UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

FACULTAD DE INGENIERIA

METODOS NUMERICOS

TEMA 3
AJUSTE DE CURVAS

PROF. FRANZ RAIMUNDO

CONTENIDO:

- Introducción
- Regresión por mínimos cuadrados
  - Regresión lineal
  - Regresión de polinomios
- Interpolación
- Aplicación: Ajuste de curvas de bombas centrífugas

INTRODUCCION

Los datos a menudo son dados para valores discretos a lo largo de un continuo. Sin embargo, se puede requerir una estimación en puntos entre los valores discretos. En este tema se describen técnicas para el ajuste de curvas de tales datos, para obtener estimaciones intermedias.

REGRESION POR MINIMOS CUADRADOS

Una estrategia apropiada cuando se tienen datos o valores discretos con cierto ruido, es derivar una función aproximada que se ajuste a la forma de la tendencia general de los datos sin ajustar necesariamente los puntos individuales.

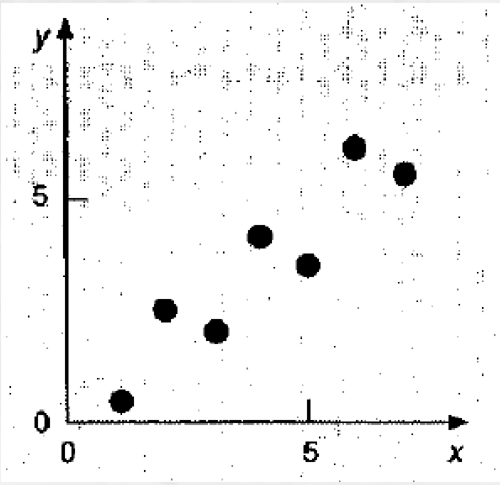
Una manera para determinar la línea de tendencia es inspeccionar en forma visual los datos graneados y después trazar la “mejor“ línea a través de los puntos, sin embargo esta técnica resulta arbitraria.

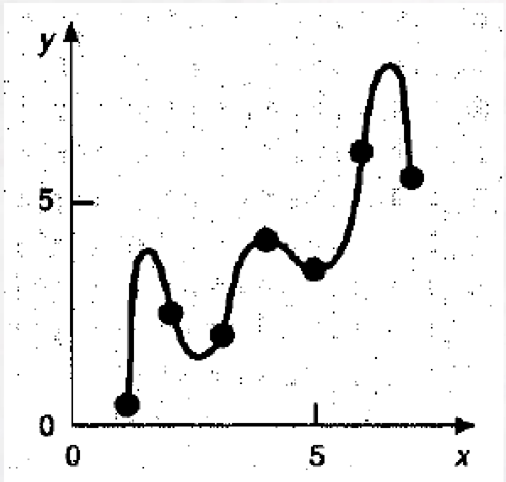
Para dejar a un lado la subjetividad, se puede derivar una curva que minimice la discrepancia entre los puntos y la curva, mediante la técnica de mínimos cuadrados.

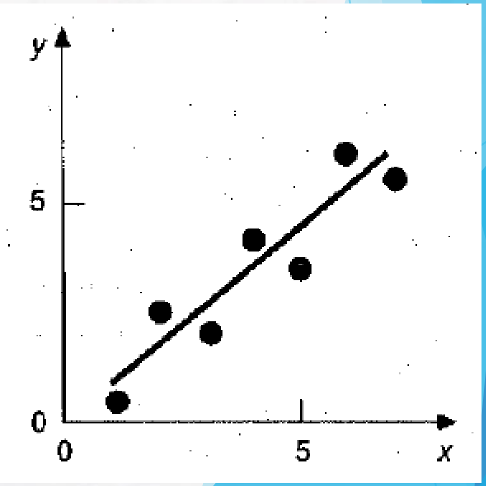
REGRESION LINEAL

El ejemplo más simple de una aproximación por mínimos cuadrados es mediante el ajuste de un conjunto de valores discretos a una línea recta, cuya expresión matemática es:

$$y = a_0 + a_1 x + e$$







REGRESION LINEAL

Una manera de reducir el ruido de los datos y obtener un mejor ajuste, es minimizar la suma de los cuadrados de los residuos.

$$S_r = \sum_{i=1}^{n} e_i^{\,2} = (y_i - a_0 - a_1 x_i)^2$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_0} = -2\sum (y_i - a_0 - a_1 x_i) = 0$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_1} = -2\sum \left[(y_i - a_0 - a_1 x_i) x_i \right] = 0$$

REGRESION LINEAL

Para minimizar la expresión, se iguala a cero:

$$\sum y_i - \sum a_0 - \sum a_1 x_i = 0$$

$$\sum y_i x_i - \sum a_0 x_i - \sum a_1 x_i^{\ 2} = 0$$

Reacomodando se obtienen dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$na_0 + (\sum x_i) a_1 = \sum y_i$$

$$(\sum x_i)\, a_0 + (\sum x_i^{\ 2}) a_1 = \sum x_i y_i$$

REGRESION LINEAL

Al resolver el sistema de ecuaciones lineales se obtiene:

$$a_1 = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^{\,2} - (\sum x_i)^2}$$

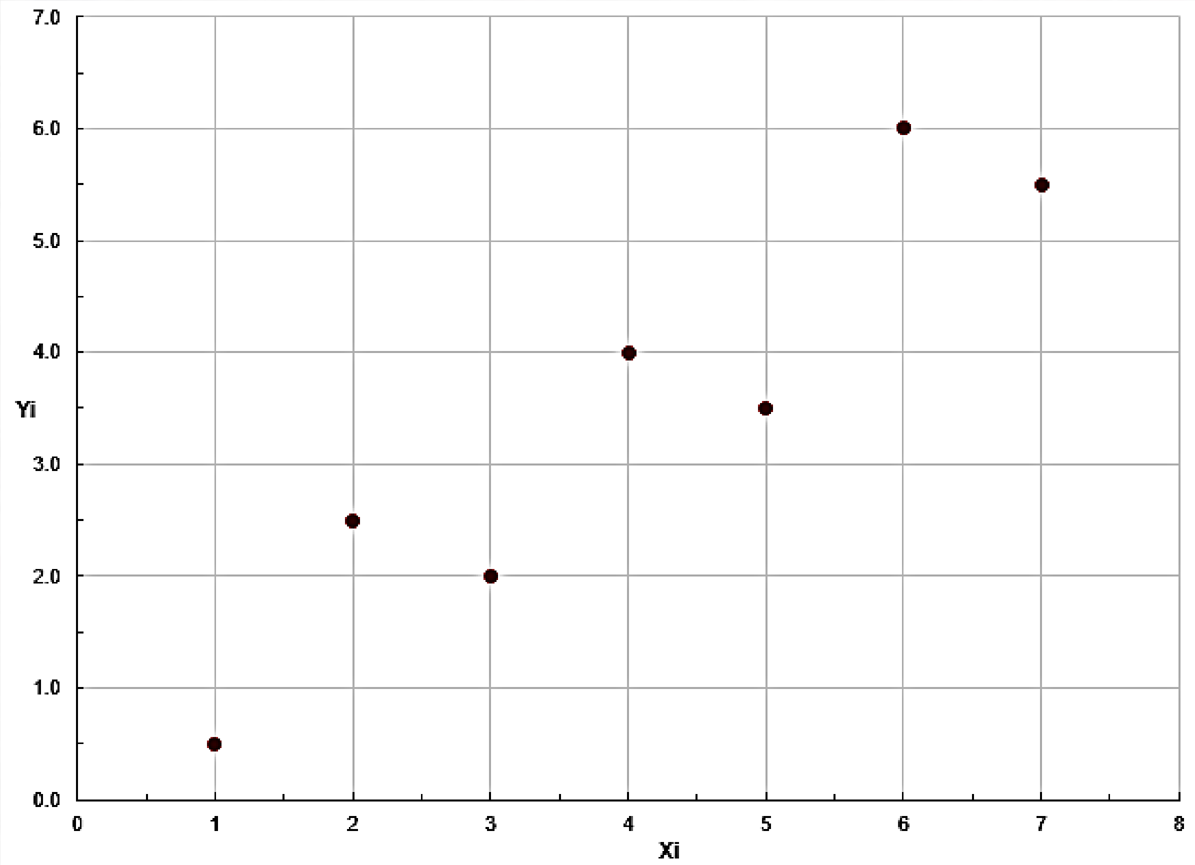
$$a_0 = \bar{y} - a_1 \bar{x}$$

REGRESION LINEAL

Ejemplo 1. Ajuste a una línea recta los datos que se muestran a continuación:

x	y
1	0.5
2	2.5
3	2.0
4	4.0
5	3.5
6	6.0
7	5.5

REGRESION LINEAL



Al graficar los valores suministrados, se observa que los mismos siguen una tendencia lineal, por lo tanto el método de regresión lineal es apropiado para ajustar los datos.

REGRESION LINEAL

	Xi	Yi	Xi^2	Xi*Yi
	1	0.5	1	0.5
	2	2.5	4	5
	3	2.0	9	6
	4	4.0	16	16
	5	3.5	25	17.5
	6	6.0	36	36
	7	5.5	49	38.5
Σ	28	24	140	119.5

$$a_1 = \frac{7 \cdot 119.5 - 28 \cdot 24}{7 \cdot 140 - (28)^2}$$

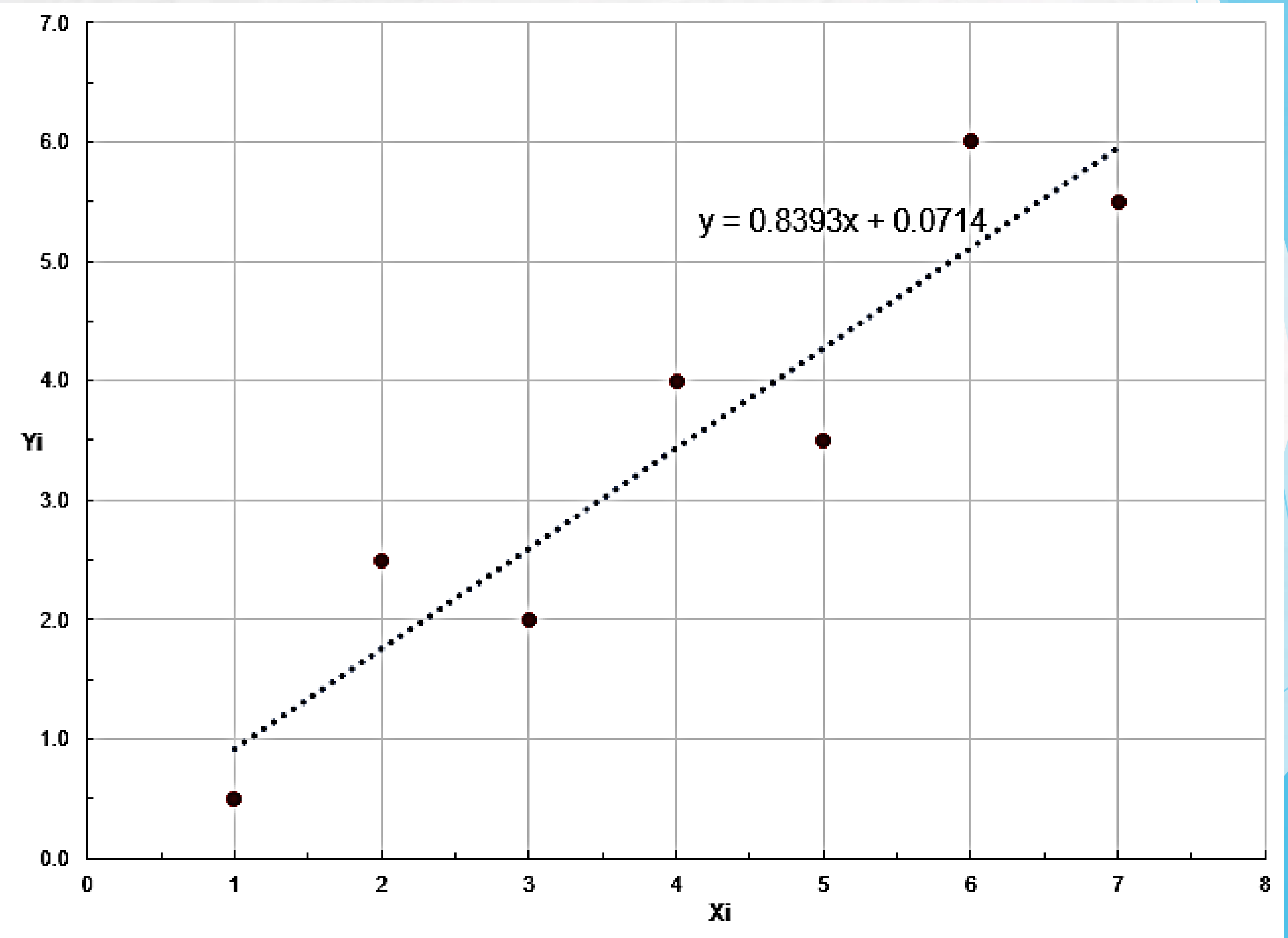
$$a_0 = \left(\frac{24}{7}\right) - 0.8393 \cdot \left(\frac{28}{7}\right)$$

$$a_1 = 0.8393$$

$$a_0 = 0.0714$$

$$\boxed{y = 0.8393x + 0.0714}$$

REGRESION LINEAL



REGRESION DE POLINOMIOS

En ocasiones los valores discretos o datos no se agrupan mostrando una tendencia lineal, ajustándose mejor a una curva, como un polinomio. En estos casos, si se aplica la regresión lineal para ajustar los datos esta resulta incorrecta, ya que los mismos no muestran una tendencia lineal, por lo que se debe realizar una regresión polinomial.

El procedimiento de regresión por mínimos cuadrados también se aplica para ajustar los datos a un polinomio de la forma:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + e$$

REGRESION DE POLINOMIOS

Al igual que en la regresión lineal, se busca minimizar la suma del cuadrado de los errores.

$$S_r = \sum_{i=1}^{n} e_i^{\,2} = (y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^{\,2})^2$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_0} = -2\sum (y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^{\,2}) = 0$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_1} = -2\sum (y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^{\,2}) x_i = 0$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_2} = -2\sum (y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^{\,2}) x_i^{\,2} = 0$$

REGRESION DE POLINOMIOS

Acomodando las expresiones se obtiene:

$$na_0 + a_1 \sum x_i + a_2 \sum x_i^{\,2} = \sum y_i$$

$$a_0 \sum x_i + a_1 \sum x_i^{\,2} + a_2 \sum x_i^{\,3} = \sum x_i y_i$$

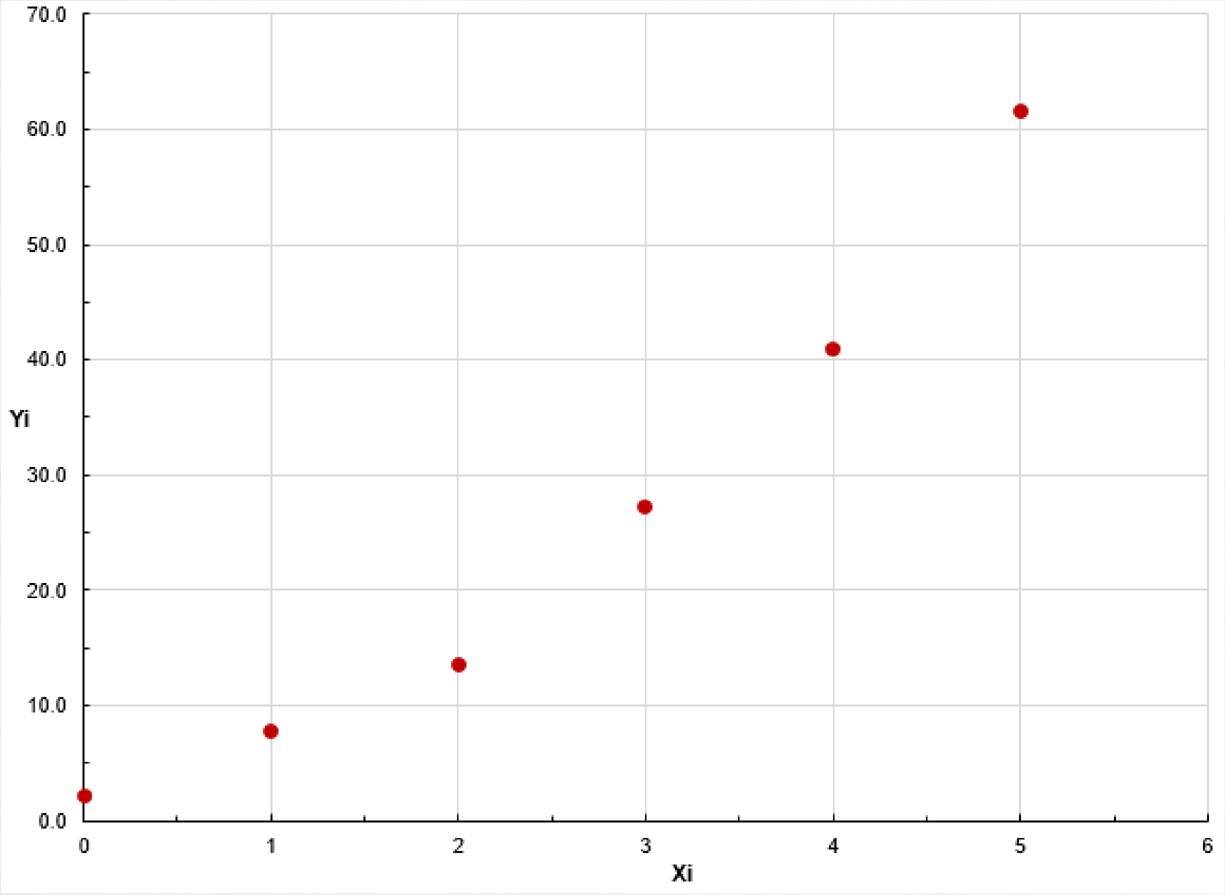
$$a_0 \sum x_i^{\,2} + a_1 \sum x_i^{\,3} + a_2 \sum x_i^{\,4} = \sum x_i^{\,2} y_i$$

REGRESION DE POLINOMIOS

Ejemplo 2. Ajustar a un polinomio de segundo orden los datos que se muestran a continuación

x	y
0	2.1
1	7.7
2	13.6
3	27.2
4	40.9
5	61.6

REGRESION DE POLINOMIOS



Al graficar los valores suministrados, se observa que los mismos siguen una tendencia de línea curva, por lo tanto el método de regresión lineal no es apropiado y se debe emplear la regresión de polinomios.

REGRESION DE POLINOMIOS

	Xi	Yi	Xi^2	Xi^3	Xi^4	Xi*Yi	Xi^2*Yi
	0	2.1	0	0	0	0	0
	1	7.7	1	1	1	7.7	7.7
	2	13.6	4	8	16	27.2	54.4
	3	27.2	9	27	81	81.6	244.8
	4	40.9	16	64	256	163.6	654.4
	5	61.6	25	125	625	308	1540
Σ	**15**	**153.1**	**55**	**225**	**979**	**588.1**	**2501.3**

$$6a_0 + 15a_1 + 55a_2 = 153.1$$

$$15a_0 + 55a_1 + 225a_2 = 588.1$$

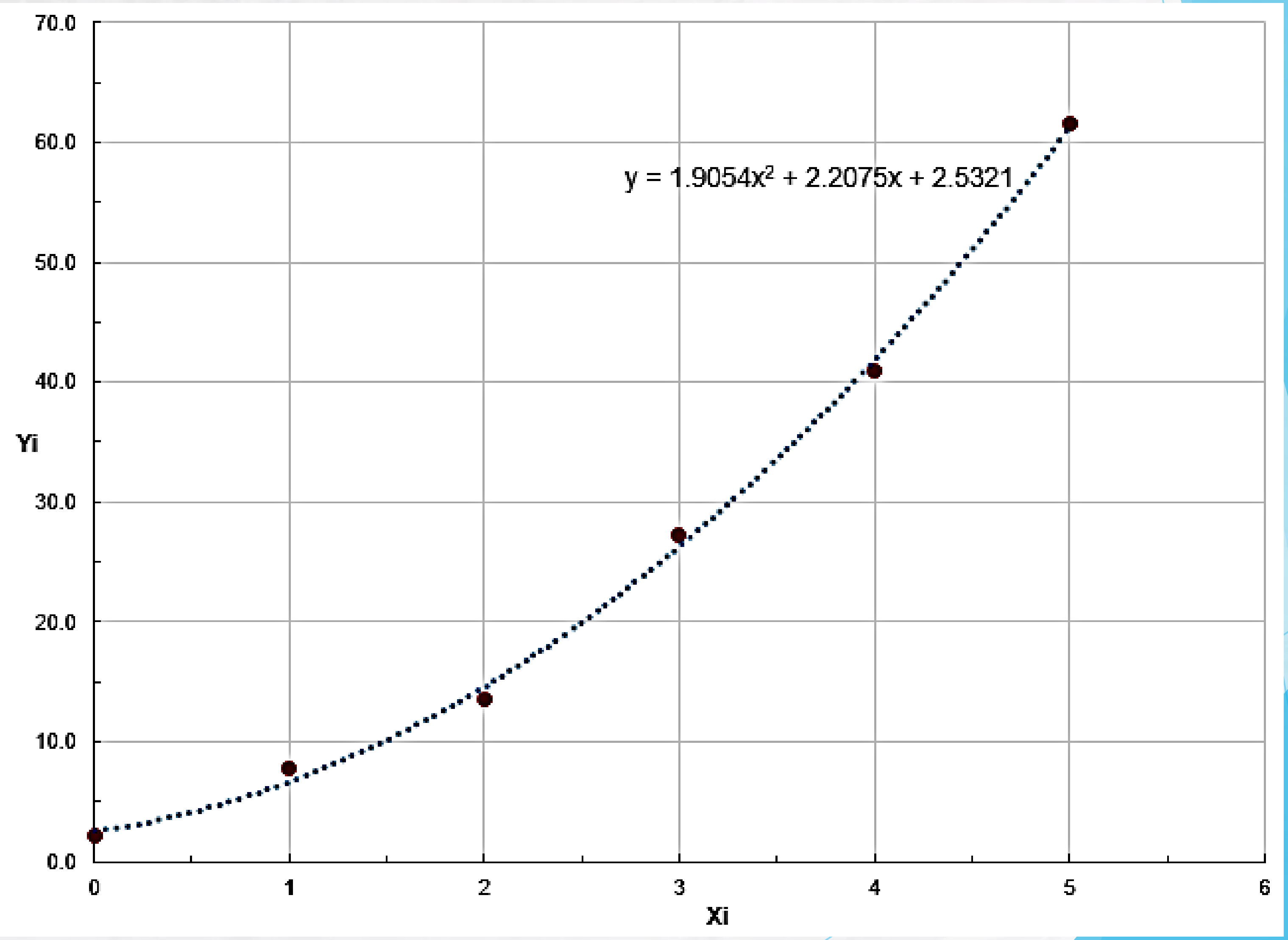
$$55a_0 + 225a_1 + 979a_2 = 2501.3$$

$$\boxed{a_0 = 2.532}$$

$$\boxed{a_1 = 2.208}$$

$$\boxed{a_2 = 1.905}$$

REGRESION DE POLINOMIOS



INTERPOLACION

A menudo es necesario estimar valores intermedios entre datos precisos. El método más común que se usa para este propósito es la interpolación de un polinomio de la forma:

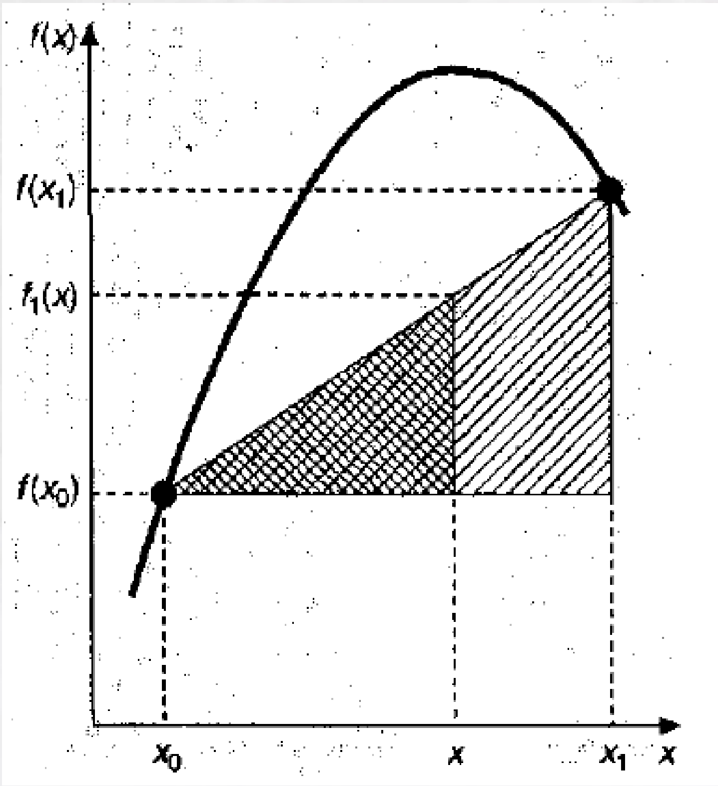
$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

El orden del polinomio depende de la forma en que se agrupen los datos. La interpolación más sencilla se obtiene para un polinomio de orden uno (línea recta) y se conoce como interpolación lineal.

INTERPOLACION

Interpolación lineal

El método de interpolación más sencillo consiste en unir dos valores exactos mediante una línea recta y estimar valores intermedios.



Semejanza de triángulos

$$\frac{f_1(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$

INTERPOLACION

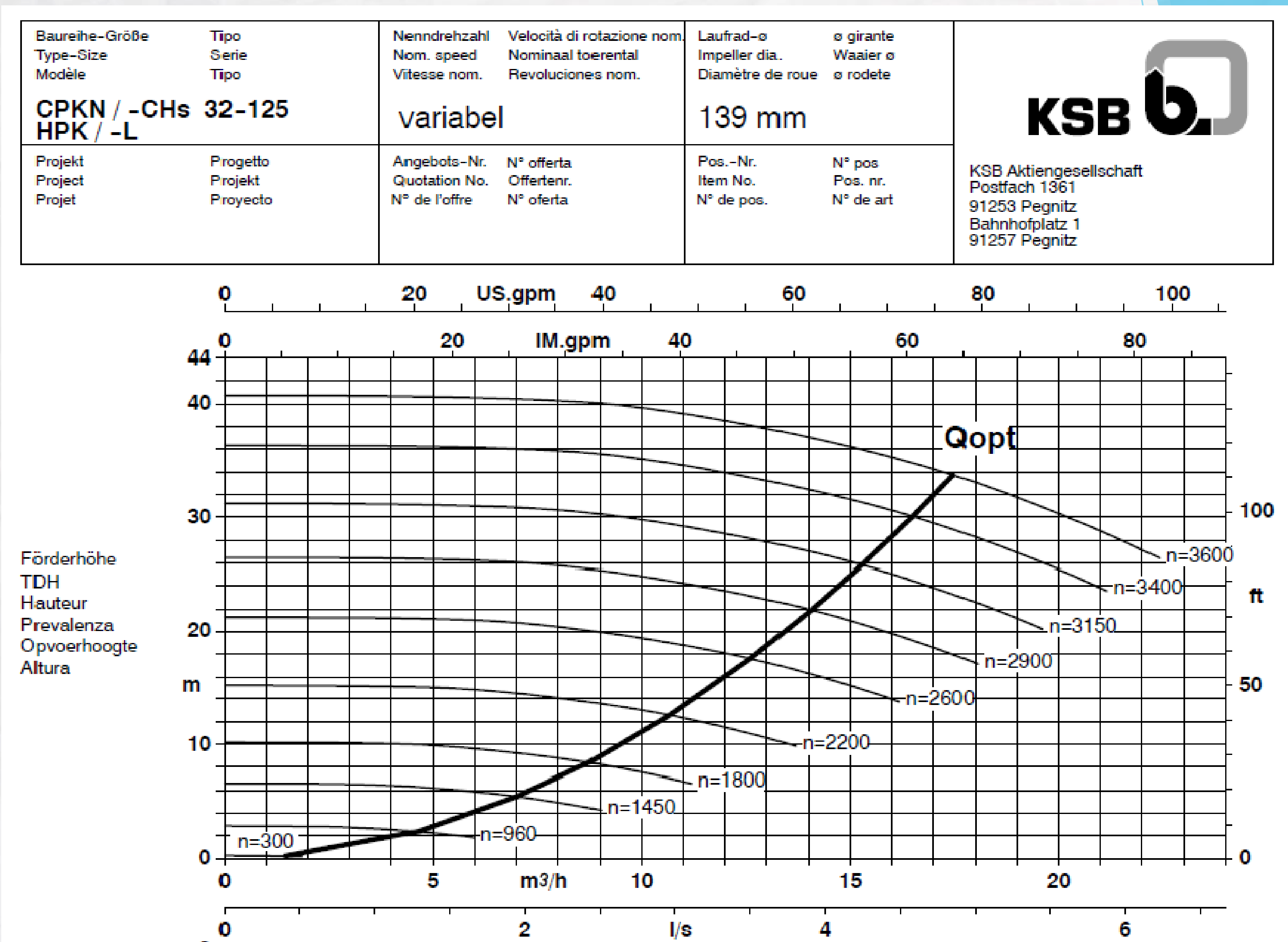
Tablas de propiedades

TABLA A-6

Vapor de agua sobrecalentado (*continuación*)

T °C	*v* m³/kg	*u* kJ/kg	*h* kJ/kg	*s* kJ/kg · K	*v* m³/kg	*u* kJ/kg	*h* kJ/kg	*s* kJ/kg · K	*v* m³/kg	*u* kJ/kg	*h* kJ/kg	*s* kJ/kg · K
	P = 4.0 MPa (250.35°C)				*P* = 4.5 MPa (257.44°C)				*P* = 5.0 MPa (263.94°C)			
Sat.	0.04978	2601.7	2800.8	6.0696	0.04406	2599.7	2798.0	6.0198	0.03945	2597.0	2794.2	5.9737
275	0.05461	2668.9	2887.3	6.2312	0.04733	2651.4	2864.4	6.1429	0.04144	2632.3	2839.5	6.0571
300	0.05887	2726.2	2961.7	6.3639	0.05138	2713.0	2944.2	6.2854	0.04535	2699.0	2925.7	6.2111
350	0.06647	2827.4	3093.3	6.5843	0.05842	2818.6	3081.5	6.5153	0.05197	2809.5	3069.3	6.4516
400	0.07343	2920.8	3214.5	6.7714	0.06477	2914.2	3205.7	6.7071	0.05784	2907.5	3196.7	6.6483
450	0.08004	3011.0	3331.2	6.9386	0.07076	3005.8	3324.2	6.8770	0.06332	3000.6	3317.2	6.8210
500	0.08644	3100.3	3446.0	7.0922	0.07652	3096.0	3440.4	7.0323	0.06858	3091.8	3434.7	6.9781
600	0.09886	3279.4	3674.9	7.3706	0.08766	3276.4	3670.9	7.3127	0.07870	3273.3	3666.9	7.2605
700	0.11098	3462.4	3906.3	7.6214	0.09850	3460.0	3903.3	7.5647	0.08852	3457.7	3900.3	7.5136
800	0.12292	3650.6	4142.3	7.8523	0.10916	3648.8	4140.0	7.7962	0.09816	3646.9	4137.7	7.7458
900	0.13476	3844.8	4383.9	8.0675	0.11972	3843.3	4382.1	8.0118	0.10769	3841.8	4380.2	7.9619
1000	0.14653	4045.1	4631.2	8.2698	0.13020	4043.9	4629.8	8.2144	0.11715	4042.6	4628.3	8.1648
1100	0.15824	4251.4	4884.4	8.4612	0.14064	4250.4	4883.2	8.4060	0.12655	4249.3	4882.1	8.3566
1200	0.16992	4463.5	5143.2	8.6430	0.15103	4462.6	5142.2	8.5880	0.13592	4461.6	5141.3	8.5388
1300	0.18157	4680.9	5407.2	8.8164	0.16140	4680.1	5406.5	8.7616	0.14527	4679.3	5405.7	8.7124

AJUSTE DE CURVAS: BOMBAS CENTRIFUGAS



AJUSTE DE CURVAS: BOMBAS CENTRIFUGAS

Variables presentes en las curvas: h - Q - N.

$$h = f(Q, N)$$

Obtener una expresión de la forma:

$$h = a + bQ + cQ^2$$

$$a = A_0 + A_1 N + A_2 N^2$$

$$b = B_0 + B_1 N + B_2 N^2$$

$$c = C_0 + C_1 N + C_2 N^2$$

EJERCICIOS

1. Se desea determinar la velocidad de desplazamiento de una burbuja de aire a lo largo de una columna de líquido estacionario. Para ello se realiza una simulación CFD y se obtienen los resultados mostrados a continuación:

t (s)	y (m)
0.38	0.207
0.40	0.213
0.42	0.219
0.44	0.223
0.46	0.229
0.48	0.235
0.50	0.241

Realice un ajuste de los datos por mínimos cuadrados utilizando regresión lineal y determine la velocidad de la burbuja.

EJERCICIOS

2. La viscosidad cinemática del agua v, está relacionada con la temperatura de la siguiente manera:

T (°C)	v (cm^2/s)
0	1.7923
4	1.5676
8	1.3874
12	1.2396
16	1.1168
20	1.0105
24	0.9186

Use regresión polinomial para ajustar los datos a una parábola de segundo grado y calcule la viscosidad para una temperatura de 7.2 °C