Unidad III. Variables aleatorias

Prof. Eliana Guzmán U.

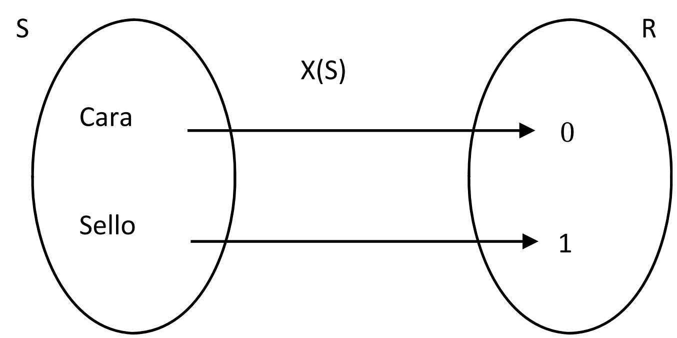
Semestre A-2015

Variable Aleatoria

- Concepto: es una función que asigna un número real, a cada elemento del espacio muestral.
- Solo los experimentos aleatorios que dan lugar a espacios muestrales no numéricos, requieren formalmente la definición de una variable aleatoria sobre ellos.

Variable Aleatoria

- Ejemplo: en el lanzamiento de una moneda balanceada.



La variable aleatoria X se definiría como:

X: cantidad de sellos obtenidos en el lanzamiento de la moneda.

Tipos de Espacios Muestrales

- **Espacio muestral discreto**: si contiene un número finito de posibilidades o una secuencia interminable con tantos elementos, como números naturales existen.
- **Espacio muestral continuo**: si contiene un número infinito de posibilidades, igual al número de puntos en un segmento de línea.

Espacios Muestrales

Para un mismo espacio muestral se pueden definir múltiples variables aleatorias, dependiendo de lo que se esté interesado en estudiar.

Por ejemplo, si se está haciendo un estudio de control de calidad en una línea de producción, y para esto se seleccionan 3 artículos al azar sin reemplazo y se clasifican como defectuoso (D) o no defectuoso (N), se pueden definir las siguientes variables aleatorias:

Espacios Muestrales

- X: cantidad de artículos defectuosos seleccionados.
- Y: cantidad de artículos no defectuosos seleccionados.
- Z: diferencia entre la cantidad de artículos defectuosos y la cantidad de artículos no defectuosos seleccionados.
- W: pérdida monetaria generada por los artículos defectuosos seleccionados.

Clasificación de las Variables Aleatorias

Las variables aleatorias se clasifican en:

- Variables aleatorias discretas: son aquellas que sólo pueden tomar un número finito o infinito numerable de valores enteros.
- Variables aleatorias continuas: son aquellas que pueden tomar un número finito no numerable de valores, es decir, puede tomar cualquier valor en una escala continua de medición.

Función de Probabilidad para Variables Aleatorias Discretas

- Una variable aleatoria asume cada uno de sus valores con una cierta probabilidad. Por esta razón, es común expresar dichas probabilidades de forma tabular.

x	x1	x2	x3	xn
f(x)	f(x1)	f(x2)	f(x3)	f(xn)

Función de Probabilidad para Variables Aleatorias Discretas

Con frecuencia es conveniente representar con una fórmula, todas las probabilidades de una variable aleatoria X. Dicha fórmula debe ser necesariamente una función de los valores numéricos de X, que se expresa normalmente por f(x). Por lo tanto se escribe:

$$f(x)=P(X=x)$$

Función de Probabilidad para Variables Aleatorias Discretas

Definición: El conjunto de pares ordenados (x,f(x)), es una función de probabilidad de la variable aleatoria discreta X si, para cada valor posible x:

1) $f(x) \geq 0$
2) $\sum_{x} f(x) = 1$
3) $P(X=x) = f(x)$

Función de Distribución para Variables Aleatorias Discretas

La Función de Distribución Acumulada F(x) de una variable aleatoria discreta X, cuya función de probabilidad es f(x), es:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} f(t) \qquad -\infty < x < \infty$$

Función de Probabilidad para Variables Aleatorias Continuas

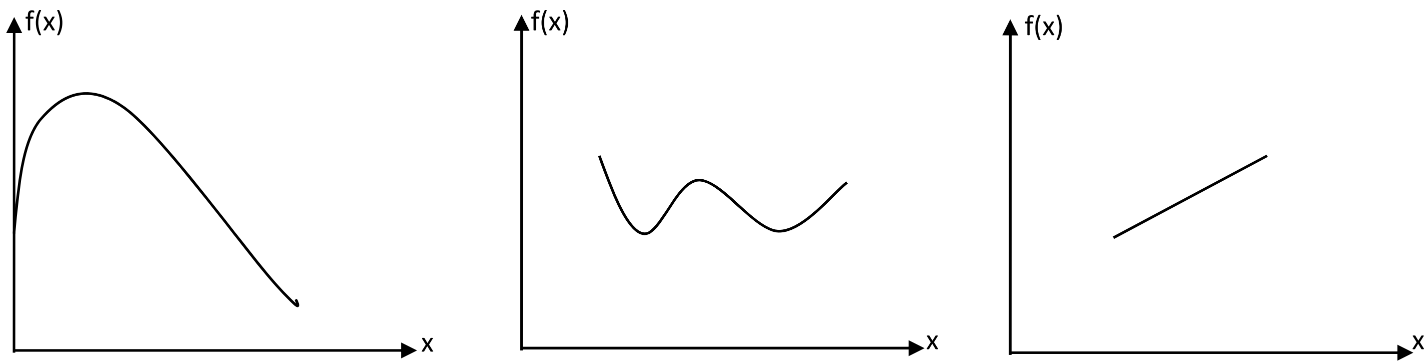
Una variable aleatoria continua tiene una probabilidad cero de asumir cualquiera de sus valores exactamente. Consecuentemente su función de probabilidad no puede darse de forma tabular:

$$
\begin{aligned}
P(a<X\leq b) &= P(a<X<b) + P(X=b) \\
&= P(a<X<b)
\end{aligned}
$$

Función de Probabilidad para Variables Aleatorias Continuas

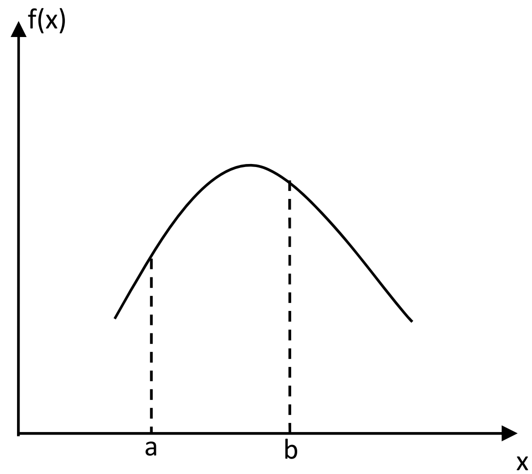
La función de probabilidad de una variable aleatoria continua, normalmente es una fórmula que necesariamente debe ser una función de los valores numéricos de dicha variable y se expresa con f(x) y recibe el nombre de función de densidad de probabilidad de X.

Función de Probabilidad para Variables Aleatorias Continuas



El área total comprendida bajo la curva f(x) es igual a 1, cuando se calcula para el rango de valores de X.

Función de Probabilidad para Variables Aleatorias Continuas



$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$$

Ejercicios de Funciones de Probabilidad de variables aleatorias discretas

Valor Esperado para Variables Aleatorias Discretas

El valor esperado es el centro de la distribución, también llamado el centro de gravedad de la misma, por esto no es necesario que sea igual a uno de los valores que toma la variable aleatoria.

Se expresa en las mismas unidades que la variable aleatoria.

Valor Esperado para Variables Aleatorias Discretas

- Definición: Sea X una variable aleatoria discreta, con función de probabilidad f(x), la media o valor esperado de X es:

$$\mu = E(x) = \sum_{x} x f(x)$$

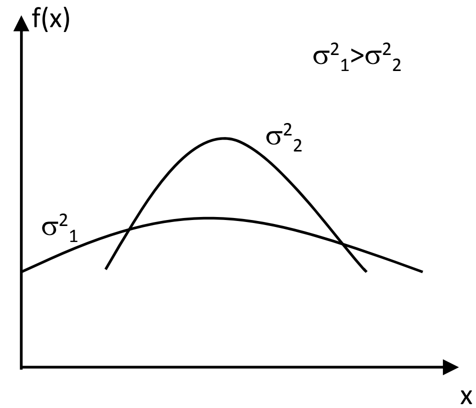
Varianza para Variables Aleatorias Discretas

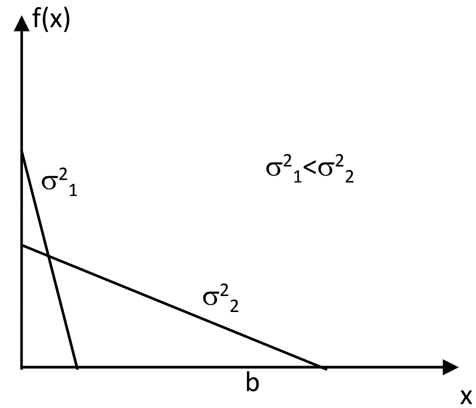
- Mide el grado de dispersión de los valores que toma la variable aleatoria con respecto a su valor central (media).
- Definición: sea X una variable aleatoria con función de probabilidad f(x) y media μ. La varianza es:

$$\sigma^2 = E(x^2) - \left(E(x)\right)^2$$

Varianza para Variables Aleatorias Discretas

- Se expresa en las mismas unidades de la variable aleatoria, pero elevadas al cuadrado. Por lo cual, se usa mucho para comparar distribuciones del mismo tipo:





Desviación Estándar para Variables Aleatorias Discretas

- Es la raíz cuadrada positiva de la varianza.

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

- Se expresa en las mismas unidades de la variable aleatoria.

Ejercicios de valor esperado, varianza y desviación estándar de variables aleatorias discretas

Distribuciones Conjuntas de variables aleatorias discretas

- Si X y Y son dos variables aleatorias discretas, la función de probabilidad de sus ocurrencias simultáneas, puede presentarse por una función de valores $f(x,y)$, para cualquier par de valores (x,y) dentro del rango de las variables aleatorias X y Y.
- $f(x,y)=P(X=x,Y=y)$, esto es, los valores de $f(x,y)$ proporcionan la probabilidad de que los resultados x y y ocurran al mismo tiempo.

Distribuciones Conjuntas de variables aleatorias discretas

Definición: la función f(x,y) es una función de probabilidad conjunta de las variables aleatorias discretas X y Y, si:

1. $f(x,y) \geq 0 \ \forall \ (x,y)$
2. $\sum_{x} \sum_{y} f(x, y) = 1$
3. $P(X=x, Y=y) = f(x,y)$

Distribuciones Marginales de variables aleatorias discretas

- El término marginal se utiliza debido a que en el caso discreto, los valores de $g(x)$ y $h(y)$ son exactamente los totales marginales de las columnas y filas respectivas, cuando los valores de $f(x,y)$ se muestran en forma tabular.

Distribuciones Marginales de variables aleatorias discretas

- Definición: las distribuciones marginales de X y Y, están dadas por:

$$g(x) = \sum_{y} f(x, y) \qquad y \qquad h(y) = \sum_{x} f(x, y)$$

Distribuciones Condicionales de variables aleatorias discretas

Sean X y Y variables aleatorias discretas. La distribución condicional de la variable aleatoria Y, dado que X=x, está dada por:

$$f(y/x) = \frac{f(x,y)}{g(x)} \quad g(x) > 0$$

Similarmente,

$$f(x/y) = \frac{f(x,y)}{h(y)} \quad h(y) > 0$$

Ejercicios de distribuciones conjuntas, marginales y condicionales

Covarianza

- La covarianza entre dos variables aleatorias es una medida de la naturaleza de la asociación entre ellas, en otras palabras, es una medida de la forma en que varían conjuntamente dos variables aleatorias.
- El signo de la covarianza indica si la relación entre las dos variables aleatorias es positiva o negativa.

Covarianza

La covarianza entre dos variables aleatorias, discretas o continuas, se determina por:

$$COV(X,Y)=E(XY) - E(X)E(Y)$$

Entre más se alejada esté la covarianza de cero, mayor es el grado de asociación entre las variables y entre más cercano es el valor a cero, es menor la relación que existe entre las variables.

Covarianza

- ¿Cómo se calcula la covarianza?

$$E(XY) = \sum_x \sum_y xyf(x,y)$$

$$E(X) = \sum_x xg(x)$$

$$E(Y) = \sum_y yh(y)$$

Finalmente se usa la fórmula:

COV(X,Y)=E(XY) – E(X)E(Y)

Covarianza

- Cómo se interpreta los valores obtenidos al calcular la covarianza:

COV(X,y)=

>0 valores pequeños de X se asocian con valores pequeños de Y, y valores grandes de X se asocian con valores grandes de Y.

=0 no existe relación entre X y Y.

<0 valores pequeños de X se asocian con valores grandes de Y, y valores grandes de X se asocian con valores pequeños de Y.

Independencia Estadística

- Sean X y Y dos variables aleatorias discretas o continuas, con función de probabilidad conjunta $f(x,y)$, y distribuciones marginales $g(x)$ y $h(y)$, respectivamente, las variables aleatorias X y Y, se dice que son estadísticamente independientes si y solo si $f(x,y) = g(x)h(y)$ para todo (x,y) dentro de sus rangos.

Independencia Estadística

Cuando X y Y son estadísticamente independientes, puede demostrarse que la covarianza es cero. Lo contrario, sin embargo, generalmente no es cierto, lo que indica que dos variables aleatorias pueden tener covarianza igual a cero y aún así no ser estadísticamente independientes.

Ejercicios de covarianza e independencia estadística

Tema 7.

Distribuciones de Probabilidad para variables aleatorias discretas

(Parcial 4)

Distribuciones de variables aleatorias discretas

Con frecuencia las observaciones que se generan en diferentes experimentos estadísticos, tiene el mismo tipo de comportamiento en términos generales. En consecuencia, las variables aleatorias discretas que se asocian con estos experimentos, pueden describirse esencialmente, por la misma función de probabilidad y por lo tanto se representan por una sola fórmula.

Distribución de Bernoulli

- Es aquel modelo que sigue un experimento de Bernoulli, que se realiza una sola vez y que puede tener dos posibles resultados, clasificados como éxito o fracaso.

Distribución de Bernoulli

Ejemplos:

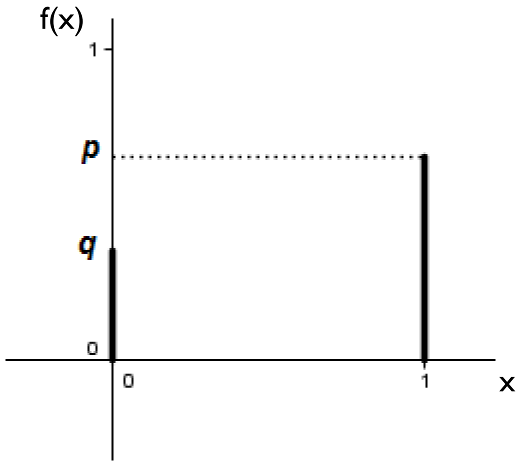
- Lanzamiento de una moneda.
- Nacimiento de un bebé.
- Se aprueba o no un examen. (Estudio estadístico de aprobados en una facultad).
- Un artículo seleccionado es defectuoso o no (control de calidad).
- Curar o no una enfermedad (Medicina).
- Dar en el blanco o errar (Militar).

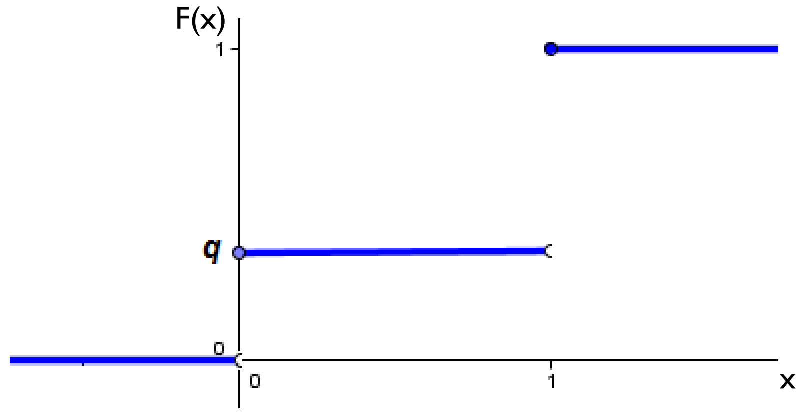
Distribución de Bernoulli

Al existir solo 2 posibles resultados se trata de eventos complementarios:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Probabilidad de éxito} \rightarrow p \\ \\ \text{Probabilidad de fracaso} \rightarrow q\end{array}\right\} p + q = 1$$

Distribución de Bernoulli





Experimento de Bernoulli

El proceso de Bernoulli, debe tener las siguientes propiedades:

- El experimento consiste en n intentos repetidos.
- Los resultados de cada uno de los intentos pueden clasificarse como éxito o fracaso.
- La probabilidad de éxito representada por p, permanece constante para todos los intentos.
- Los intentos repetidos son independientes (muestreo con reemplazo).

Distribución Binomial

- Parte o surge del Experimento de Bernoulli.
- Se aplica cuando se realiza un número <u>n</u> de veces el experimento de Bernoulli, estando interesados en el <u>número ó cantidad de éxitos obtenidos</u>.

Distribución Binomial

Definición: La cantidad X de éxitos en n repeticiones del experimento de Bernoulli recibe el nombre de v.a. Binomial : $X \sim b(x; n, p)$

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \qquad x = 0,1,2,\ldots,n$$

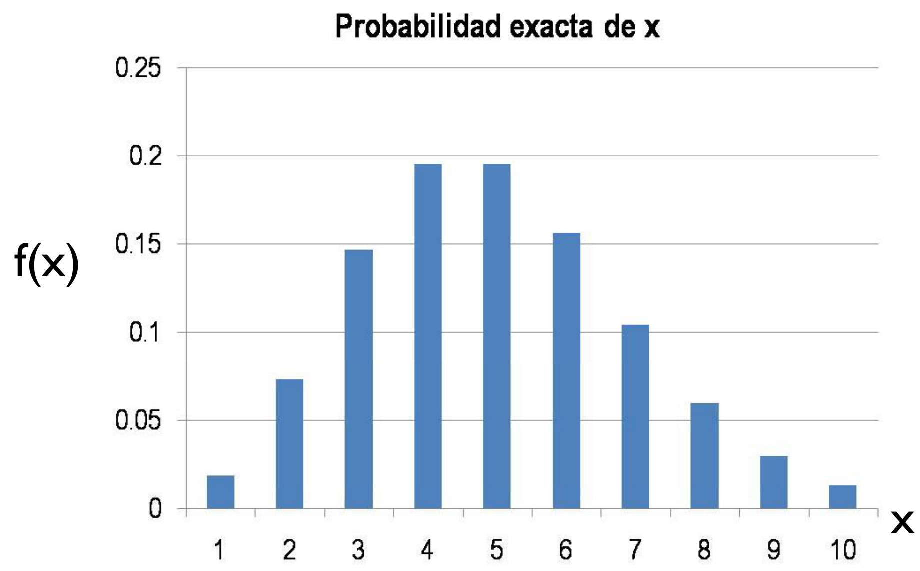
Donde: n: número de intentos o repeticiones del experimento.

p: probabilidad de éxito en un intento.

q: probabilidad de fracaso en un intento ($q = 1 - p$).

Distribución Binomial

- <u>Media</u>: $\mu = np$
- <u>Varianza</u>: $\sigma^2 = npq$



Distribución Hipergeométrica

Son experimentos donde, al igual que la Distribución Binomial, en cada ensayo hay tan solo dos posibles resultados (éxito o fracaso). Pero se diferencia de la Distribución Binomial, en que los distintos ensayos son dependientes entre sí (muestro sin reemplazo).

Ejemplo: prueba de vida útil de un bombillo.

Distribución Hipergeométrica

- <u>Experimento hipergeométrico</u>: consiste en calcular la probabilidad de seleccionar x éxitos de los k posibles resultados considerados éxitos, y n-x fracasos de los N-k posibles resultados considerados fracasos, cuando una muestra de tamaño n se selecciona de N resultados posibles.

Distribución Hipergeométrica

Posee las dos características siguientes:

- Una muestra de tamaño n se selecciona, sin reemplazo, de un total de N.
- k resultados del total de N pueden clasificarse como éxitos y N-k como fracasos:

N
- k: éxitos
- N-k: fracasos

Distribución Hipergeométrica

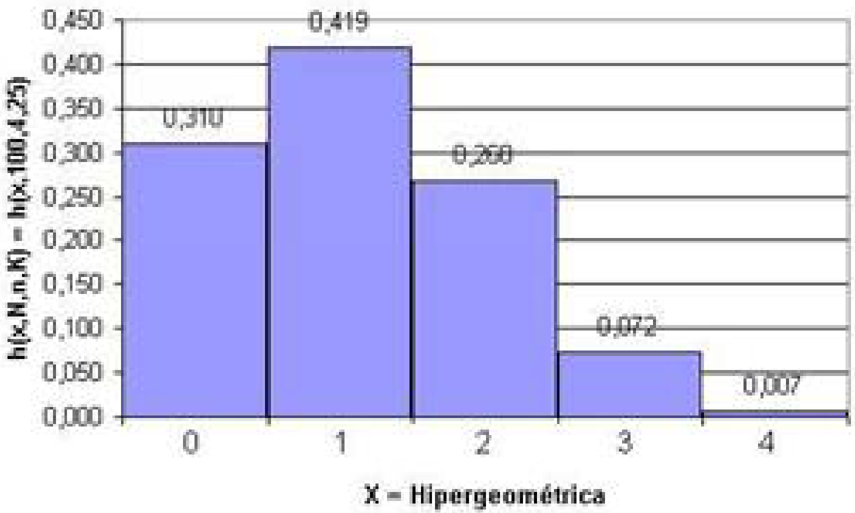
- Definición: La distribución de probabilidad de una v.a. hipergeométrica X, que representa el número o cantidad de éxitos en una muestra aleatoria de tamaño n, seleccionada de N resultados posibles, de los cuales k son considerados éxitos y N-k como fracasos es:

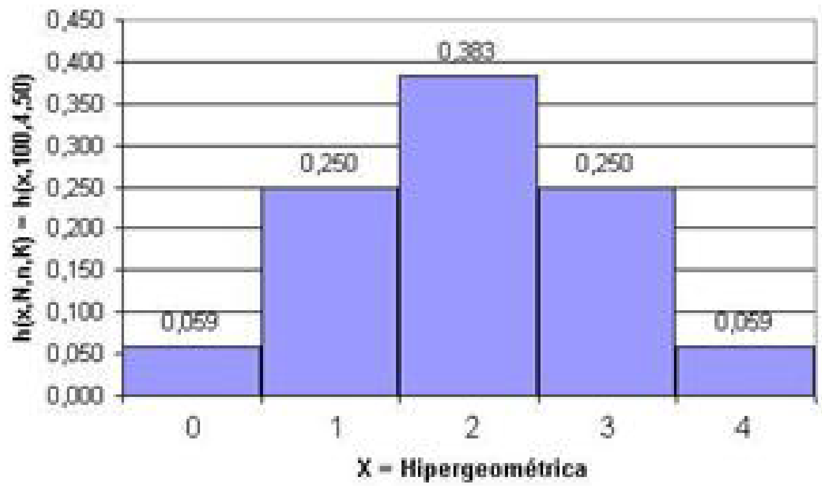
$$f(x) = \frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}} \qquad x = 0,1,2,\ldots,n$$

Distribución Hipergeométrica

- Media: $\mu = nk/N$
- Varianza: $\sigma^2 = \frac{N-n}{N-1} \times n \times \frac{k}{N} \times \left(1 - \frac{k}{N}\right)$

Distribución Hipergeométrica





Distribución de Poisson

Experimento de Poisson: son experimentos que resultan de valores numéricos de una v.a. X que representa la cantidad de resultados obtenidos durante un intervalo de tiempo dado ó una región específica. El intervalo de tiempo puede ser de cualquier duración: un minuto, una semana, un mes, un año….Y la región podría ser un segmento de línea, un área, un volumen, un pedazo de material, etc.

Distribución de Poisson

Ejemplos:

- Estudio de las colas o líneas de espera.
- Cantidad de fallas de equipos en un intervalo de tiempo dado.
- Número de errores de impresión en un libro.
- Cantidad de pacientes que llegan al servicio de emergencias de un hospital.
- Cantidad de bacterias en un cultivo.

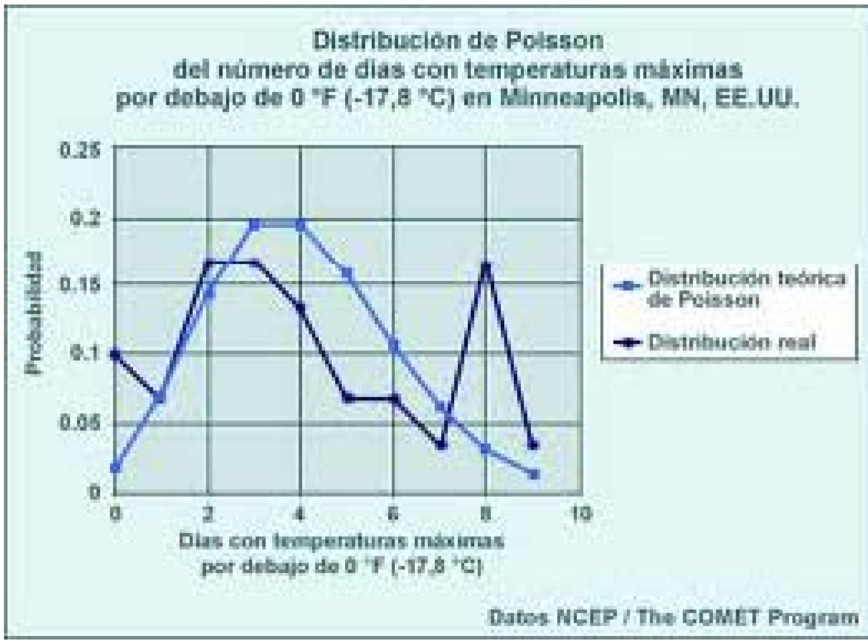
Distribución de Poisson

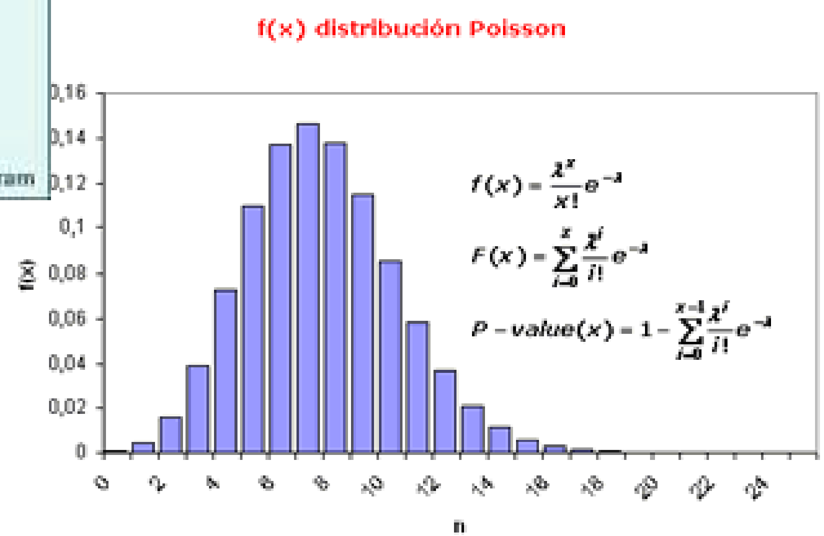
- Definición: La distribución de probabilidad de la v.a. de Poisson X, que representa la cantidad de resultados que ocurren en un intervalo de tiempo dado ó en una región específica indicada por t, es: $X \sim P(x; \lambda t)$

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^x}{x!} \qquad x = 0,1,2,\ldots$$

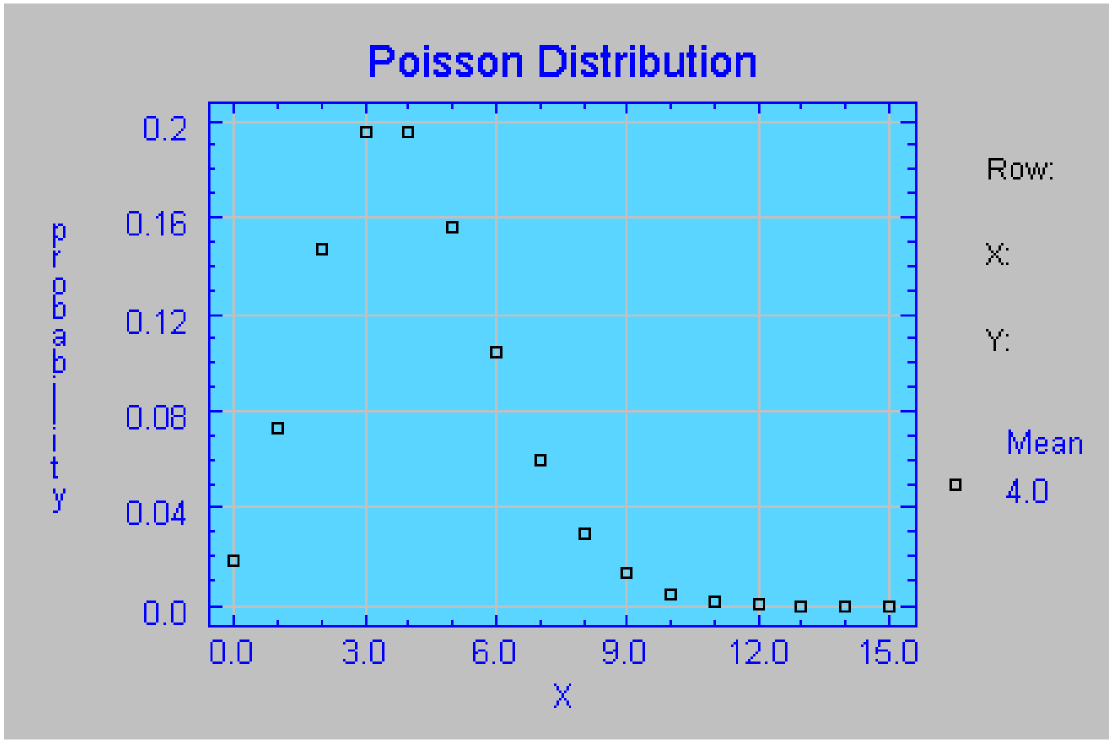
- Media y varianza: $\mu = \sigma^2 = \lambda t$

Distribución de Poisson





Distribución de Poisson



Tema 8
Distribuciones de variables aleatorias continuas

Distribución Uniforme o Rectángular

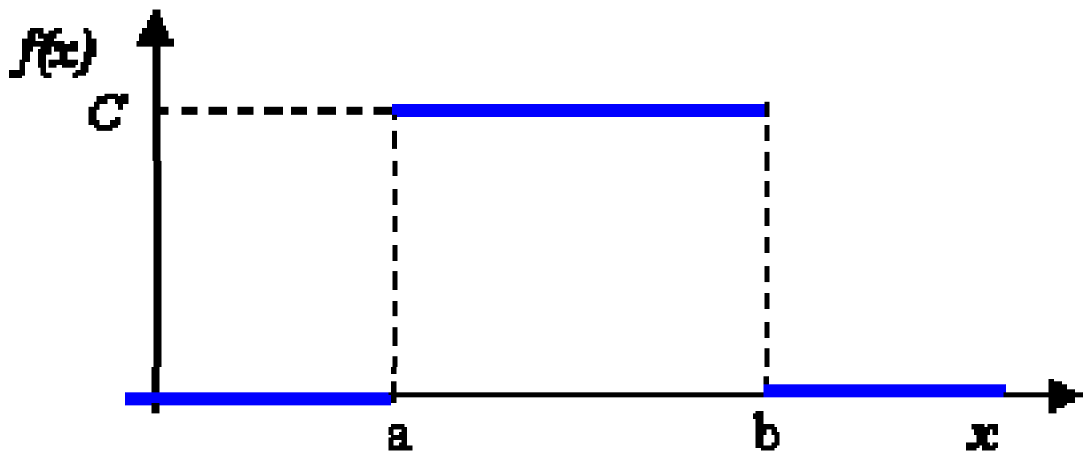
- Es aquella que puede tomar cualquier valor dentro de un intervalo, todos ellos con la misma probabilidad de ocurrencia.
- Definición: la variable aleatoria continua X tiene una distribución uniforme continua con parámetros a y b, si su función de densidad es:

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \qquad \text{para } a \leq x \leq b$$

$$F(x) = \int_a^x \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{x-a}{b-a} \qquad \text{para } a \leq x \leq b$$

Distribución Uniforme o Rectángular

- Media: $E(X) = (a+b)/2$
- Varianza: $\sigma^2 = (b-a)^2/12$



Distribución Exponencial

Tiene múltiples aplicaciones y está emparentada con la Distribución de Poisson, ya que describe el tiempo hasta que ocurre un evento de Poisson (o tiempo entre eventos de Poisson).

Distribución Exponencial

Se aplica en muchos campos, como por ejemplo:

- Modelar la vida útil de equipos y también de organismos vivos.
- En estudios de confiabilidad.
- Tiempo entre llegadas en las instalaciones de servicio.

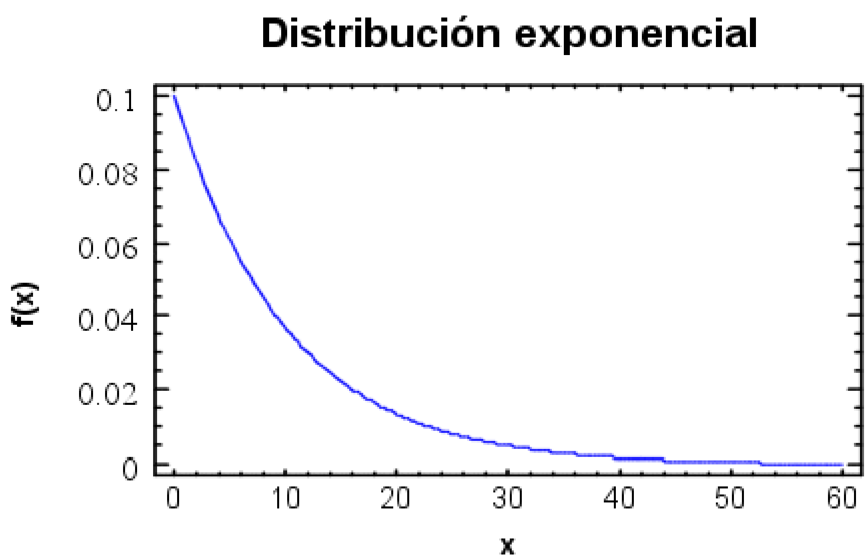
Distribución Exponencial

Definición: la variable aleatoria continua X tiene una distribución exponencial, con parámetro β, si su función de densidad es:

$$f(x) = \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta} \qquad x > 0$$

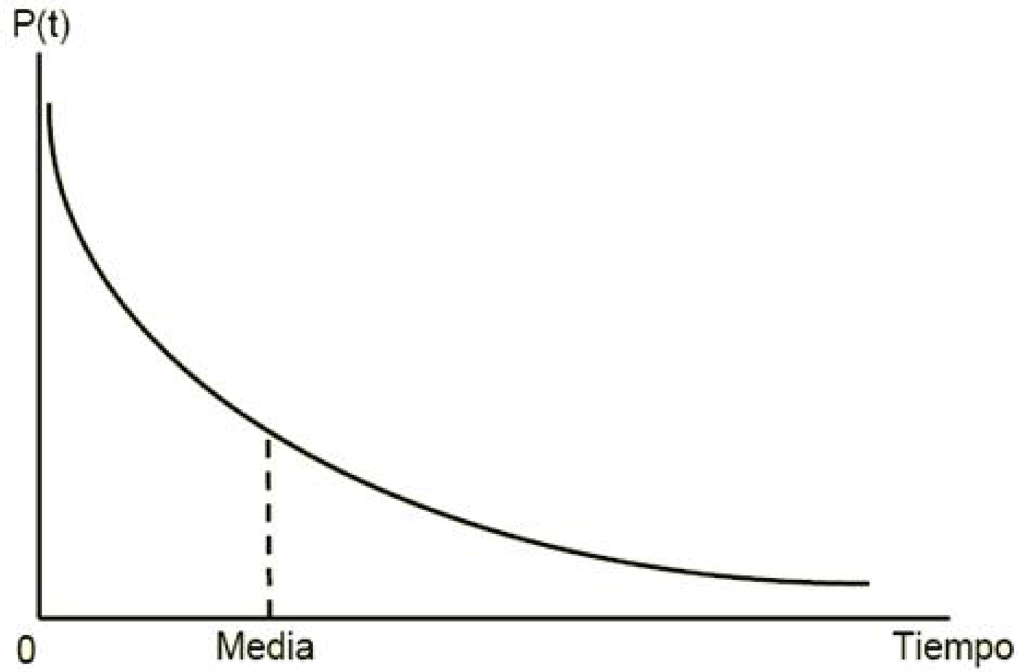
$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{\beta} e^{-t/\beta} dt = 1 - e^{-x/\beta} \qquad x > 0$$

Distribución Exponencial



- <u>Media</u>: $E(X) = \beta$
- <u>Varianza</u>: $\sigma^2 = \beta^2$

Distribución Exponencial



Distribución Normal

Es la distribución de probabilidad más importante, ya que describe en forma aproximada muchos fenómenos que ocurren en la naturaleza, la industria y la investigación.

Distribución Normal

- Una v.a. continua X que tiene la distribución en forma de campana se llama v.a. normal.
- La ecuación matemática para la distribución de probabilidad de la variable aleatoria normal, depende de los parámetros: media μ y desviación estándar σ. $X \sim$ normal $(x; \mu, \sigma)$.

Distribución Normal

Definición: La función de densidad de la v.a. normal X, con media μ y desviación estándar σ es:

$$n(x;\mu,\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-1/2[(x-\mu)/\sigma]^2} \quad para\ -\infty < x < \infty$$

Distribución Normal

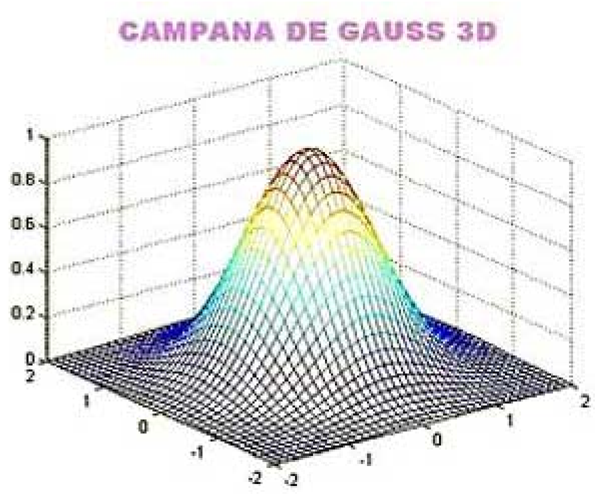
Propiedades de la curva normal:

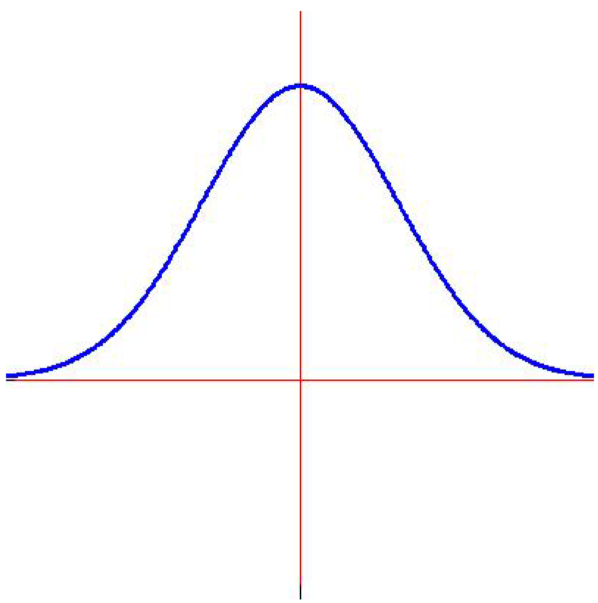
- La moda, que es el punto sobre el eje horizontal donde la curva tiene su máximo ocurre en $x = \mu$.
- La curva es simétrica respecto a su eje vertical, donde se tiene la media μ.

Distribución Normal

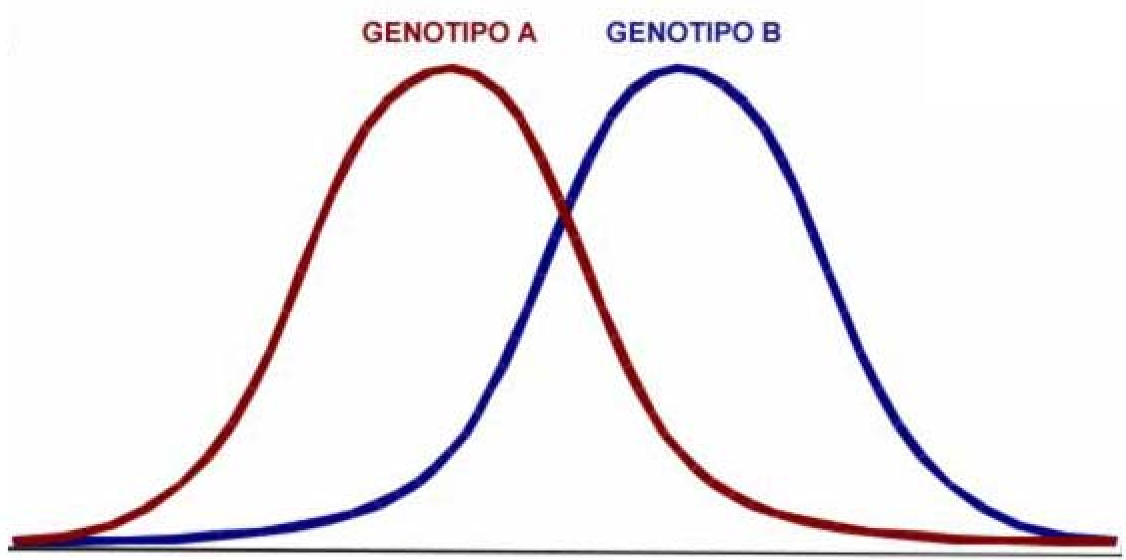
- La curva tiene sus puntos de inflexión en $x = \mu \pm \sigma$.
- La curva normal se acerca al eje horizontal en forma asintótica en cualquiera de las dos direcciones alejándose de la media.
- El área total bajo la curva y arriba del eje horizontal es igual a 1.

Distribución Normal

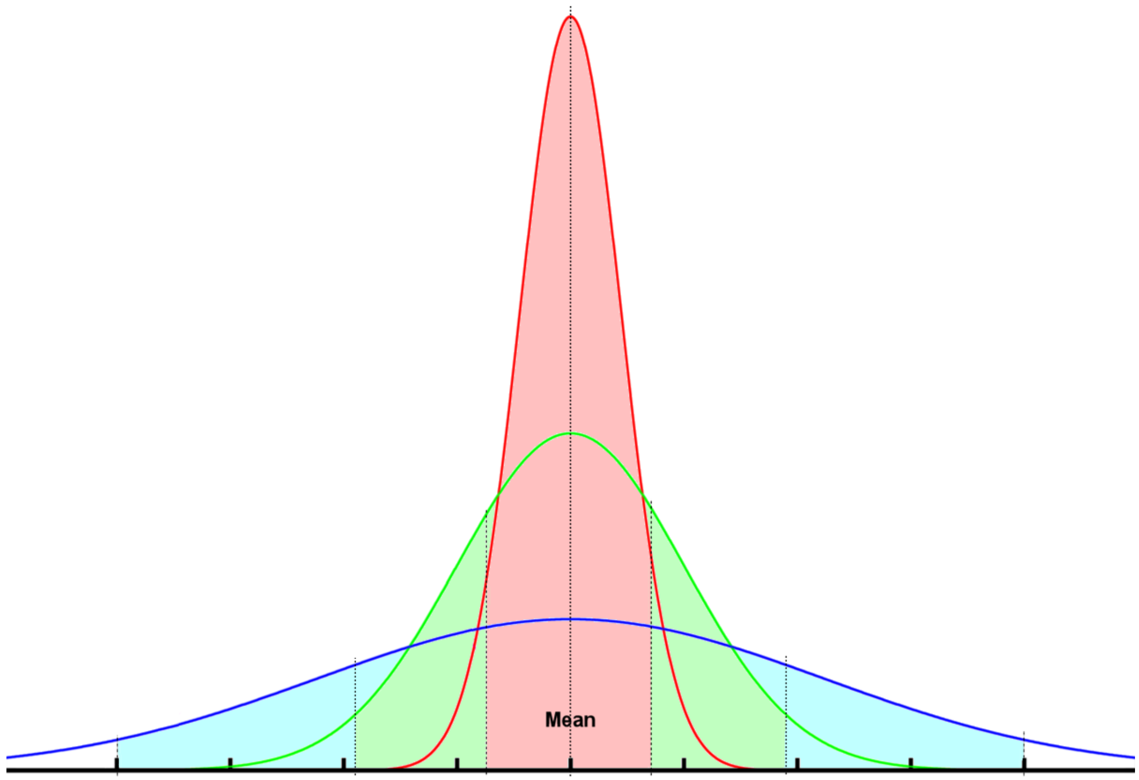




Distribución Normal



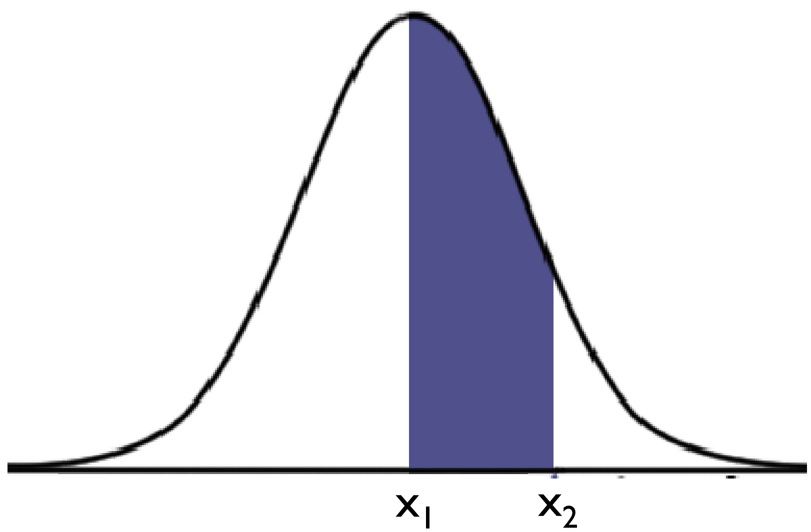
Distribución Normal



Distribución Normal

- Áreas bajo la curva normal:

$$P(x_1 < X < x_2) = \int_{x1}^{x2} n(x;\mu,\sigma)\,dx$$



Distribución Normal Estándar

Es posible transformar todas las observaciones de cualquier v.a. normal X, en un nuevo conjunto de observaciones de una v.a. normal Z, con media cero y varianza 1. Esto puede realizarse por medio de la transformación:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

que recibe el nombre de estandarización.

Distribución Normal Estándar

- Entonces $P(x_1 < X < x_2) = P(z_1 < Z < z_2)$, donde Z es una v.a. normal con media cero y varianza uno.
- Tablas de la Distribución Normal Estándar: $P(Z < z)$.

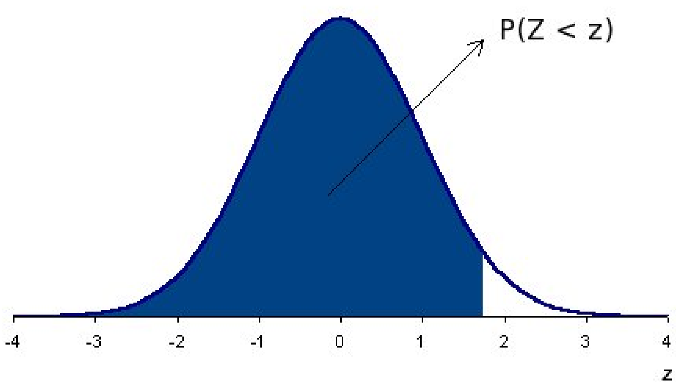
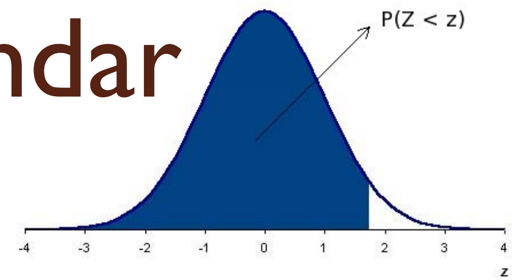


Tabla de la Normal Estándar



z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
−3.	.0013	.0010	.0007	.0005	.0003	.0002	.0002	.0001	.0001	.0000
−2.9	.0019	.0018	.0017	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014
−2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021	.0020	.0019
−2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026
−2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036
−2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051	.0049	.0048
−2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068	.0066	.0064
−2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
−2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0126	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
−2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
−2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
−1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0238	.0233
−1.8	.0359	.0352	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0300	.0294
−1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
−1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
−1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0570	.0559
−1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0722	.0708	.0694	.0681
−1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
−1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
−1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
−1.0	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
− .9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
− .8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
− .7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2297	.2266	.2236	.2206	.2177	.2148
− .6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
− .5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
− .4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
− .3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3483
− .2	.4207	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
− .1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
− .0	.5000	.4960	.4920	.4880	.4840	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7703	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9278	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9430	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9648	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9700	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9762	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9874	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9990	.9993	.9995	.9997	.9998	.9998	.9999	.9999	1.0000