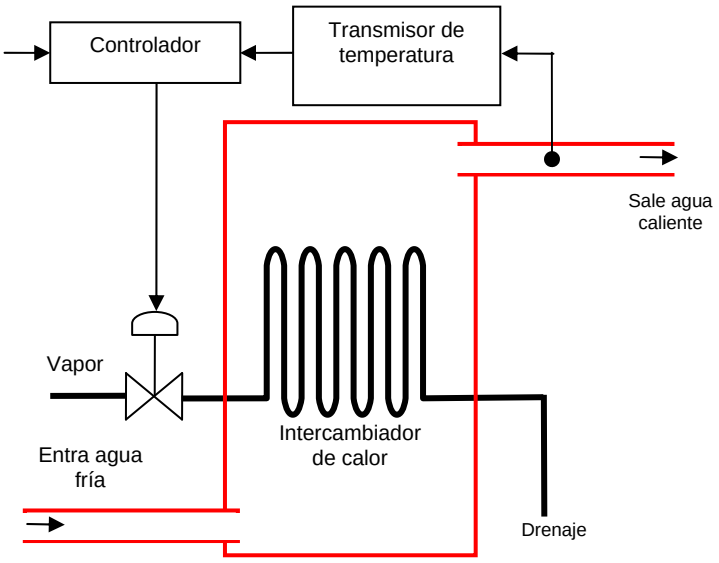
ULA. FACULTAD DE INGENIERIA.
ESCUELA DE MECANICA.
TEORIA DE CONTROL.

EJERCICIOS TEMA 1

1. La siguiente figura muestra el esquema del sistema de control de un calentador de agua a vapor.

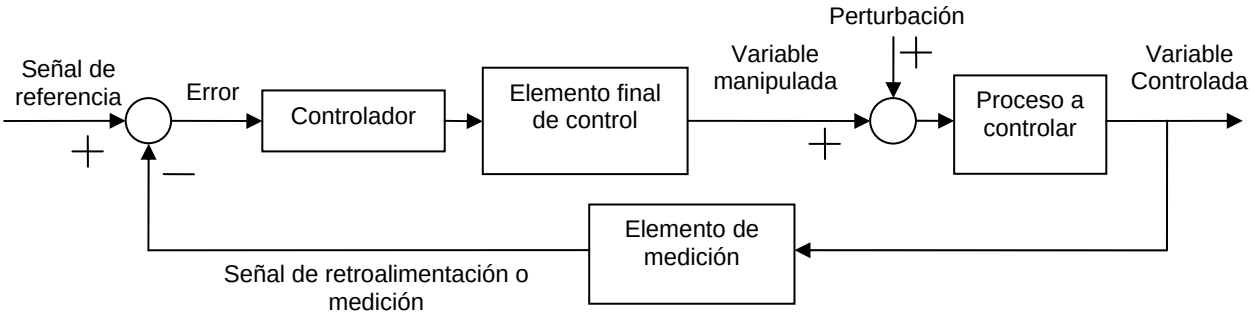
- Explique el funcionamiento que usted cree deben tener este tipo de sistemas.
- Haga el diagrama de bloque e identifique los elementos del sistema.
- Clasifique el sistema de control

(10 puntos)



Solución

- **Funcionamiento**: El sistema permite calentar agua hasta una temperatura deseada, mediante un intercambiador de calor de vapor. Mediante la regulación del flujo de vapor se controla que la temperatura del agua caliente se corresponda con la deseada. Para esto se dispone de un transmisor de temperatura que permite medir su valor y enviar la información de la medida a un controlador, el cual compara la temperatura efectivamente obtenida con una temperatura de referencia. En función de la diferencia entre la temperatura medida y la de referencia el controlador envía una señal a la válvula de control para que se abra o se cierre, permitiendo mayor o menor paso de flujo de vapor, y en consecuencia calentando en mayor o menor grado el agua.
- **Diagrama de Bloques**



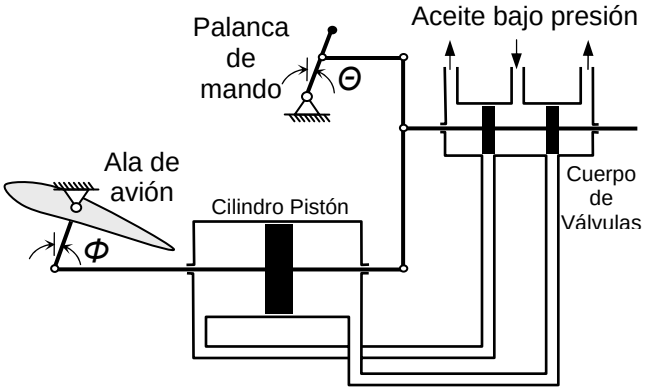
- **Identificación de Componentes**:
  - Elementos:
    - Proceso a Controlar: Calentamiento del agua a una temperatura constante.
    - Controlador: Controlador
    - Elemento Final de Control: Válvula
    - Elemento de medición: Transmisor de temperatura
  - Variables:
    - Señal de referencia: Temperatura deseada

- Variable controlada: Temperatura de salida del agua
- Variable manipulada: Flujo de vapor
- Error: Diferencia entre Temperatura deseada y temperatura de salida del agua.
- Señal de retroalimentación: mediada de la temperatura de salida del agua.
- Perturbación: cambios en el flujo de salida o en temperatura de entrada del agua.

- **Clasificación**:
  - Sistema Retroalimentado
  - Regulador
  - Continuo

2. La figura es un diagrama esquemático de un circuito hidráulico de elevación de un avión. El objetivo del sistema es proporcionar al ala del avión el ángulo requerido para sustentarlo (Φ), que es función del ángulo que proporciona el piloto a la palanca de mando (Θ). Si consideramos que este circuito junto con el piloto y los instrumento de navegación forman un sistema de control:

- Explique el funcionamiento del sistema
- Haga el diagrama de bloque e identifique los elementos del sistema
- Clasifique el sistema de control



Solución:

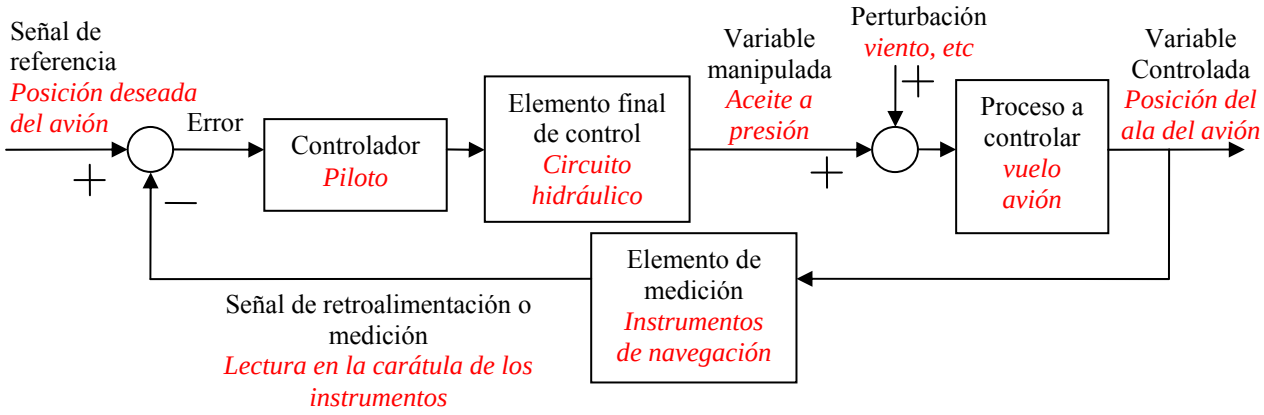
El sistema funciona de la siguiente manera:

El piloto mueve la palanca de mando del avión colocándola en la posición que desea para la inclinación del ala del avión. Al realizar el movimiento esta palanca de mando actúa sobre un cuerpo de válvulas que dejara pasar aceite a presión al cilindro pistón con lo cual se producirá un movimiento del pistón, que actúa directamente sobre la posición del ala del avión. A medida que el pistón se mueve actúa también sobre el cuerpo de válvulas de manera que una vez que el ala del avión esté en la posición deseada el cuerpo de válvulas vuelve a cerrar el paso del aceite al pistón quedándose este quieto. El piloto luego observará la posición del avión en los instrumento de navegación, y si la posición es correcta volverá a actuar sobre la palanca, de lo contrario la dejará quieta.

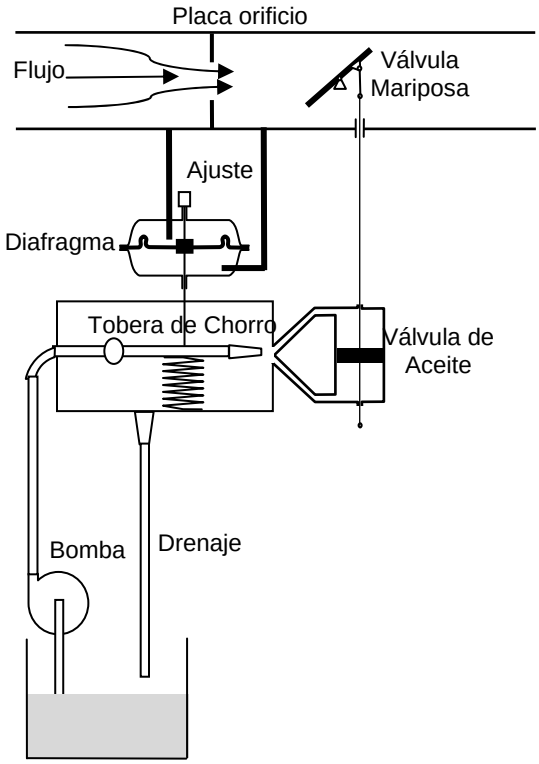
Clasificación

Sistema seguidor, de lazo cerrado, continuo.

Diagrama de bloque



3. En la figura, la tobera de chorro de aceite se mueve y envía aceite en la dirección apropiada para mover la válvula de aceite y controlar el flujo de aire por la tubería mediante la válvula mariposa.



- Explique el funcionamiento del sistema.

Solución:

El sistema sirve para controlar el paso de aire por una tubería mediante un sistema hidráulico de tobera de chorro. Para ello dispone de un elemento que mide el flujo de aire a través de una caída de presión la cual es captada por un diafragma que mueve el chorro de aceite hacia una de las dos lados del cilindro de potencia. Si el flujo es muy grande envía el chorro de aceite para que cierre la válvula mariposa, si el flujo es muy pequeño esta hará que se hará la válvula mariposa.

- Clasifique el sistema de control.

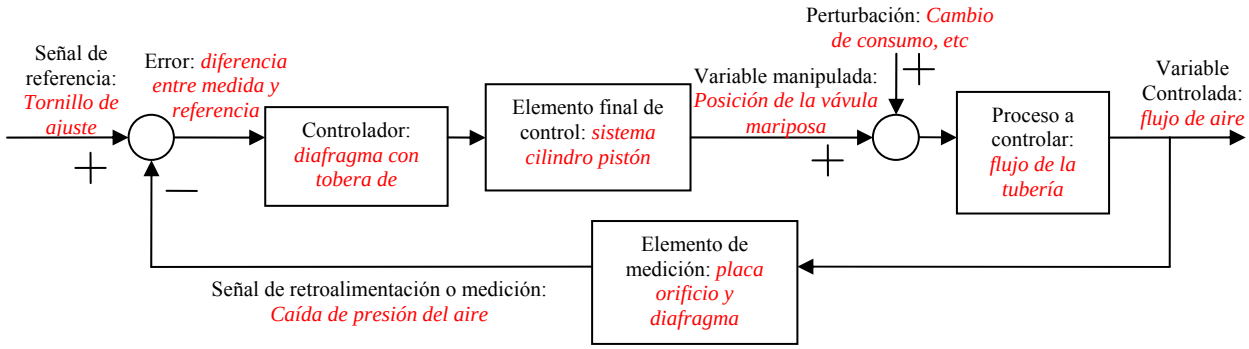
Solución:

El sistema es:

- Retroalimentado, porque se compara continuamente el flujo de aire con el deseado.
- Regulador, porque se quiere mantener el flujo de aire en un valor fijo.
- Continuo, porque la variable manipulada puede tomar cualquier valor entre el máximo y el mínimo.

- Haga el diagrama de bloque e identifique los elementos del sistema.

Solución:

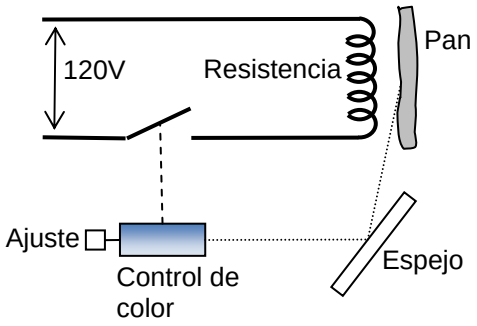


4. Cuando los automóviles no están en movimiento el motor se coloca en ralentí, punto de funcionamiento en el cual se consume la menor cantidad de combustible sin que se apague el vehículo. Los vehículos modernos utilizan un sistema de control para controlar la velocidad del motor en este punto de funcionamiento, teniendo para ello una velocidad de referencia deseada ωr. Esta velocidad puede variar si existe un cambio de carga, para lo cual un medidor de velocidad envía constantemente la información a un controlador que se encarga de ajustar la entrada de combustible, para que la velocidad vuelva al punto deseado.

- Explique el funcionamiento que usted cree deben tener este tipo de sistemas, utilice gráficos para ilustrar su explicación.
- Clasifique el sistema de control
- Haga el diagrama de bloque e identifique los elementos del sistema que usted explicó.

5. La figura representa el esquema básico de funcionamiento del sistema de control de un tostador de pan, que se basa en la lectura del color del pan para realizar el control.

- Explique el funcionamiento del sistema
- Clasifique el sistema de control
- Haga el diagrama de bloque e identifique los elementos del sistema

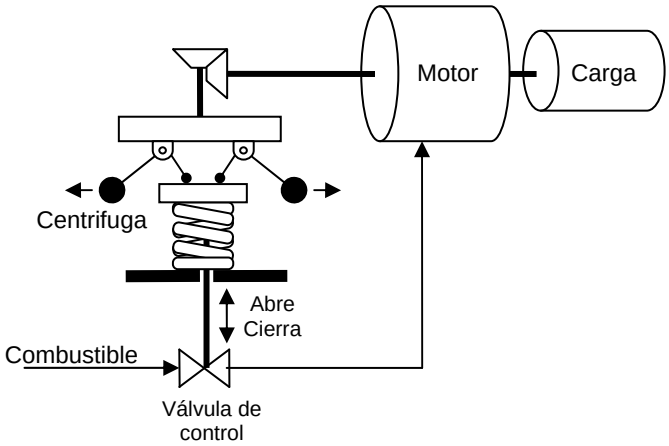


6. Los sistemas de aire acondicionado de vehículos poseen un sistema de control para su correcto funcionamiento.

- Explique el funcionamiento que usted cree deben tener este tipo de sistemas, utilice gráficos para ilustrar su explicación.
- Haga el diagrama de bloque e identifique los elementos del sistema que usted explicó.
- Clasifique el sistema de control

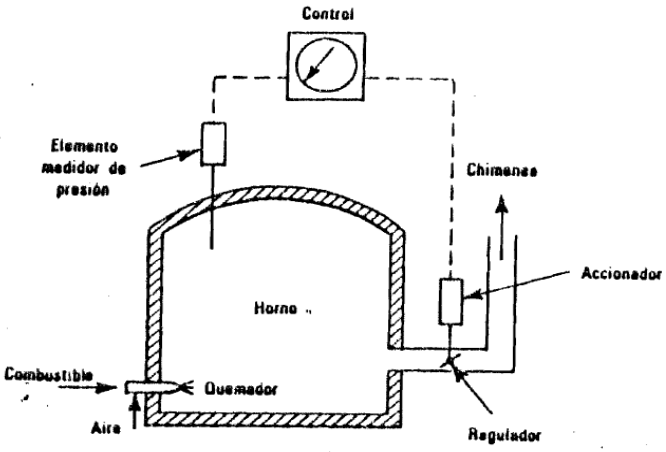
7. En la figura se ilustra el principio básico del regulador de Watt, el cual de acuerdo a la diferencia entre la velocidad deseada y la velocidad real del motor, medida con la centrífuga, ajusta la entrada de combustible al motor para mantener su velocidad constante.

- Explique el funcionamiento del sistema.
- Haga el diagrama de bloque e identifique los elementos del sistema.
- Clasifique el sistema de control.



8. En la figura se puede ver un sistema de control de presión de un horno. La presión en el horno es controlada por la posición de un regulador de salida de los gases de combustión.

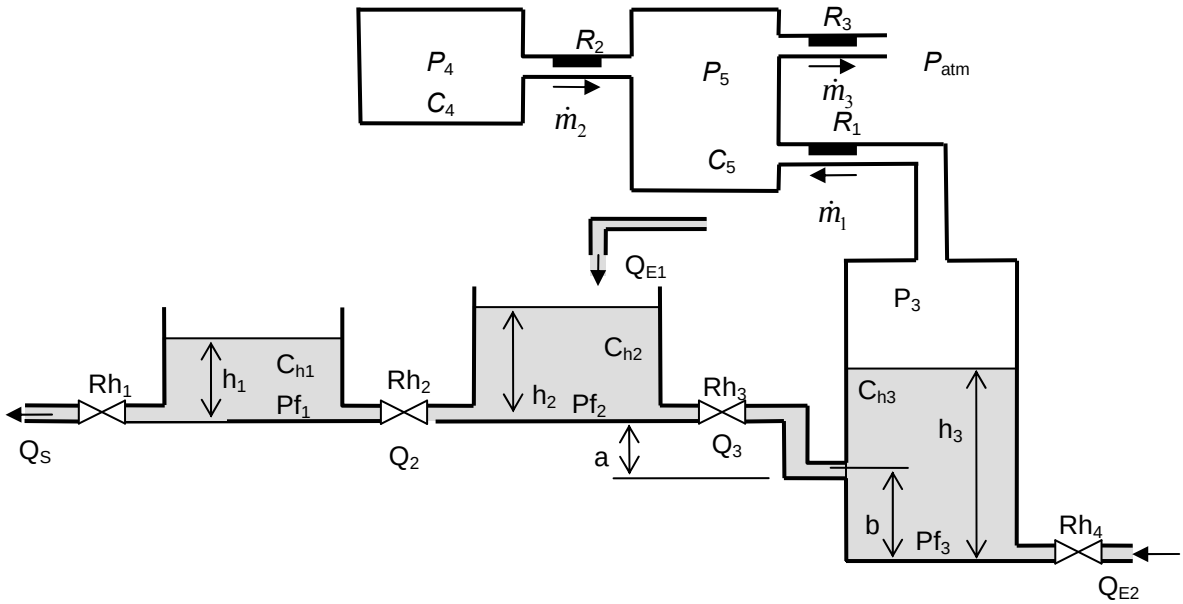
- Explique el funcionamiento del sistema.
- Haga el diagrama de bloque e identifique los elementos del sistema.
- Clasifique el sistema de control.



ULA. FACULTAD DE INGENIERIA.
ESCUELA DE MECANICA.
TEORIA DE CONTROL.

EJERCICIOS TEMA 2

1. Determine las expresiones necesarias y el planteamiento del camino para obtener la ecuación que relaciona a $\dot{m}_3 = f\left(Q_{E1}, Q_{E2}, Q_S\right)$.



SOLUCION

Sistema Hidráulico

$Q_2 - Q_S = C_{h1} DP_{f1}$ (1) $\quad Q_3 + Q_{E1} - Q_2 = C_{h2} DP_{f2}$ (2) $\quad Q_{E2} - Q_3 = C_{h3} DP_{f3}$ (3)

$Q_S = \frac{P_{f1}}{R_{h1}}$ (4) $\quad Q_2 = \frac{P_{f2} - P_{f1}}{R_{h2}}$ (5) $\quad Q_3 = \frac{P_{f3} - \gamma(a+b) - P_{f2}}{R_{h3}}$ (6)

$P_{f1} = \gamma h_1$ (7) $\quad P_{f2} = \gamma h_2$ (8) $\quad P_{f3} = P_3 + \gamma h_3$ (9)

Sistema Neumático

$-\dot{m}_2 = C_4 DP_4$ (10) $\quad \dot{m}_1 + \dot{m}_2 - \dot{m}_3 = C_5 DP_5$ (11)

$\dot{m}_1 = \frac{(P_3 - P_5)}{R_1}$ (12) $\quad \dot{m}_2 = \frac{P_4 - P_5}{R_2}$ (13) $\quad \dot{m}_3 = \frac{P_5}{R_3}$ (14)

Ecuación de relación: Ecuación (9)

Ecuaciones (14), variables (11 hidráulico, 6 neumático = 17)

Planteamiento de la solución Hidráulico:

- (5) en (1) → $Q_s = f\left(P_{f1}, P_{f2}\right)$ (15)
- (9) en (6) → $Q_3 = f\left(P_{f2}, P_3, h_3\right)$ (16)
- (9) en (3) → $Q_{E2} = f\left(Q_3, P_3, h_3\right)$ (17)
- (5) y (16) en (2) → $Q_{E1} = f\left(P_{f1}, P_{f2}, P_3, h_3\right)$ (18)

- (6) en (17) → $Q_{E2} = f(P_3, h_3, P_{f2})$ (19)
- De (19) h_3 en (18) → $Q_{E1} = f(Q_{E2}, P_{f1}, P_{f2}, P_3)$ (20)
- De (15) P_{f2} en (20) → $Q_{E1} = f(Q_S, Q_{E2}, P_{f1}, P_3)$ (21)
- De (4) P_{f1} en (21) → $Q_{E1} = f(Q_s, Q_{E2}, P_3)$ (22)

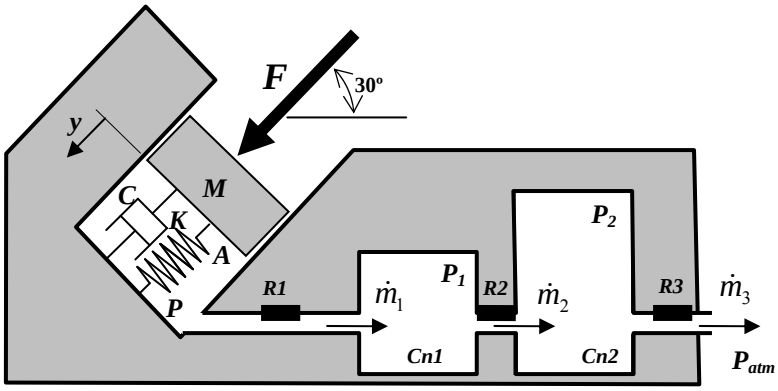
Planteamiento de la solución neumático:

- (13) en (10) → $P_4 = f(P_5)$ (23)
- (12) y (13) en (11) → $\dot{m}_3 = f(P_3, P_4, P_5)$ (24)
- (23) en (24) → $\dot{m}_3 = f(P_3, P_5)$ (25)
- (14) en (25) → $\dot{m}_3 = f(P_3)$ (26)

Relación dos sistemas:

- (26) en (22) → $\dot{m}_3 = f(Q_s, Q_{E1}, Q_{E2})$

2. Para el sistema de la figura hallar la ecuación diferencial que relaciona $y = f(F, \dot{m}_3)$.



Respuesta

Para el Sistema Mecánico:

$$F - CDy - Ky - PA = MD^2 y$$

$$MD^2 y + CDy + Ky = F - PA \quad (A)$$

Para el sistema Neumático:

$$(1) \quad \dot{m}_1 = \frac{P - P_1}{R_1}$$

$$(2) \quad \dot{m}_2 = \frac{P_1 - P_2}{R_2}$$

$$(3) \quad \dot{m}_3 = \frac{P_2}{R_3}$$

$$(4) \quad \dot{m}_1 - \dot{m}_2 = C_{n1} D P_1$$

$$(5) \quad \dot{m}_2 - \dot{m}_3 = C_{n2} D P_2$$

Variables: $\dot{m}_1, \dot{m}_2, \dot{m}_3, P, P_1, P_2$ (6) debemos hallar $P = f(\dot{m}_3)$

(1) y (2) en (4):

$$\frac{P - P_1}{R_1} - \frac{P_1 - P_2}{R_2} = C_{n1} D P_1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{P}{R_1} + \frac{P_2}{R_2} = C_{n1} D P_1 + P_1\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \quad (6)$$

(2) en (5):

$$\frac{P_1 - P_2}{R_2} - \dot{m}_3 = C_{n2} D P_2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{P_1}{R_2} - \dot{m}_3 = C_{n2} D P_2 + \frac{P_2}{R_2}$$

$$P_1 = R_2 C_{n2} D P_2 + P_2 + R_2 \dot{m}_3 \quad (7)$$

(7) en (6):

$$\frac{P}{R_1}+\frac{P_2}{R_2}=C_{n1}D\left(R_2C_{n2}DP_2+P_2+R_2\dot{m}_3\right)+\left(R_2C_{n2}DP_2+P_2+R_2\dot{m}_3\right)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$$

$$\frac{P}{R_1}=R_2C_{n2}C_{n1}D^2P_2+\left(C_{n1}+\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)R_2C_{n2}\right)DP_2+\left(\frac{1}{R_1}\right)P_2+R_2C_{n1}D\dot{m}_3+\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)R_2\dot{m}_3 \quad (8)$$

(3) en (8):

$$(3)\quad \dot{m}_3=\frac{P_2}{R_3} \quad \Leftrightarrow \quad P_2=R_3\dot{m}_3$$

$$\frac{P}{R_1}=R_2R_3C_{n2}C_{n1}D^2\dot{m}_3+\left(C_{n1}+\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)R_2C_{n2}\right)R_3D\dot{m}_3+\left(\frac{1}{R_1}\right)P_2+R_2C_{n1}D\dot{m}_3+\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)R_2\dot{m}_3$$

$$P=R_1R_2R_3C_{n2}C_{n1}D^2\dot{m}_3+\left(\left(C_{n1}+\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)R_2C_{n2}\right)R_3+\left(\frac{1}{R_1}\right)P_2+R_2C_{n1}\right)R_1D\dot{m}_3+\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)R_1R_2\dot{m}_3$$

$$P=a_2D^2\dot{m}_3+a_1D\dot{m}_3+a_0\dot{m}_3 \quad (B)$$

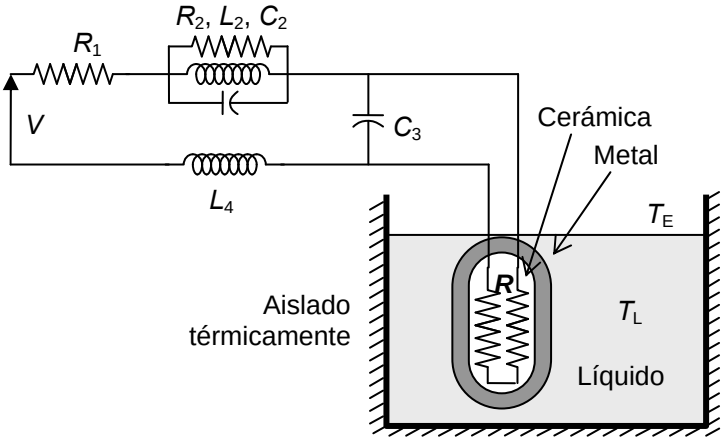
Sustituimos (B) en (A):

$$MD^2y+CDy+Ky=F-PA \quad (A)$$

$$P=a_2D^2\dot{m}_3+a_1D\dot{m}_3+a_0\dot{m}_3 \quad (B)$$

$$MD^2y+CDy+Ky=F-a_2AD^2\dot{m}_3-a_1AD\dot{m}_3-a_0A\dot{m}_3 \quad \Leftrightarrow \quad y=f\left(F,\dot{m}_3\right)$$

3. Hallar la ecuación diferencial que relaciona $T_L=f(V,T_E)$.
Considerar que la cerámica, el metal y el líquido tienen capacitancias térmicas.



Solución.

Sistema eléctrico, hallar $V_3=f(V)$:

$$V=V_1+V_2+V_3+V_4;\ V=Z_TI$$

$$V_1=R_1I$$

$$V_2=Z_2I\ ;\ Z_2=\frac{1}{\frac{1}{R_2}+\frac{1}{L_2D}+C_2D}=\frac{R_2L_2D}{L_2D+R_2+R_2C_2L_2D^2}$$

$$V_3 = Z_3 I = RI_1 = \frac{I_2}{C_3 D}\,;\; I = I_1 + I_2\,;\; Z_3 = \frac{1}{\frac{1}{R} + C_3 D} = \frac{R}{1 + RC_3 D}$$

$$V_4 = L_4 DI$$

$$Z_T = Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 = R_1 + \frac{R_2 L_2 D}{L_2 D + R_2 + R_2 C_2 L_2 D^2} + \frac{R}{1 + RC_3 D} + L_4 D$$

Con la ecuación de V_T y V_3:

$$V = \frac{Z_T}{Z_3} V_3 = \frac{R_1 + \frac{R_2 L_2 D}{L_2 D + R_2 + R_2 C_2 L_2 D^2} + \frac{R}{1 + RC_3 D} + L_4 D}{\frac{R}{1 + RC_3 D}} V_3$$

$$V = \frac{\begin{array}{l} R_1\left(L_2 D(1 + RC_3 D) + R_2(1 + RC_3 D) + R_2 C_2 L_2 D^2 (1 + RC_3 D)\right) + \left(R_2 L_2 D + R_2 L_2 DRC_3 D\right) \\ + R\left(L_2 D + R_2 + R_2 C_2 L_2 D^2\right) + L_4\left(L_2 D(1 + RC_3 D) + R_2(1 + RC_3 D) + R_2 C_2 L_2 D^2 (1 + RC_3 D)\right) D \end{array}}{RL_2 D + RR_2 + RR_2 C_2 L_2 D^2} V_3$$

$$V = \frac{\begin{array}{l} R_1 R_2 + \left(R_1 L_2 + RR_1 R_2 C_3\right) D + \left(RR_1 C_3 L_2 + R_1 R_2 C_2 L_2\right) D^2 + RR_1 C_3 R_2 C_2 L_2 D^3 \\ + R_2 L_2 D + RR_2 L_2 C_3 D^2 \\ + RR_2 + RL_2 D + RR_2 C_2 L_2 D^2 \\ + R_2 L_4 D + \left(L_2 L_4 + RR_2 C_3 L_4\right) D^2 + \left(R_2 C_2 L_2 L_4 + RC_3 L_2 L_4\right) D^3 + RC_3 R_2 C_2 L_2 L_4 D^4 \end{array}}{RR_2 + RL_2 D + RR_2 C_2 L_2 D^2} V_3$$

$$V = \frac{\begin{array}{l} \left(R_1 R_2 + RR_2\right) + \left(R_1 L_2 + RR_1 R_2 C_3 + R_2 L_2 + RL_2 + R_2 L_4\right) D \\ + \left(RR_1 C_3 L_2 + R_1 R_2 C_2 L_2 + RR_2 L_2 C_3 + RR_2 C_2 L_2 + L_2 L_4 + RR_2 C_3 L_4\right) D^2 \\ + \left(R_2 C_2 L_2 L_4 + RC_3 L_2 L_4 + RR_1 C_3 R_2 C_2 L_2\right) D^3 + RC_3 R_2 C_2 L_2 L_4 D^4 \end{array}}{RR_2 + RL_2 D + RR_2 C_2 L_2 D^2} V_3$$

$$a_4 D^4 V_3 + a_3 D^3 V_3 + a_2 D^2 V_3 + a_1 D V_3 + a_0 V_3 = b_2 D^2 V + b_1 D V + b_0 V$$

$$a_4 = RC_3 R_2 C_2 L_2 L_4$$

$$a_3 = R_2 C_2 L_2 L_4 + RC_3 L_2 L_4 + RR_1 C_3 R_2 C_2 L_2$$

$$a_2 = RR_1 C_3 L_2 + R_1 R_2 C_2 L_2 + RR_2 L_2 C_3 + RR_2 C_2 L_2 + L_2 L_4 + RR_2 C_3 L_4$$

$$a_1 = R_1 L_2 + RR_1 R_2 C_3 + R_2 L_2 + RL_2 + R_2 L_4$$

$$a_0 = R_1 R_2 + RR_2$$

$$b_2 = RR_2 C_2 L_2$$

$$b_1 = RL_2$$

$$b_0 = RR_2$$

Ecuación de relación:

$$Q = V_3 I_2 = \frac{{V_3}^2}{R} = {I_2}^2 R$$

Sistema térmico

1) $Q - Q_1 = C_C D T_C$

2) $Q_1 - Q_2 = C_m D T_m$

3) $Q_2 - Q_E = C_L D T_L$

4) $Q_1 = \dfrac{T_C - T_m}{R_1}$

5) $Q_2 = \dfrac{T_m - T_L}{R_2}$

6) $Q_E = \dfrac{T_L - T_E}{R_3}$

Sustituyendo a 4 en 1

7) $Q - \dfrac{T_C - T_m}{R_1} = C_C D T_C \,;\; R_1 Q - T_m = R_1 C_C D T_C + T_C$

Sustituyendo a 4 y 5 en 2:

8) $\dfrac{T_C - T_m}{R_1} - \dfrac{T_m - T_L}{R_2} = C_m D T_m \,;\; R_2 T_C = R_1 R_2 C_m D T_m + (R_2 + R_1) T_m - R_1 T_L$

Sustituyendo a 5y 6en 3

9) $\dfrac{T_m - T_L}{R_2} - \dfrac{T_L - T_E}{R_3} = C_L D T_L \,;\; R_3 T_m + R_2 T_E = R_2 R_3 C_L D T_L + (R_3 + R_2) T_L$

Con 8 en 7:

10) $R_1 Q - T_m = R_1 C_C D \left(R_1 C_m D T_m + \left(1 + \dfrac{R_1}{R_2}\right) T_m - \dfrac{R_1}{R_2} T_L \right) + \left(R_1 C_m D T_m + \left(1 + \dfrac{R_1}{R_2}\right) T_m - \dfrac{R_1}{R_2} T_L \right)$

$$R_1 Q = R_1 C_m R_1 C_C D^2 T_m + \left(R_1 C_C + \frac{R_1^{\,2} C_C}{R_2} + R_1 C_m \right) D T_m + \left(2 + \frac{R_1}{R_2}\right) T_m - \frac{R_1}{R_2} R_1 C_C D T_L - \frac{R_1}{R_2} T_L$$

Con 9 en 10:

$$R_2 C_L R_1 C_m R_1 C_C D^3 D T_L + \left(\left(1 + \frac{R_2}{R_3}\right) R_1 C_m R_1 C_C + R_2 C_L \left(R_1 C_C + \frac{R_1^{\,2} C_C}{R_2} + R_1 C_m \right) \right) D^2 T_L$$

$$+ \left(\left(1 + \frac{R_2}{R_3}\right) \left(R_1 C_C + \frac{R_1^{\,2} C_C}{R_2} + R_1 C_m \right) + R_2 C_L \left(2 + \frac{R_1}{R_2}\right) - \frac{R_1}{R_2} R_1 C_C \right) D T_L + \left(\left(1 + \frac{R_2}{R_3}\right) \left(2 + \frac{R_1}{R_2}\right) - \frac{R_1}{R_2} \right) T_L =$$

$$R_1 Q + \frac{R_2}{R_3} R_1 C_m R_1 C_C D^2 T_E + \frac{R_2}{R_3} \left(R_1 C_C + \frac{R_1^{\,2} C_C}{R_2} + R_1 C_m \right) D T_E + \frac{R_2}{R_3} \left(2 + \frac{R_1}{R_2}\right) T_E$$

$$c_3D^3T_L + c_2D^2T_L + c_1DT_L + c_0T_L = R_1Q + d_2D^2T_E + d_1DT_E + d_0T_E$$

$$c_3 = R_2C_LR_1C_mR_1C_C$$

$$c_2 = \left(1+\frac{R_2}{R_3}\right)R_1C_mR_1C_C + R_2C_L\left(R_1C_C + \frac{R_1{}^2C_C}{R_2} + R_1C_m\right)$$

$$c_1 = \left(1+\frac{R_2}{R_3}\right)\left(R_1C_C + \frac{R_1{}^2C_C}{R_2} + R_1C_m\right) + R_2C_L\left(2+\frac{R_1}{R_2}\right) - \frac{R_1}{R_2}R_1C_C$$

$$c_0 = \left(1+\frac{R_2}{R_3}\right)\left(2+\frac{R_1}{R_2}\right) - \frac{R_1}{R_2}$$

$$d_2 = \frac{R_2}{R_3}R_1C_mR_1C_C$$

$$d_1 = \frac{R_2}{R_3}\left(R_1C_C + \frac{R_1{}^2C_C}{R_2} + R_1C_m\right)$$

$$d_0 = \frac{R_2}{R_3}\left(2+\frac{R_1}{R_2}\right)$$

Sustituyendo la expresión de *Q*:

$$c_3D^3T_L + c_2D^2T_L + c_1DT_L + c_0T_L = R_1\frac{V_3{}^2}{R} + d_2D^2T_E + d_1DT_E + d_0T_E$$

Sustituyendo la expresión de V_3:

$$c_3D^3T_L + c_2D^2T_L + c_1DT_L + c_0T_L = \frac{R_1}{R}\left(\frac{b_2D^2V + b_1DV + b_0V}{\left(a_4D^4 + a_3D^3 + a_2D^2 + a_1D + a_0\right)}\right)^2 + d_2D^2T_E + d_1DT_E + d_0T_E$$

$$\left(c_3D^3 + c_2D^2 + c_1D + c_0\right)\left(a_4D^4 + a_3D^3 + a_2D^2 + a_1D + a_0\right)^2T_L = \frac{R_1}{R}\left(b_2D^2 + b_1D + b_0\right)^2V^2 + \left(d_2D^2 + d_1D + d_0\right)T_E$$

$$\left(c_3D^3 + c_2D^2 + c_1D + c_0\right)\begin{pmatrix} a_4{}^2D^8 + 2a_3a_4D^7 + \left(a_3{}^2 + 2a_2a_4\right)D^6 \\ + \left(2a_1a_4 + 2a_2a_3\right)D^5 + \left(a_2{}^2 + 2a_0a_4 + 2a_3a_1\right)D^4 \\ + \left(2a_0a_3 + 2a_1a_2\right)D^3 + \left(2a_0a_2 + a_1{}^2\right)D^2 + 2a_0a_1D + a_0{}^2 \end{pmatrix}T_L$$

$$= \frac{R_1}{R}\left(b_2D^2 + b_1D + b_0\right)^2V^2 + \left(d_2D^2 + d_1D + d_0\right)T_E$$

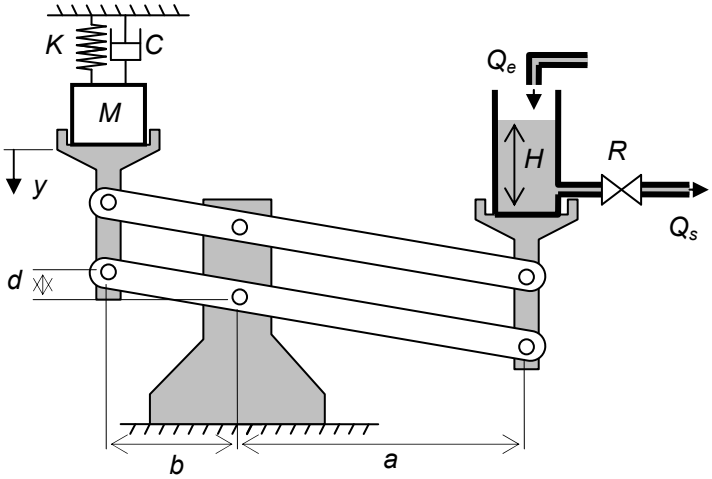
$$
\left(\begin{array}{l}
c_3 a_4^{\,2} D^{11} + \left(c_2 a_4^{\,2} + c_3 2a_3 a_4\right) D^{10} + \left(c_1 a_4^{\,2} + c_3\left(a_3^{\,2} + 2a_2 a_4\right)\right) D^9 \\
+ \left(c_0 a_4^{\,2} + c_2 2a_3 a_4 + c_1 2a_3 a_4 + c_2\left(a_3^{\,2} + 2a_2 a_4\right) + c_3\left(2a_1 a_4 + 2a_2 a_3\right)\right) D^8 \\
+ \left(c_0 2a_3 a_4 + c_1\left(a_3^{\,2} + 2a_2 a_4\right) + c_2\left(2a_1 a_4 + 2a_2 a_3\right) + c_3\left(a_2^{\,2} + 2a_0 a_4 + 2a_3 a_1\right)\right) D^7 \\
+ \left(c_0\left(a_3^{\,2} + 2a_2 a_4\right) + c_1\left(2a_1 a_4 + 2a_2 a_3\right) + c_2\left(a_2^{\,2} + 2a_0 a_4 + 2a_3 a_1\right) + c_3\left(2a_0 a_3 + 2a_1 a_2\right)\right) D^6 \\
+ \left(c_0\left(2a_1 a_4 + 2a_2 a_3\right) + c_1\left(a_2^{\,2} + 2a_0 a_4 + 2a_3 a_1\right) + c_2\left(2a_0 a_3 + 2a_1 a_2\right) + c_3\left(2a_0 a_2 + a_1^{\,2}\right)\right) D^5 \\
+ \left(c_0\left(a_2^{\,2} + 2a_0 a_4 + 2a_3 a_1\right) + c_1\left(2a_0 a_3 + 2a_1 a_2\right) + c_2\left(2a_0 a_2 + a_1^{\,2}\right) + c_3 2a_0 a_1\right) D^4 \\
+ \left(c_0\left(2a_0 a_3 + 2a_1 a_2\right) + c_1\left(2a_0 a_2 + a_1^{\,2}\right) + c_2 2a_0 a_1 + c_3 a_0^{\,2}\right) D^3 \\
+ \left(c_0\left(2a_0 a_2 + a_1^{\,2}\right) + c_1 2a_0 a_1 + c_2 a_0^{\,2}\right) D^2 + \left(c_0 2a_0 a_1 + c_1 a_0^{\,2}\right) D + c_0 a_0^{\,2}
\end{array}\right) T_L
$$

$$
= \frac{R_1}{R}\left(b_2 D^2 + b_1 D + b_0\right)^2 V^2 + \left(d_2 D^2 + d_1 D + d_0\right) T_E
$$

4. Hallar la ecuación diferencial que relaciona $Y = f(Qe)$.

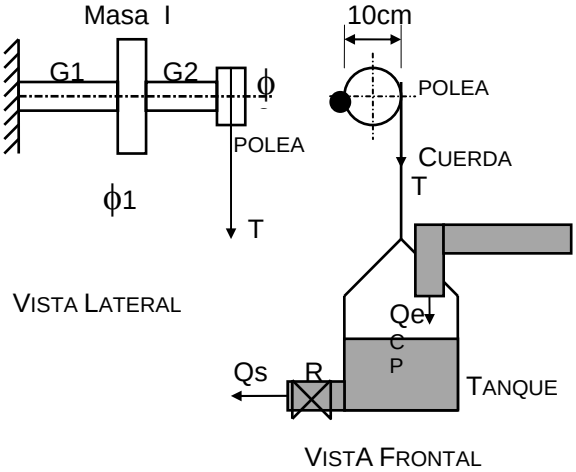
C_H = área del tanque

(5 puntos)

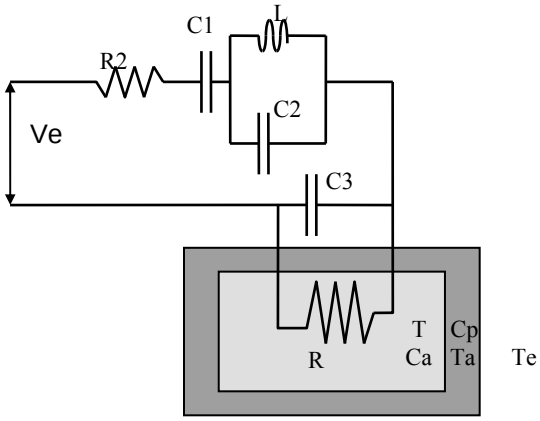


5. La figura muestra las dos vistas de un tanque que está sujeto por un sistema mecánico rotatorio a través de un cable, hallar $\phi 1 = f(\text{Qe})$.

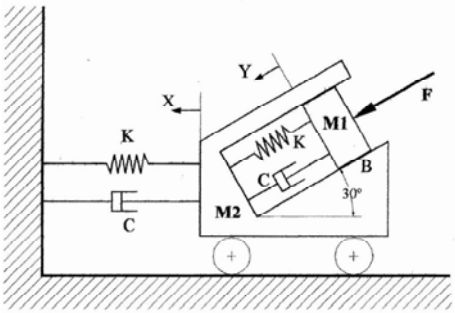
Nota: La cuerda está fija en el punto negro



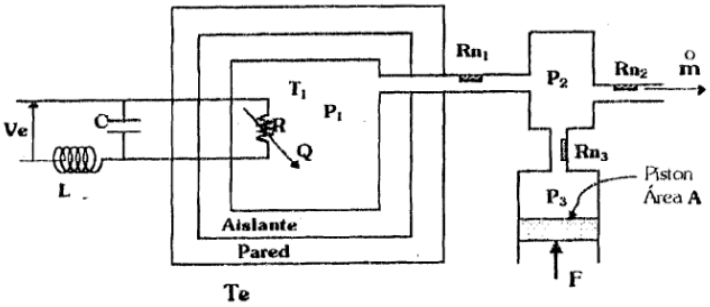
6. Hallar la ecuación diferencial que relaciona a las variables $T = f\,(Ve, Te)$



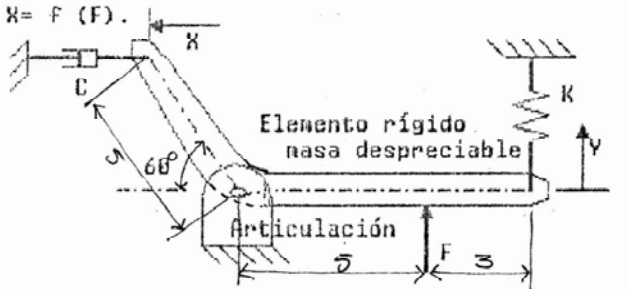
7. En la siguiente figura se muestra un sistema masa resorte amortiguador, formado por dos masas, una que se mueve horizontalmente sobre cuatro ruedas, conectada a tierra con un resorte y un amortiguador (despréciese la fricción de las ruedas sobre el piso) y otra conectada a la anterior mediante un resorte, un amortiguador y una fuerza de fricción, con una ligera inclinación. Hallar para el sistema mostrado una relación de $x = f(F)$.



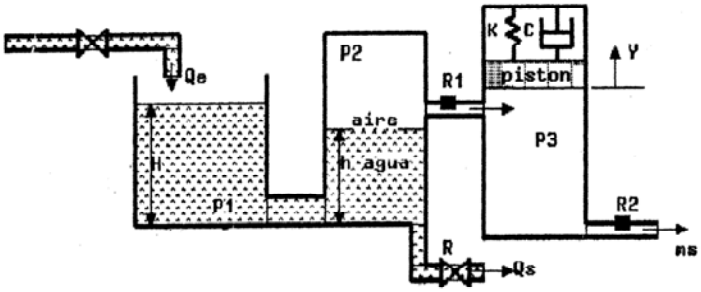
8. la ecuación diferencial que relaciona a las variables $\dot{m} = f(V_e, T_e, F)$

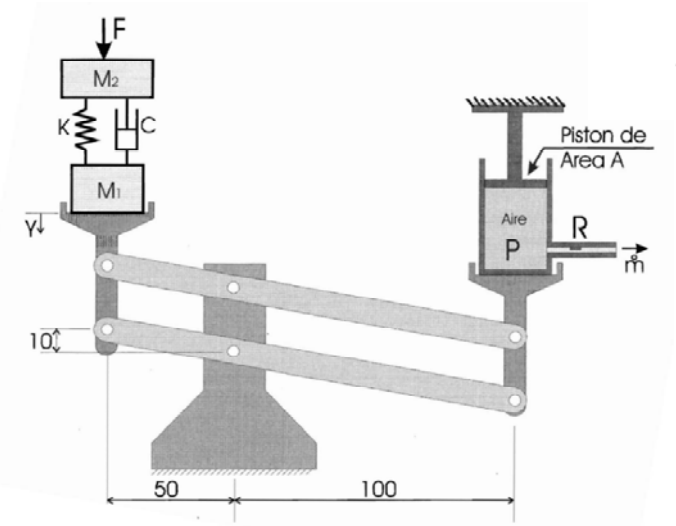


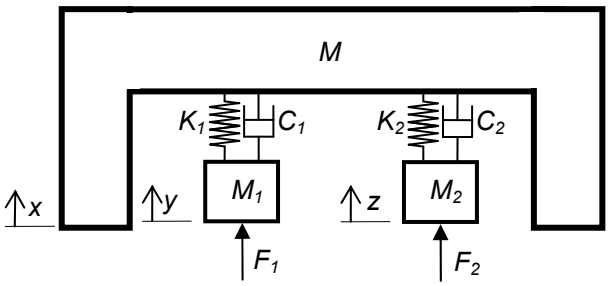
9. la ecuación diferencial que relaciona a las variables $x = f(F)$



10. la ecuación diferencial que relaciona a las variables $y = f(Q_e)$





11. Hallar la ecuación diferencial que relaciona a $Y = f(F, \dot{m})$

12. Hallar la ecuación diferencial que relaciona a $x = f(F_1, F_2)$