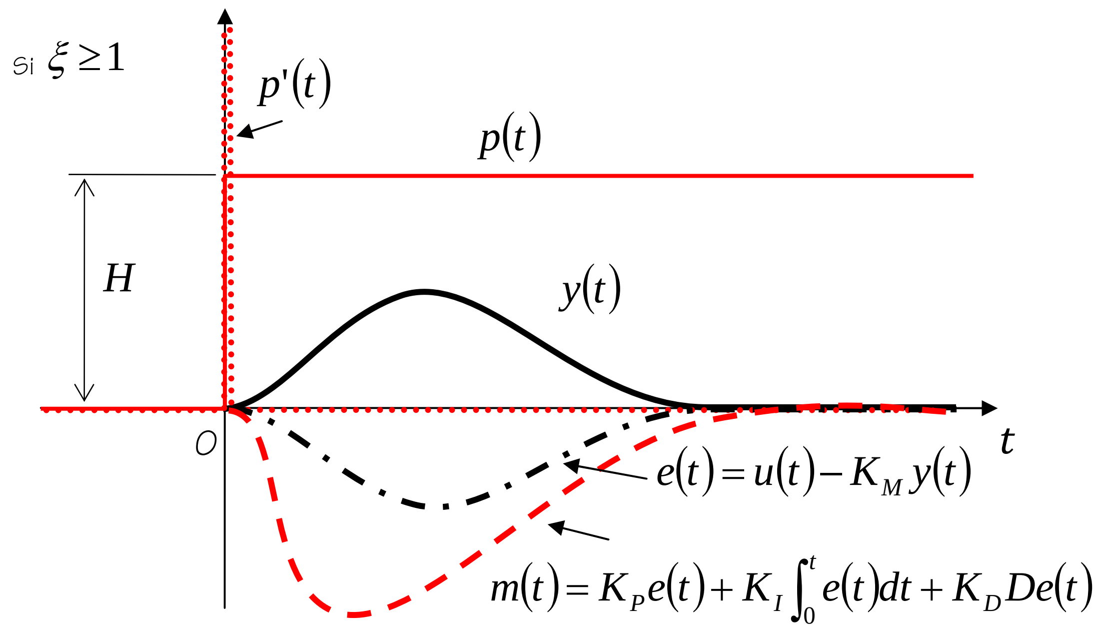
Donde: $p' = \dfrac{K_M K_V K_I}{\omega_n^{\ 4}}Dp$

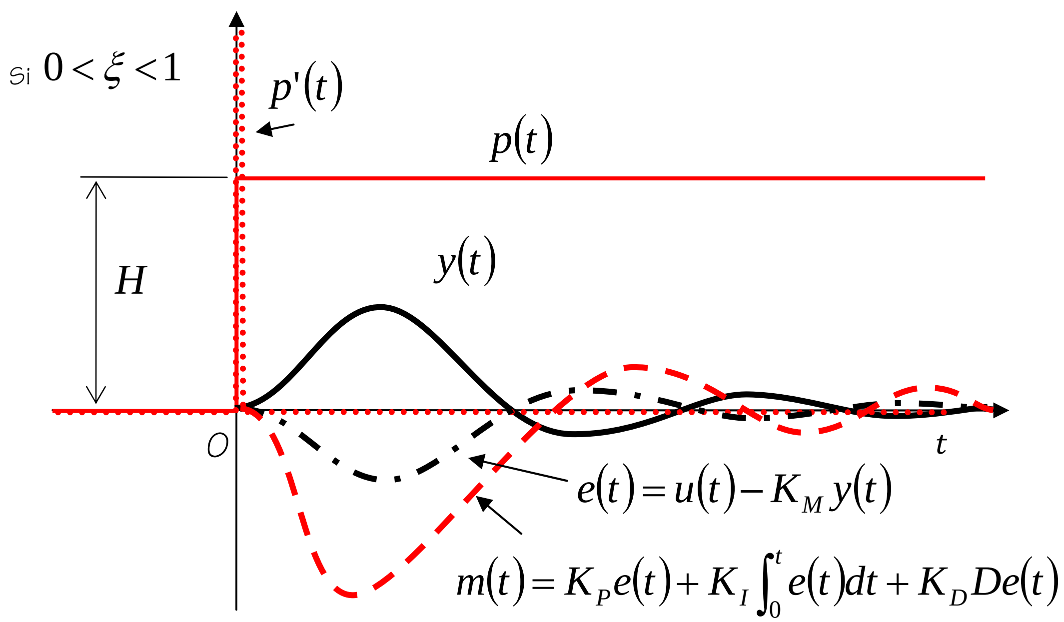
Por lo tanto el sistema es un sistema de segundo orden y responde como tal. Suponiendo que en las condiciones iniciales la salida toma el valor de la señal de referencia:

$$t = 0 \quad \rightarrow \quad Y_0 = 0$$

La respuesta del sistema podrá tomar cualquiera de las cuatro formas posibles en sistemas de segundo orden

La gráfica de la respuesta de este sistema será, para el caso de una perturbación (p) en escalón:


Si $\xi \geq 1$
$p'(t)$
$p(t)$
H
$y(t)$
O
t
$e(t) = u(t) - K_M y(t)$
$m(t) = K_P e(t) + K_I \int_0^t e(t)dt + K_D De(t)$


Si $0 < \xi < 1$
$p'(t)$
$p(t)$
H
$y(t)$
O
t
$e(t) = u(t) - K_M y(t)$
$m(t) = K_P e(t) + K_I \int_0^t e(t)dt + K_D De(t)$