UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
FACULTAD DE INGENIERIA
METODOS NUMERICOS

TEMA 2
SOLUCION SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

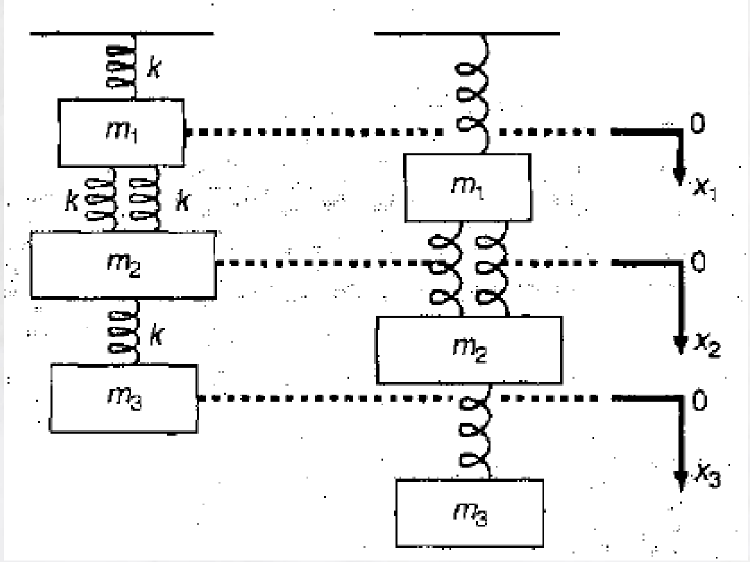
PROF. FRANZ RAIMUNDO

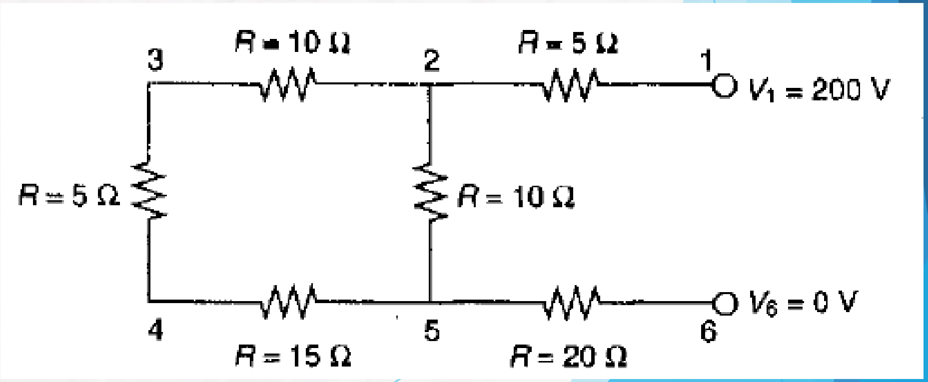
CONTENIDO:

- Introducción
- Solución de sistemas de ecuaciones pequeños
- Método de eliminación de Gauss
- Método de Gauss Jordan
- Método de Gauss Seidel
- Desventajas métodos de eliminación
- Técnicas para mejorar la solución
- Aplicaciones
- Ejemplos

INTRODUCCION

Muchas de las ecuaciones fundamentales de ingeniería se basan en leyes de conservación (masa, energía y momentum) y principios físicos (ley de newton, ley de ohm), las cuales permiten el modelado matemático de distintos sistemas.





INTRODUCCION

Los sistemas de ecuaciones lineales generalmente tienen la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
$$

Los coeficientes y variables de las ecuaciones pueden agruparse en notación matricial, de la forma:

$$[A]\{x\} = \{B\}$$

INTRODUCCION

Notación matricial

$[A]$ Matriz de coeficientes

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$\{X\}$ Vector columna incógnitas

$\{B\}$ Vector columna términos independientes

INTRODUCCION

Formas especiales de matrices cuadradas

$$[A] = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 7 \\ 2 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

Simétrica

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & a_{33} & \\ & & & a_{44} \end{bmatrix}$$

Diagonal

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

Identidad

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ & & a_{33} & a_{34} \\ & & & a_{44} \end{bmatrix}$$

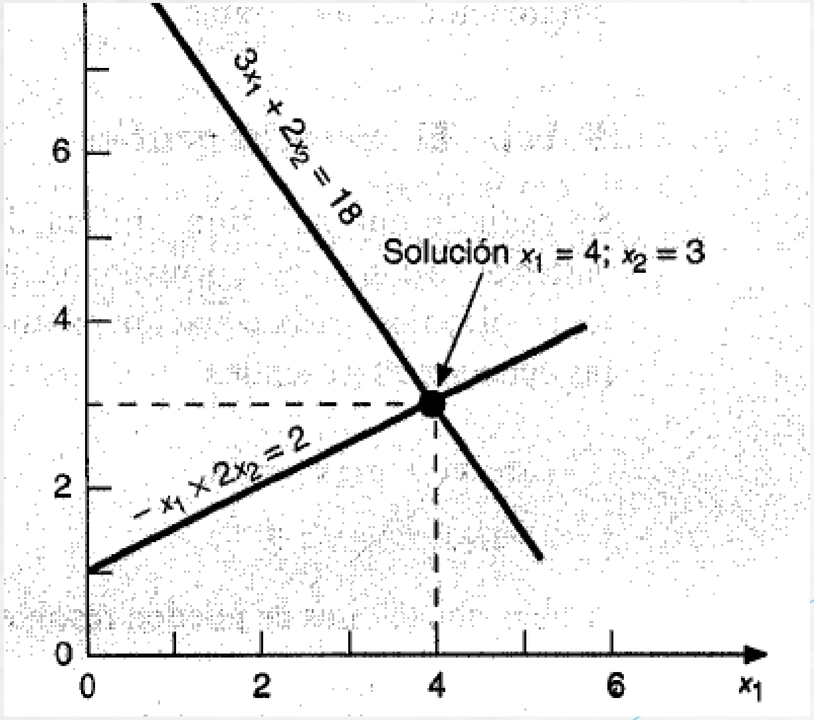
Triangular superior

SOLUCION DE SISTEMAS PEQUEÑOS

Método Gráfico

El siguiente sistema de ecuaciones puede resolverse gráficamente:

$$3x_1 + 2x_2 = 18$$
$$x_1 + 2x_2 = 2$$



SOLUCION DE SISTEMAS PEQUEÑOS

Regla de Cramer

Sistemas de ecuaciones pequeños 2x2 o 3x3, pueden resolverse mediante la regla de Cramer

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

$$[A]= \begin{bmatrix} a_{11} + a_{12} + a_{13} \\ a_{21} + a_{22} + a_{23} \\ a_{31} + a_{32} + a_{33} \end{bmatrix} \qquad D= \begin{vmatrix} a_{11} + a_{12} + a_{13} \\ a_{21} + a_{22} + a_{23} \\ a_{31} + a_{32} + a_{33} \end{vmatrix}$$

SOLUCION DE SISTEMAS PEQUEÑOS

Regla de Cramer

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 + a_{12} + a_{13} \\ b_2 + a_{22} + a_{23} \\ b_3 + a_{32} + a_{33} \end{vmatrix}}{D}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} + b_1 + a_{13} \\ a_{21} + b_2 + a_{23} \\ a_{31} + b_3 + a_{33} \end{vmatrix}}{D}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} + a_{12} + b_1 \\ a_{21} + a_{22} + b_2 \\ a_{31} + a_{32} + b_3 \end{vmatrix}}{D}$$

MÉTODO DE ELIMINACIÓN DE GAUSS

Es un método de eliminación de incógnitas diseñado para resolver sistemas de n ecuaciones con n incógnitas de la forma:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
$$

Consta de dos etapas:

- Eliminación de incógnitas hacia adelante.
- Sustitución hacia atrás.

MÉTODO DE ELIMINACIÓN DE GAUSS

Eliminación hacia adelante

Durante esta etapa la finalidad es obtener una matriz triangular superior, utilizando elementos pivote y eliminando los mismos de las ecuaciones pivote, de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \cdots + a'_{2n}x_n &= b'_2 \\
a''_{33}x_3 + \cdots + a''_{3n}x_n &= b''_3 \\
\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad & \\
a''_{n3}x_3 + \cdots + a''_{nn}x_n &= b''_n
\end{aligned}
$$

MÉTODO DE ELIMINACIÓN DE GAUSS

Sustitución hacia atrás

Una vez reducido el sistema de ecuaciones a un sistema triangular superior, se procede a calcular las variables de adelante hacia atrás, es decir partiendo de la variable que queda sola en la matriz triangular.

MÉTODO DE ELIMINACIÓN DE GAUSS

Ejemplo:

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales mediante el método de eliminación de Gauss:

$$3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 = 7.85$$
$$0.1x_1 + 7x_2 - 0.3x_3 = -19.3$$
$$0.3x_1 - 0.2x_2 + 10x_3 = 71.4$$

Efectúe los cálculos con seis cifras significativas.

MÉTODO DE GAUSS - JORDAN

El método de Gauss - Jordan es una variación de la eliminación de Gauss. La principal diferencia consiste en que cuando una incógnita se elimina, ésta es eliminada de todas las ecuaciones.

Además, todos los renglones se normalizan al dividirlos entre su elemento pivote, de esta forma se genera una matriz identidad en vez de una triangular, en consecuencia no es necesario utilizar la sustitución hacia atrás para obtener la solución.