UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
FACULTAD DE INGENIERIA
METODOS NUMERICOS

TEMA 1
ERRORES Y CONVERGENCIA

PROF. FRANZ RAIMUNDO

CONTENIDO:

- ¿Qué son los métodos numéricos?
- Métodos numéricos y computadoras
- Aproximaciones y errores de redondeo
- Cifras significativas
- Exactitud y precisión
- Definiciones de error
- Ejemplos

¿Qué son los métodos numéricos?

Los métodos numéricos son técnicas que permiten formular problemas matemáticos de forma que puedan resolverse utilizando operaciones aritméticas, para obtener soluciones aproximadas.

Modelos matemáticos simples → Solución analítica

Modelos matemáticos complejos → Solución aproximada

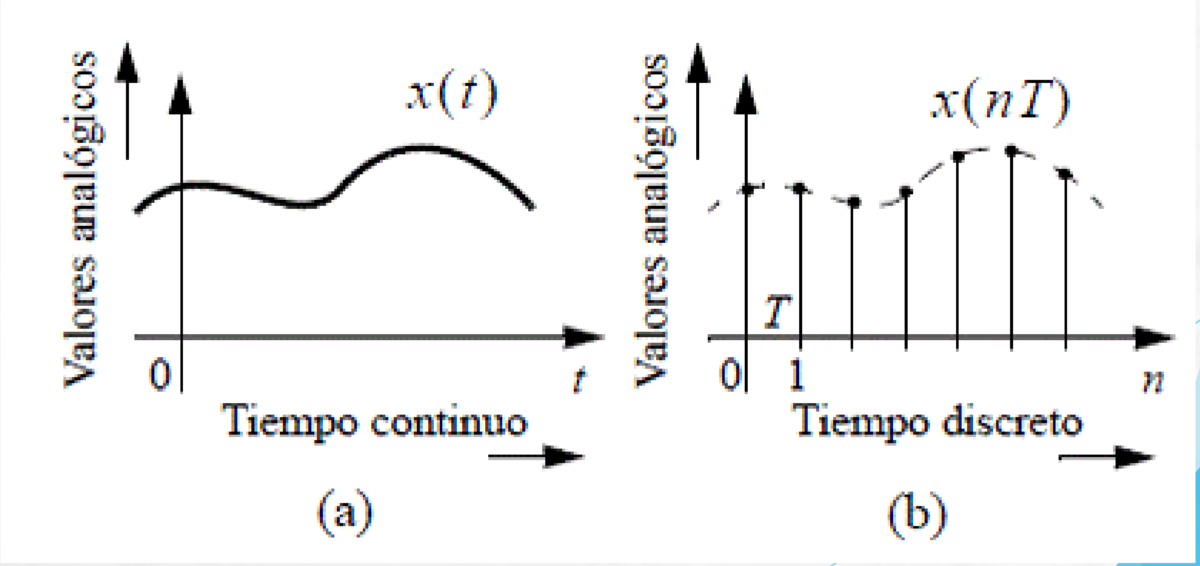
¿Qué son los métodos numéricos?

Solución analítica

Variable continua

Solución aproximada

Variable discreta



Métodos numéricos y computadoras

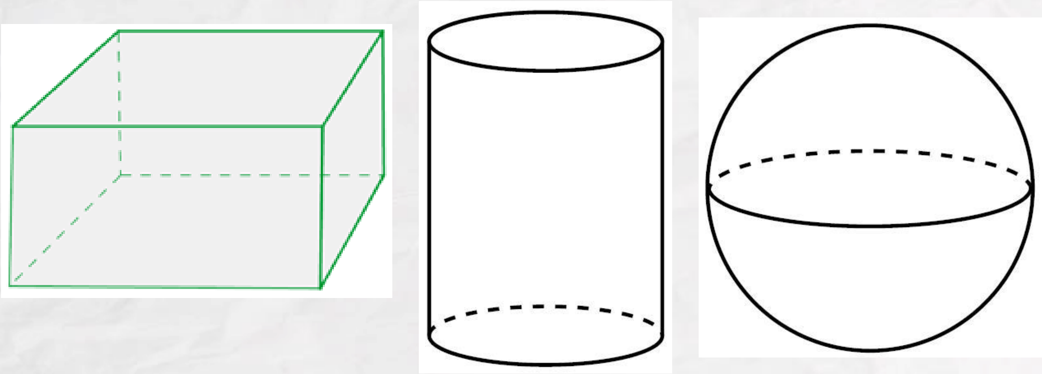
Antes de las computadoras los ingenieros solo contaban con cuatro métodos para la solución de problemas

1. Algunas soluciones se encontraban mediante métodos analíticos (exactos), sin embargo la solución exacta esta determinada por la simplicidad del problema (modelos matemáticos lineales, geometría simple y pocas variables

Métodos numéricos y computadoras

Solución analítica

Geometrías simples



Pocas variables

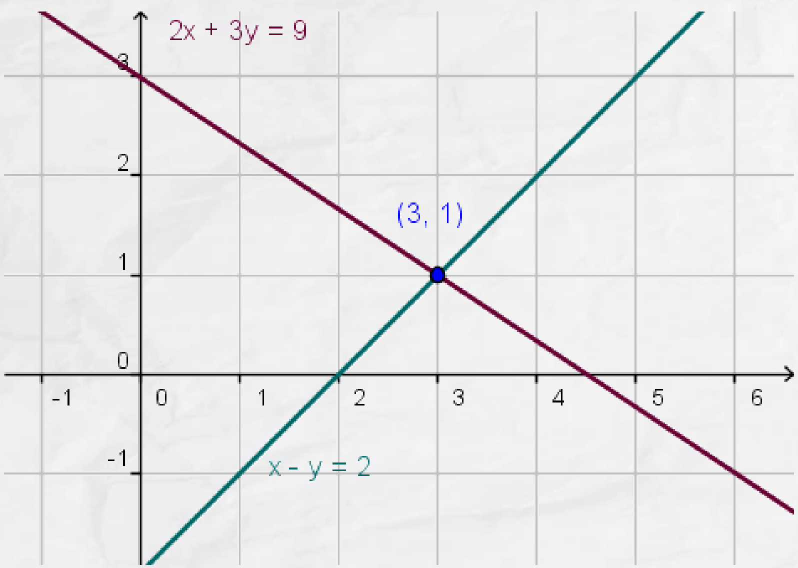
Modelos matemático lineales

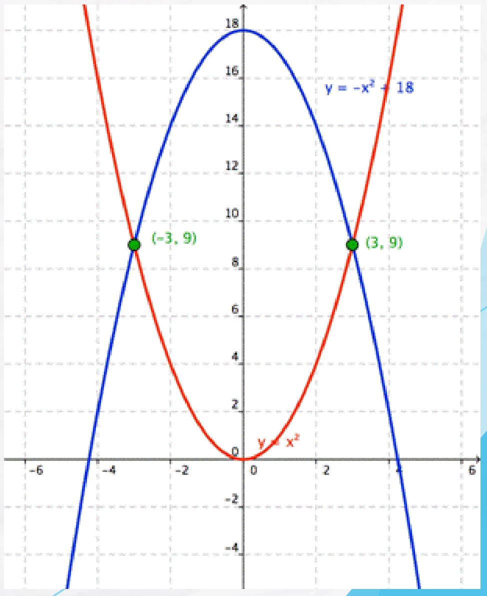
$$5x - 9 = 3(x - 2)$$

$$\frac{4}{x-3} = \frac{5}{x-2}$$

Métodos numéricos y computadoras

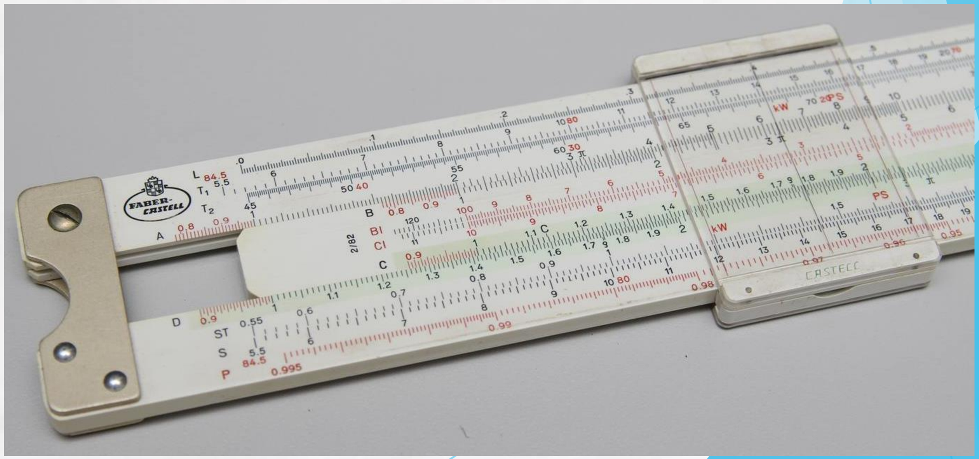
2. Para analizar el comportamiento de los sistemas se usaban soluciones gráficas. Aunque es posible obtener soluciones gráficas de problemas complejos, estas no son muy exactas, además que sin el uso de la computadora son extremadamente tediosas





Métodos numéricos y computadoras

3. Para implementar los métodos numéricos se utilizaban calculadoras y reglas de cálculo. Aunque en teoría estas aproximaciones deberían ser adecuadas, en la práctica surgen ciertos problemas, además los cálculos manuales son largos y tediosos



Métodos numéricos y computadoras

4. Finalmente, los ingenieros pueden obtener datos experimentalmente, mediante la fabricación de un prototipo o modelo

Métodos numéricos y computadoras

El uso de computadoras

Desde finales de los años 1940 el desarrollo de las computadoras llevaron a una explosión en el uso y desarrollo de los métodos numéricos, a pesar de su elevado en costo.

La constante evolución de las computadoras personales ha permitido que hoy en día muchas personas tengan acceso a poderosas capacidades de cómputo.

Métodos numéricos y computadoras

IBM Deep Blue

Métodos numéricos y computadoras

Las computadoras...

Procesan instrucciones de lógica

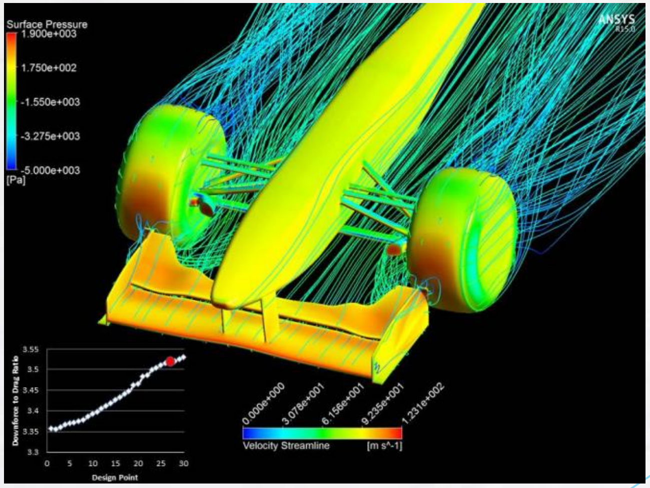
Son rápidas y precisas

Resuelven operaciones aritméticas

Métodos numéricos y computadoras

Mediante las computadoras…

1. Los métodos numéricos se convierten en herramientas poderosas para la solución de problemas, capaces de manejar sistemas de ecuaciones grandes, no lineares y geometrías complicadas, comunes en la práctica de la ingeniería



Métodos numéricos y computadoras

2. En el transcurso de su carrera, un ingeniero probablemente utilizará software disponible comercialmente que contenga métodos numéricos. El uso inteligente de estos programas depende del conocimiento básico de la teoría de estos métodos.

Métodos numéricos y computadoras

3. Hay muchos problemas que no pueden resolverse directamente en programas comerciales, por lo que si se tienen conocimientos básicos de métodos numéricos y programación es posible crear un programa propio. Además, las licencias de la mayoría de programas comerciales son bastante costosas.

Aproximaciones y errores

La mayoría de métodos numéricos son muy claros en su descripción y aplicación, por lo que resulta tentador ir directamente al uso de estas técnicas, sin embargo entender el concepto de error es importante para utilizar efectivamente estos métodos.

No debemos olvidar que los métodos numéricos proporcionan soluciones aproximadas, las cuales difieren en cierta medida de soluciones exactas (analíticas), por lo que la pregunta que debemos hacernos es ¿qué tanto error se presenta en los cálculos y qué tan tolerable es?

Aproximaciones y errores

Errores de redondeo

Los errores de redondeo se deben a que la computadora sólo puede representar cantidades con un número finito de dígitos. Comúnmente la cantidad de números con el que se trabaja está relacionada con las cifras significativas del modelo matemático o sistema.

Aproximaciones y errores

Errores de redondeo y el "efecto mariposa"

El descubridor del "efecto mariposa" fue el meteorólogo teórico estadounidense Edward Norton Lorenz, quién mediante el estudio del clima descubrió el caos: pequeñas perturbaciones en la atmósfera pueden cambiar el clima en proporciones enormes.

En 1987 el término efecto mariposa despegó gracias al libro "Caos: la creación de una ciencia"

Aproximaciones y errores

El descubrimiento del "efecto mariposa"

Edward Lorenz estaba trabajando en sus investigaciones sobre el tiempo atmosférico, mediante modelos matemáticos simples con la ayuda de computadoras, cuando, en 1960, observó que algo extraño pasaba cuando repetía cálculos anteriores.

Al simular dos meses de clima observó que los cálculos finales que salían por la impresora no tenían absolutamente nada que ver con los valores iniciales.

Aproximaciones y errores

El descubrimiento del “efecto mariposa”

En un principio pensó que la computadora se había estropeado, sin embargo al mirar más detalladamente la solución de su modelo matemático observó algo: los números que había tecleado inicialmente no eran los números originales exactos, sino valores redondeados que había dado la impresora en un principio. Los errores redondeados iniciales eran los culpables: se iban amplificando constantemente hasta dominar la solución.

Cifras Significativas

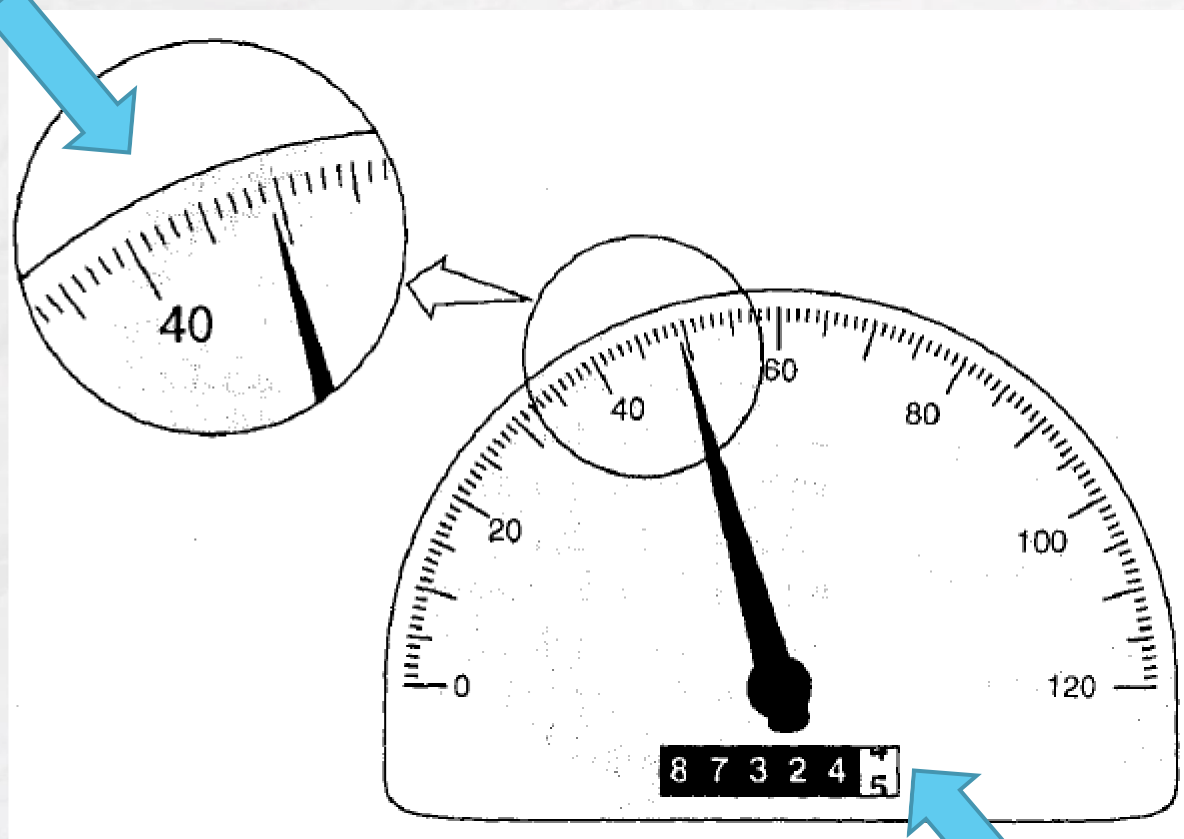
Cuando se emplea un número en un cálculo debe haber seguridad de que pueda utilizarse con confianza, por lo tanto las cifras significativas de un número son aquellas que pueden ser utilizadas en forma confiable.

Por ejemplo el velocímetro y odómetro de un automóvil ilustra perfectamente el concepto de cifras significativas.

Cifras Significativas

$\boxed{49,5}$ Tres cifras significativas

49,56423



Seis cifras significativas

Cifras Significativas

¿Qué sucede con los ceros?

Los números:
0,00001845
0,0001845 → Cuatro cifras significativas
0,001845

Mientras el número 45300 puede tener tres, cuatro o cinco cifras significativas dependiendo si los ceros se conocen con exactitud

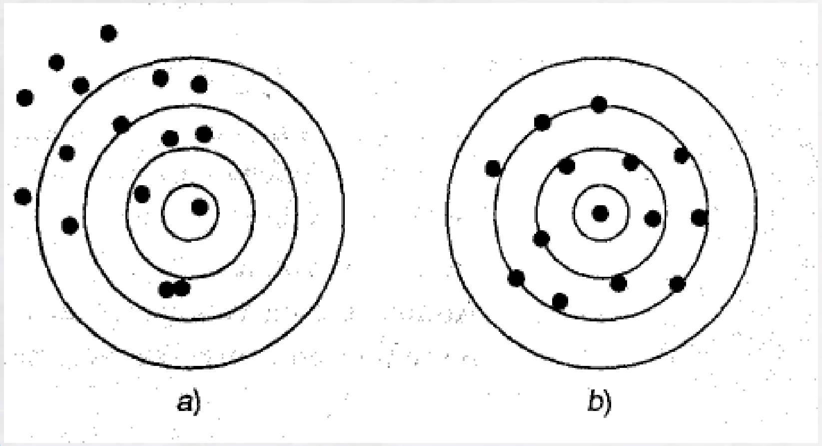
$$4,53x10^4 \quad 4,530x10^4 \quad 4,5300x10^4$$

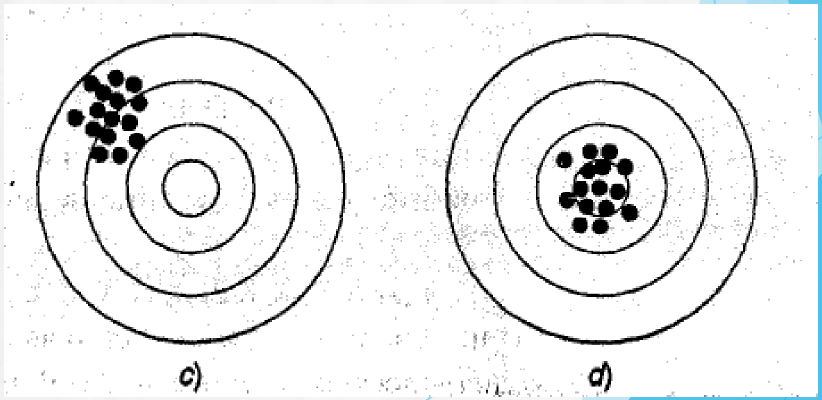
$$\pi = 3,14159265358979323846243....$$

Exactitud y precisión

La *exactitud* se refiere a que tan cercano está el valor calculado o medido del valor verdadero.

La *precisión* se refiere a que tan cercanos se encuentran, unos de otros, diversos valores calculados o medidos.





Definiciones de error

Los errores numéricos surgen del uso de aproximaciones para representar operaciones y cantidades matemáticas exactas.

Existen distintos errores que se pueden calcular durante el uso de los métodos numéricos, entre los que se encuentran:

Error verdadero

$$E_t = |Valor\ verdadero - Valor\ aproximado|$$

Definiciones de error

Error relativo

$$Error\ relativo\ \ fraccional = \frac{Error\ verdadero}{Valor\ verdadero}$$

Error relativo porcentual

$$\varepsilon_t = \frac{\left|Valor\ verdadero - Valor\ aproximado\right|}{Valor\ verdadero}100\%$$

Definiciones de error

Ejemplos de error verdadero y relativo

$$Valor\ verdadero = 10000\ cm$$
$$Valor\ medido = 9999\ cm$$

$$E_t = 1\,cm$$
$$\varepsilon_t = 0.01\,\%$$

$$Valor\ verdadero = 10\ cm$$
$$Valor\ medido = 9\ cm$$

$$E_t = 1\,cm$$
$$\varepsilon_t = 10\,\%$$

Definiciones de error

Error aproximado porcentual

Métodos iterativos

$$\varepsilon_a = \frac{\left| aproximación\ actual - aproximación\ anterior \right|}{aproximación\ actual} 100\%$$

Definiciones de error

Errores de truncamiento

Los errores de truncamiento son aquellos que resultan al utilizar una aproximación en lugar de un procedimiento matemático exacto, como por ejemplo la serie de Taylor.

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n$$

Definiciones de error

Errores de truncamiento

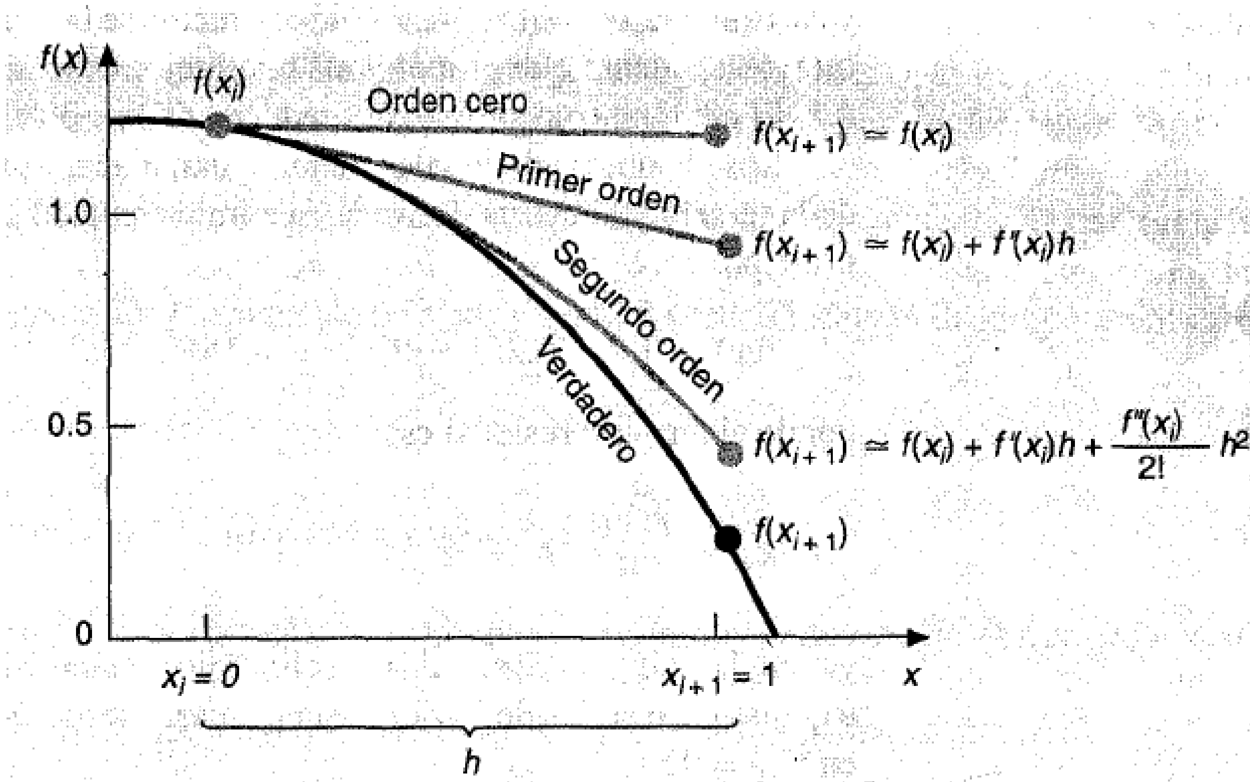


FIGURA 4.1
La aproximación de $f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2$ en $x = 1$ mediante

Ejemplos cálculo de errores

Error relativo y error aproximado porcentual

Ejemplo 1. En matemáticas a menudo se pueden representar las funciones mediante una serie infinita. Por ejemplo la función exponencial se puede calcular usando la serie de Maclaurin.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

Empezando con el primer término de la serie y agregando un término a la vez, estime el valor de f(x=0,5). Después de agregar cada término, calcule el error relativo y aproximado porcentual, utilizando 7 cifras significativas.

Ejemplos cálculo de errores

Ejemplo 1. Solución:

Primer término de la serie.

$$e^{x} = 1$$

El valor verdadero de la función evaluada en x=0.5 es:

$$e^{0.5} = 1.648721$$

$$\varepsilon_t = \frac{|Valor\ verdadero - Valor\ aproximado|}{Valor\ verdadero} 100\%$$

$$\varepsilon_t = \frac{|1.648721 - 1|}{1.648721} 100\% = 39.35\%$$

El error aproximado es 100% para el primer término de la serie, ya que no se tiene una aproximación previa.

Ejemplos cálculo de errores

Segundo término de la serie.

$$e^{x} = 1 + x \Rightarrow e^{0.5} = 1 + 0.5 = 1.5$$

Error relativo:

$$\varepsilon_t = \frac{|1.648721 - 1.5|}{1.648721} 100\% = 9.02\%$$

Error aproximado:

$$\varepsilon_a = \frac{|aproximación\ actual - aproximación\ anterior|}{aproximación\ actual} 100\%$$

$$\varepsilon_a = \frac{|1.5 - 1|}{1.5} 100\% = 33.3\%$$

Ejemplos cálculo de errores

Tercer término de la serie.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} = 1 + 0.5 + \frac{0.5^2}{2!} = 1.625$$

Error relativo:

$$\varepsilon_t = \frac{|1.648721 - 1.625|}{1.648721} 100\% = 1.44\%$$

Error aproximado:

$$\varepsilon_a = \frac{|1.625 - 1.5|}{1.625} 100\% = 7.69\%$$

Ejemplos cálculo de errores

Resultados:

Términos	Resultado	$\varepsilon_t\%$	$\varepsilon_a\%$
1	1	39.3	100
2	1.5	9.02	33.3
3	1.625	1.44	7.69
4	1.645833	0.175	1.27
5	1.648438	0.0172	0.158
6	1.648698	0.00142	0.0158

Ejemplos cálculo de errores

Errores de redondeo

Ejemplo 2.1 Evalué el polinomio: $y = x^3 - 5x^2 + 6x + 0.55$

En x= 2.73. Use 3 cifras significativas con corte y evalúe el error relativo porcentual.

Ejemplo 2.2 Evalué el mismo polinomio del ejemplo 2.1, en x=2.73 expresado de la siguiente manera:

$$y = \left[x\left(x - 5 \right) + 6 \right] x + 0.55$$

Use 3 cifras significativas con corte y evalúe el error relativo porcentual. Compare con el ejemplo 2.1

Ejemplos cálculo de errores

Ejemplo 2.1 Solución:

El valor verdadero del polinomio evaluado en x=2.73 es 0.011917

Al utilizar tres cifras significativas y redondear:

$$y = 20.346417 - 37.2645 + 16.38 + 0.55$$

$$y = 20.3 - 37.3 + 16.4 + 0.55 = -0.0499$$

$$\varepsilon_t = \frac{|0.011917 - (-0.0499)|}{0.011917} 100\% = 518.73\%$$

Ejemplos cálculo de errores

Ejemplo 2.2 Solución:

$$y = \left[x\left(x-5\right)+6\right]x+0.55$$

$$y = \left[-6.1971+6\right]*2.73+0.55 = \left[-6.20+6\right]*2.73+0.55$$

$$y = \left[-0.20\right]*2.73+0.55 = -0.546+0.55$$

$$y = 0.004$$

$$\varepsilon_t = \frac{\left|0.011917 - 0.004\right|}{0.011917}100\% = 66.43\%$$

Ejemplos cálculo de errores

Error de truncamiento

Ejemplo 3. Se tiene la función: $f(x) = x^m$

Para m= 1,2 y 3 sobre el rango de x=1 a 2, utilice la serie de Taylor de primer orden para estimar el valor de f(x) en distintos valores de m. Calcule el error de truncamiento. Recuerde que la serie de Taylor se expresa como:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n$$

Ejemplos cálculo de errores

La serie de Taylor de primer orden para la función f(x), se puede expresar de la siguiente manera:

$$f(x_i+1) = f(x_i) + m x_i^{m-1} h; \;\; h = (x_i+1) - x_i$$

Mientras el residuo de la serie de Taylor serían los demás términos de la serie:

$$R = \frac{f''(x_i)}{2!} h^2 + \frac{f^{(3)}(x_i)}{3!} h^3 + \ldots.$$

Al omitir términos en la serie, se producen errores de truncamiento en la aproximación

Ejemplos cálculo de errores

Para m=1 y $x_i + 1 = 2$

$$f(x_i) = f(1) = (1)^1 = 1 \qquad h = (x_i + 1) - x_i = 2 - 1 = 1$$

$$f(x_i + 1) = 1 + 1(1)^{1-1}(1) = 2$$

$$R = \frac{f''(x_i)}{2!} h^2 + \frac{f^{(3)}(x_i)}{3!} h^3 = 0$$

Para la función de orden 1, el residuo es cero puesto que la derivada de segundo y tercer orden son cero.

Ejemplos cálculo de errores

Para m=2 y $x_i + 1 = 2$

$$f(x_i) = f(1) = (1)^2 = 1$$

$$f(x_i + 1) = 1 + 2(1)^{2-1}(1) = 3$$

El valor verdadero de la función es:

$$f(2) = (2)^2 = 4$$

$$R = \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + \frac{f^{(3)}(x_i)}{3!}h^3 = \frac{1}{2}(2) + 0 = 1$$

Como se puede observar, la discrepancia entre el valor verdadero y el valor aproximado es producto del error de truncamiento, al omitir términos de la serie

Ejemplos cálculo de errores

Para m=3 y $x_i + 1 = 2$

$$f(x_i) = f(1) = (1)^2 = 1$$

$$f(x_i + 1) = 1 + 3(1)^{3-1}(1) = 4$$

El valor verdadero de la función es:

$$f(2) = (2)^3 = 8$$

$$R = \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + \frac{f^{(3)}(x_i)}{3!}h^3 = \frac{6}{2}(1)(1^2) + \frac{6}{6}(1^3) = 4$$

El residuo aumenta a medida que lo hace el exponente de la función, por lo tanto el error de truncamiento es mayor.