I. Calcule los siguientes límites.

(a) $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^3+3x+4}{2x^3+2}$

(b) $\lim_{x\to 2} \left(\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{4}{x^2-4}\right)$

(c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x+a}-\sqrt{a}}{x}$

(d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x - x}{\operatorname{sen} 2x + x^2}$

(e) $\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$

(f) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{e^{2x}-e^{-2x}}$

(g) $\lim_{x\to 0^+} \left[\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}$

(2 ptos c/u)

II. Si

$$f(x)=\begin{cases} kx-1 & \text{si } x>2\\ 3x^2-5 & \text{si } -1\le x\le 2\\ e^{x+1} & \text{si } x<-1\end{cases}$$

(a) Halle el valor de k que hace a f continua en $x=2$

(b) Si $k=3$, encuentre el dominio de continuidad de f.

(c) Si consiguió puntos donde f no es continua (en la parte b), diga qué tipo de discontinuidad existe.

(3 ptos)

III. Sea $f(x)=\dfrac{x+9}{-\sqrt{x^2-1}}$.

$(1+x)=u$

$x=u-1$

Busque las ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales a f.

(3 ptos)

$|-\pi-2x|$

Mérida 02/07/88

Parcial de Cálculo 10

1- Determinar el Dominio más amplio de la función

$$f(x)=\sqrt{\frac{x-1}{\log(x-3)}}$$

(2.5 ptos)

2- Dadas las funciones $|-\pi+2x| = y$ $\quad \pm y - \frac{\pi}{2}$

$$f(x)=\begin{cases} |\pi+2x| , & \text{si } x<-\frac{\pi}{2} \\ \operatorname{Sen} x , & \text{si } -\frac{\pi}{2}\le x\le 0 \\ [x]-x-1 , & \text{si } 0<x<1 \\ -x-3 , & \text{si } x\geq 1 \end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} e^{[x]} , & \text{si } x>0 \\ \log(1+x^2) , & \text{si } -1\le x \le \\ \operatorname{arctag}(1/x) , & \text{si } -2<x \\ 0 , & \text{si } x\le \end{cases}$$

$-x-1 \leftarrow$

Determinar:

ⓐ Dominio y Rango de f ⓑ Si es posible $g\circ f$ y $f\circ f$

ⓒ si f es invertible encuentrese f^{-1} y su gráfico. (7.5 ptos)

3- Dada la función $f(x)=\sqrt{\frac{x^2}{4}+1}-\frac{x}{2}$. Determinar:

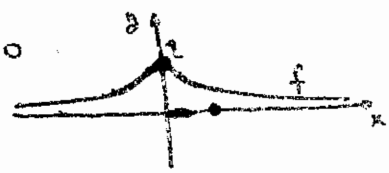
ⓐ si f es par o impar.

ⓑ ¿si f es inyectiva?, si no lo es restringir el dominio para que f sea inyectiva y halle f^{-1}

<u>Ayuda</u>: No construya el gráfico, pruebe directamente la inyectividad usando la definición. (si es posible?). (5 ptos)

4- Dada $f(x)=\log\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$, probar que $f(y)+f(z)=f\left(\frac{y+z}{1+yz}\right)$ (2.5 ptos)

5- Dado el gráfico



Determinar:

$f^{-1}(2)$ $\quad f^{-1}(A)$

$f^{-1}(\{2\})$

ⓐ Dominio y Rango de f ⓑ $f(0)$ y $f((-\infty,+\infty))$

ⓒ $f^{-1}(\{2\})$ y $f^{-1}([0,1))$

(2.5 ptos)

Mérida 23.07.88.

Segundo Parcial Cálculo 10.

① Hallar el valor de c, para que $\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{c}{2} \ln(x^2+1) - \frac{1}{2} \ln(2x+1)\right]$ exista y calcule el valor del Limite. (2.5 ptos)

② Calcular

ⓐ $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{3^x + (-2)^x}{3^{x+1} + (-2)^{x+1}}$

ⓑ $\lim_{H \to 0} \dfrac{\operatorname{Tag}(a+H) - \operatorname{Tag} a}{H}$.

ⓒ $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^{cx} - 1}{x}$

ⓓ $\lim_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x^2-1} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{x-1}}$

$\cos x = \cos^2(x/2) - \operatorname{sen}^2(x/2)$

Sugerencia

Usar $\operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} x/2 \cos x/2$

$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \dfrac{\operatorname{sen}(\pi/2\, x)}{\cos(\pi/2\, x)}$

$\operatorname{sen} \pi/2\, x = 2 \operatorname{sen}(\pi/4\, x) \cos(\pi/4\, x)$

Gde^{-1}

ⓔ $\lim_{x \to 1} \left[\operatorname{tag}\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right]^{\operatorname{tag}\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$

ⓐ (2 ptos) ⓑ (3 ptos) ⓒ (2 ptos) ⓓ (3 ptos) ⓔ (4 ptos).

③ Llene el siguiente cuadro como lo indica el ejemplo, en caso de indeterminación de ejemplos en los cuales $\lim_{x \to a} F(x)$ exista y $\lim_{x \to a} F(x)$ no exista.

$\lim_{x \to a} f$	$\lim_{x \to a} g$	F	$\lim_{x \to a} F$	Rta simbolica	ptos
$L > 0$	0^-	f/g			0.5
$+\infty$	0	$f \cdot g$			1.5
$L \neq 0$	M	$[f]^g$	N	$L^M = N$	
$L > 0$	$-\infty$	$[f]^g$			0.5
$-\infty$	$-\infty$	$f - g$			1.5
L	$+\infty$	f/g			0.5

0^- indica que g tiende a cero a través de valores negativos.

Mérida 31.08.88.

Tercer Parcial Cálculo 10

1- Determinar para que valores de x, la función dada es continua, hacer el gráfico: $g(x) = [\![\sqrt{1-x^2}]\!]$.

(2 ptos)

2. Si $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ y $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Probar que f y g son ambas discontinuas en $x=0$, pero el producto $f \cdot g$ es continuo en $x=0$. Hacer el gráfico.

(2.5 ptos)

3- Estudie la continuidad de la función $f(x) = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt[3]{x}} - 8}{x-8}$.

En caso de tener una discontinuidad evitable, redefina la función de tal manera que sea continua.

(3 ptos)

4- Determinar cuales de las siguientes alternativas son falsas o verdaderas. (argumentar la respuesta).

(i) La función $f(x) = \begin{cases} |\operatorname{sen} x| & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ tiene al menos un Máximo y un Mínimo en cada uno de los sig intervalos

$[\pi/2, \pi]$, $[\pi/2, n\pi]$ $n \in \mathbb{N}$. (1.5)

(ii) La función $f(s) = \begin{cases} -1 & \text{si } s \geq 0 \\ 1 & \text{si } s < 0 \end{cases}$ se anula en cada uno de los sig Intervalos: $[-1,1]$, $[0,1]$, $[-1,0]$

(1.5).

6A - 48

5- Determinar los Intervalos en los que $f(x)=\sqrt{\frac{x-5}{x+6}}$ es continua. (2)

6- Dada $f(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2-6x-7}}$, encontrar las asintotas y trazar el gráfico. (3.5)

7- Definir $f\circ g$ y determinar todos los valores de x en los que $f\circ g$ es Continua.

$f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ $\qquad g(x)=\sqrt{x}$ (2.5)

8- Hallar el valor de a, b, c para que

$$f(x)=\begin{cases} a\cos(1/x)+bx\,\text{sen}(1/x), & x\neq 0 \\ c, & x=0 \end{cases}$$

sea Continua en $x=0$. (1.5)

$\lim_{x\to 0}\left(a\cos(1/x)+bx\,\text{sen}(1/x)\right)$

si $a=0$

MERIDA 22/09/88.

CUARTO PARCIAL CALCULO 10

① Suponer que $f(x) = 3x + |x|$ y $g(x) = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}|x|$. Probar que $f'(0)$ y $g'(0)$ no existen pero $(f \circ g)'(0)$ existe. 1pto (2ptos)

② Considere que $y = f(x)$, hallar las ecuaciones de la recta tangente y normal a f, si $x = b\,a^{\operatorname{arctg}(1/t)}$, $y = \ln(c^2 - t^3)$ cuando $t = 1$. (3 ptos)

③ Hallar $\frac{d^n y}{dx^n}$ si $x = \ln t$ y $y = t^m$. (2.5)

④ En el segmento de la parábola $y = x^2$ comprendido entre los puntos $A = (1,1)$ y $B = (3,9)$. Hallar un punto cuya tangente sea paralela a la cuerda AB. y la ecuacion de la Recta (2.5)

⑤ Hallar $\frac{dy}{dx}$ si $\operatorname{sen}(6\cos(6\operatorname{sen}(6\cos 6x))) + y \cdot e^{x\ln y} + a = 0$ (3 ptos)

⑥ En determinado instante las dimensiones de un rectángulo son m y n, y la variación de cada dimensión es a y b respectivamente. ¿Cuál es la rapidez de variación del Area? (3 ptos)

⑦. La altura de un Cono disminuye a razón de 8 cm por minuto, y el área total aumenta a razón de 100π cm^2.

ⓐ Calcular cómo varia el radio cuando la altura es de 30 cm y el área es 10 cm^2?

ⓑ Cuando la variación del radio se anula? (4ptos)

EXAMEN FINAL CALCULO 10 SECCION 02.

1- Dadas las funciones $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$ y $g(x) = \begin{cases} 2-x^2 & \text{si } |x| \leq 2 \\ 2 & \text{si } |x| > 2 \end{cases}$

(a) si es posible determine $f \circ g$ y sus gráficos.

(b) Para que valores de x es continua $f \circ g$. (3 ptos)

(c) Para que valores de x es derivable $f \circ g$.

2- Calcular $\lim\limits_{x \to 1} \left[\tan\left(\frac{\pi x}{4}\right) \right]^{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$. (3.5 ptos)

3- Encontrar las asíntotas horizontales, verticales y oblicuas (en el caso de que existan) de la función: $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2-6x-7}}$, y construir el gráfico de f. (4 ptos)

4- En un determinado instante las dimensiones de la base y altura de un triángulo son b y h y la variación de cada dimensión es a y b respectivamente. ¿Calcular la rapidez de variación del área? (2.5 ptos)

5- Hallar las ecuaciones de la recta tangente y normal a la curva $y = f(x)$, si $x = a^{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} t\right)}$, $y = \operatorname{Ln}(1+t^3)$ cuando $t = 1$. (3 ptos)

6- Calcular el polinomio de Taylor para la función $f(x) = \operatorname{arctag} x$ y demostrar que el error E satisface:

$$\left| E_{2n}(x) \right| \leq \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1. \qquad (4 \text{ ptos}).$$

$\operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg}(0) + \left(\frac{1}{1+x^2}\right) +$

Mérida 03/10/88.

Ejercicios sobre límites

I.- Calcular los sig límites.

① $\lim_{x\to 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x^{1000}} = 0$ * ② $\lim_{x\to+\infty} \frac{\text{sen}(1/x)}{\text{arctag}(1/x)} = 1$ ③ $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\tan 3x}{\tan x} = \frac{1}{3}$

④* $\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^b} = +\infty \quad (a>1)$ ⑤ $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\tan x - 5}{\sec x + 4} = 1$ ⑥ $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[4]{x}\ \text{sen}(1/\sqrt{x}) = 0$

⑦ $\lim_{x\to+\infty} \left(x^2 - \sqrt{x^4 - x^2 + 1}\right) = \frac{1}{2}$ * ⑧ $\lim_{x\to 1^-} (\ln x)\ln(1-x) = 0$ ⑨ $\lim_{x\to 0^+} x^x = 1$

⑩ $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x = 0 \quad (\alpha>0)$ ⑪ $\lim_{x\to+\infty} x^{1/x} = 1$ ⑫ $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x} = \ln(a/b)$, $a,b>0$

⑬ $\lim_{x\to 0^+} \left[x^{(x^x)} - 1\right] = -1$ ⑭ $\lim_{x\to 0^+} x^{1/\ln x} = e$ ⑮ $\lim_{x\to 0^+} (\cot x)^{\text{sen}x} = 1$

⑯ $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan 2x} = \frac{1}{e}$ ⑰ $\lim_{x\to 0^+} x^{e/(1+\ln x)} = e^e$ ⑱ $\lim_{x\to 1} (2-x)^{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)} = e^{2/\pi}$

⑲ $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\,ax}{\text{sen}\,bx} = \frac{a}{b}$ ⑳ $\lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{\text{sen}\,3x} = \frac{2}{3}$ ㉑ $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} = -1$

㉒ $\lim_{x\to 1} \frac{\text{sen}(\pi/2x)\ln x}{(x^3+5)(x-1)} = \frac{1}{6}$ ㉓ $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x^2)}{x^2\,\text{sen}(x^2)} = \frac{1}{2}$ ㉔ $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{b^x - 1} = \frac{\ln a}{\ln b}$, $b\neq 1$

㉕ $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x^2 + x - 2} = \frac{1}{3}$ ㉖ $\lim_{x\to a^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{\sqrt{2a}}$ ㉗ $\lim_{x\to 1} x^{1/1-x}$

㉘ $\lim_{x\to 0} (x + e^{2x})^{1/x} = e^3$ ㉙ $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)} = \left(\frac{a}{b}\right)^2$ ㉚ $\lim_{x\to 0} \frac{(\text{sen}\,4x)(\text{sen}\,3x)}{x\,\text{sen}(2x)}$

(II) Suponga que $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\,x - x}{x^3} = -\frac{1}{6}$ y calcule:

㉛ $\lim_{x\to 0} \frac{\text{senh}\,x - \text{sen}\,x}{x^3} = \frac{1}{3}$ ㉜ $\lim_{x\to 0} \frac{x\cot x - 1}{x^2} = -\frac{1}{3}$ ㉝ $\lim_{x\to 0} \frac{x\cos^2 x - \text{sen}\,x}{x^3}$.

㉞ $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - a^{\text{sen}x}}{x^3} = \frac{1}{6}$. ㉟ $\lim_{x\to 0^+} \frac{x - \text{sen}\,x}{(x\,\text{sen}\,x)^{3/2}} = \frac{1}{6}$. ㊱ $\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{\text{sen}\,x} - \frac{1}{x}\right) =$

(III) ㊱ Hallar c : $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x = 4$ ㊲ Para un cierto valor de c el límite $\lim_{x\to+\infty} \left[(x^5 + 7x^4 + 2)^c - x\right]$ es finito y no nulo. Determinar c y el valor del límite. ㊳ Demuestre que $\lim_{x\to 0} \text{sen}(1/x)$ no existe..

㊴ Calcular $\lim_{x\to 0} [1/x]$, $\lim_{x\to 0} (-1)^{[1/x]}$, $\lim_{x\to 0} x(-1)^{[1/x]}$, $\lim_{x\to 0} \frac{x + |x|}{2}$.

㊵ Calcular: $\lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h}$, $\lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h}$.

[illegible] polinomios de Taylor de grado indicado [illegible]

[illegible] funciones:

[illegible], grado 3 en 0, (ii) $f(x) = e^{[illegible]}$ grado 3 en 0

[illegible] $= \operatorname{sen} x$, grado $2n$, en $\frac{\pi}{2}$, (iv) $f(x) = \cos x$, grado $2n$ en [illegible]

[illegible] $= e^{x}$, grado n, en 1, (vi) $f(x) = \ln x$, grado n, en 2.

[illegible] $f(x) = x^5 + x^3 + x$, grado 4, en 0 (viii) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, grado $2n+1$, en 0.

[illegible] $\operatorname{sen} 1$, con error $< 10^{-17}$ (3) $\operatorname{sen} 2$ $E < 10^{-12}$.

[illegible] $(1/2)$, $E < 10^{-20}$ (5) e, $E < 10^{-4}$ (6) e^2, $E < 10^{-5}$.

(7) $\operatorname{arc\,tg}(1/10)$, $E < 10^{-(10^{10})}$.

(8) [illegible] $f(x) = x + \operatorname{sen} x$. Hallar todos los x, para los cuales la grafica de f en $(x, f(x))$, tiene pendiente cero.

(9) Sea $f(x) = x^2 + ax + b$. Hallar los valores de a y b tales que la recta $y = 2x$ sea tangente a la gráfica de f en el pto $(2, 4)$.

(10) Hallar los valores de las cttes a, b y c para los cuales las gráfica de los dos polinomios $f(x) = x^2 + ax + b$ y $g(x) = x^3 - c$, se corten en el punto $(1, 2)$ y tengan la misma pendiente en dicho punto.

(11) Demostrar que la recta $y = -x$ es tangente a la curva dada por la ecuación $y = x^3 - 6x^2 + 8x$. Hallar los puntos de tangencia.

(12) Hallar los valores de de a y b para que f sea derivable en c.

$f(x) = 1/|x|$ si $|x| > c$; $f(x) = a + bx^2$ si $|x| \leq c$.

(13) Aplicando el Tma de Rolle, demostrar que la ecuación $x^3 - 3x + b = 0$ no puede tener más de una raíz en el intervalo $[-1, 1]$, cualquiera sea el valor de b.

(14) Probar que $x^2 = x \operatorname{sen} x + \cos x$ se verifica exactamente para dos valores de x

(15) Demostrar que el círculo $x^2 + y^2 = 5$ y la elipse $4x^2 + 9y^2 = 72$ se cortan en ángulos rectos.

(16) Hallar las ecuaciones de la tangente y Normal a la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$, en un pto cuya absisa es x_1.

[illegible] un recorrido en 10 min, moviéndose [illegible]

[illegible] $100t^2 - \frac{t^4}{2}$, midiendo t en minutos y s en me[tros] [illegible]

[illegible] distancia recorre el coche? ⓑ ¿Cuál es su velocidad [illegible]

[illegible] ⓒ ¿Qué distancia ha recorrido el coche cuando [illegible] velocidad máxima? $a = 5000$ m, $b = 770$ m/min, $c = 2775$ m.

[illegible] Una lámpara de arco cuelga a la altura de 4 m directamente sobre un paseo rectilíneo y horizontal. Si en este paseo un muchacho de 1.50 m. de alto anda alejándose de la lámpara a razón de 55 m/min. ¿a razón de cuántos metros por minuto se alarga su sombra?

[illegible] Si la ecuación de un movimiento rectilíneo es $s = \sqrt{t+1}$ demuéstrese que la aceleración es negativa y proporcional al cubo de la velocidad.

(20) ¿Cuál es el coeficiente de variación de el volumen de un cubo con respecto a la longitud de cada lado?

(21) ⓐ El área de un círculo de radio r es πr^2 y su circunferencia es $2\pi r$. Demostrar que el coeficiente de variación del área respecto al radio es igual a la circunferencia.

ⓑ El volumen de una esfera es de radio r es $4\pi r^3/3$ y su área es $4\pi r^2$. Demostrar que el coeficiente de variación del volumen respecto al radio es igual al área.

(22) Si $(y+1)^3 = x^2$, entonces $y=0$ cuando $x=-1$ y $y=0$ cuando $x=1$. Según el Teorema de Rolle ¿puede asegurarse que y' se anula para algún valor de x entre -1 y 1?

(23) Si se dan $f(x) = x^{2/3}$, $a=-1$, $b=1$, ¿para qué valores de x_1 (si lo es para alguno) será $f(b) = f(a) + (b-a) f$[illegible]

3. Una placa [illegible] de metal se dilata por el calor, de manera que su radio aumenta con [illegible] rapidez de 0,01 cm por segundo. ¿Con qué rapidez aumenta el área cuando el radio es de 2 cm?

Solución. Sea x = el radio y y = el área. Entonces

$$y = \pi x^2,$$

$$(3) \qquad \frac{dy}{dt} = 2\,\pi x \frac{dx}{dt}.$$

Es decir, en un instante cualquiera, el área de la placa expresada en centímetros cuadrados, aumenta $2\pi x$ veces más rápidamente que lo que el radio aumenta en centímetros lineales.

$$x = 2, \quad \frac{dx}{dt} = 0{,}01, \quad \frac{dy}{dt} = ?$$

Sustituyendo en (3),

$$\frac{dy}{dt} = 2\,\pi \times 2 \times 0{,}01 = 0{,}04\,\pi \text{ cm}^2 \text{ por segundo.}$$

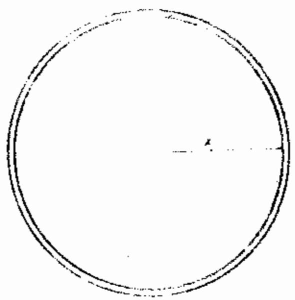


Fig. 35

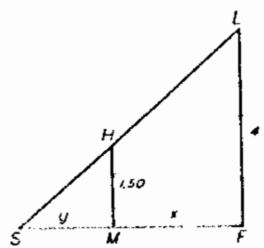


Fig. 36

4. Una lámpara de arco cuelga a la altura de 4 metros directamente sobre un paseo rectilíneo y horizontal. Si en este paseo un muchacho de 1.50 m de alto anda alejándose de la lámpara a razón de 55 metros por minuto, ¿a razón de cuántos metros por minuto se alarga su sombra?

Solución. Sea x = distancia del muchacho de un punto directamente debajo de la lámpara L, y sea y = longitud de la sombra del muchacho. De la figura 36, se deduce,

$$y : y + x = 1{,}50 : 4.$$

o sea,

$$y = \frac{3}{5}\,x.$$

Derivando,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{3}{5}\frac{dx}{dt};$$

es decir, la sombra se alarga con una rapidez igual a los $\frac{3}{5}$ de la rapidez con que se mueve el muchacho, o sea, a razón de 33 metros por minuto.

5. Un punto se mueve sobre la parábola $y^2 =$ [illegible] de manera que la abscisa aumenta uniformemente 2 cm por segundo. ¿En qué punto aumentan la abscisa y la ordenada a la misma razón?

Sol. (3, 6).

6. Hallar los valores de x para los que [illegible]

$$x^3 - 1[illegible]\,x^2 + [illegible]\,x - 13$$

es cero. *Sol.* [illegible] 3 [illegible]

7. Un lanchón se acerca al muelle mediante un cable amarrado a un anillo en el suelo del muelle; el cable se enrolla en un torno situado en la cubierta del lanchón, a razón de 2,4 m por minuto. La cubierta está 4.5 m debajo del nivel del muelle. ¿Con qué rapidez se mueve el lanchón hacia el muelle cuando dista de él 6 metros? *Sol.* 3 m por minuto.

8. Un bote está atado a una cuerda que está arrollada alrededor de un torno situado 7 m más alto que el nivel del punto en que la cuerda está amarrada al bote. El bote se aleja con la velocidad de 3 m por segundo. ¿Con qué rapidez se desarrolla el cordel cuando dista 10 m del punto que está directamente debajo del torno y al nivel del agua? *Sol.* 2,46 m por segundo.

9. Uno de los extremos de una escalera de 15 m se apoya contra una pared vertical levantada en un piso horizontal. Supóngase que se empuje el pie de la escalera alejándola de la pared a razón de 0,9 m por minuto. *a*) ¿Con qué velocidad baja la extremidad superior de la escalera cuando su pie dista 4 m de la pared? *b*) ¿Cuándo se moverán con la misma velocidad las dos extremidades de la escalera? *c*) ¿Cuándo baja la extremidad superior de la escalera a razón de 1,2 m por minuto?

Sol. *a*) 0,25 m por minuto; *b*) cuando el pie de la escalera dista $7{,}5\sqrt{2}$ m de la pared. *c*) cuando el pie dista 12 m de la pared.

10. Un buque navegaba hacia el Sur a una velocidad de 6 millas por hora; otro navegaba hacia el Este a una velocidad de 8 millas por hora. A las cuatro de la tarde el segundo cruzó la ruta del primero en el punto por el que éste había pasado dos horas antes. *a*) ¿Cómo variaba la distancia entre los buques a las tres de la tarde? *b*) ¿Cómo a las cinco de la tarde? *c*) ¿Cuándo no variaba la distancia entre ellos?

Sol. *a*) Disminuía 2,8 millas por hora; *b*) [illegible] ba 8,73 millas por hora; *c*) a las 3h 17m de la tarde.

11. El lado de un triángulo equilátero mide a cm; si [illegible] de k cm por hora, ¿a razón de cuántos centímetros cuadrados por hora [illegible] el área?

Sol. $\frac{1}{2}\,ak\sqrt{3}$ cm² por hora.

12. Las aristas de un [illegible] 10 cm; si aumentan 0,1 [illegible] por minuto, calcular [illegible] del [illegible]

13. Si [illegible] 5 y su rapidez [illegible] de [illegible] del [illegible]

14. [illegible]

15. El periodo (P segundos) de una oscilación completa de un péndulo cuya longitud es l cm viene dado por la fórmula $P = 0{,}2\sqrt{l}$. Hallar la rapidez de variación del periodo con respecto a la longitud, cuando $l = 22{,}5$ cm. Por medio de ese resultado calcular el aumento de P correspondiente al aumento de l de 22,5 a 22,8 cm. *Sol.* 0,021 seg. por cm; 0,0063 segundos.

✓ 16. El diámetro y la altura de un cilindro circular recto son, en un cierto instante, 10 cm y 20 cm, *respectivamente. Si el diámetro aumenta a razón de* 1 cm por minuto, ¿qué alteración de la altura mantendrá constante el volumen?

Sol. Una disminución de 4 cm por minuto.

✓ 17. El radio de la base de cierto cono aumenta a razón de 3 cm por hora y la altura disminuye a razón de 4 cm por hora. Calcular cómo varía el área total del cono cuando el radio mide 7 cm y la altura 24 cm.

Sol. Aumenta a razón de 96π cm² por hora.

18. En cada uno de los extremos de un cilindro de radio r y altura h se coloca un hemisferio de radio r. Si r aumenta a razón de 50 cm por minuto, ¿a qué razón debe h disminuir para mantener fijo el volumen del sólido, en el instante en que r mide 10 m y h mide 20 m?

19. Desde la boca de un pozo profundo se deja caer una piedra, y después de t segundos se deja caer otra piedra. Demostrar que la distancia entre las piedras aumenta a razón de tg cm por segundo.

✓ 20. Un gasómetro contiene 1 000 m³ de gas a la presión de 300 g por cm². Si la presión disminuye a razón de 3 g por cm² por hora, ¿con qué rapidez aumenta el volumen? (Dése por sentada la ley de Boyle: $pv = c$.)

Sol. 10 m³ por hora.

✓ 21. La ley adiabática para la expansión del aire es $PV^{1,4} = C$. Si en un tiempo dado se observa que el volumen es de 10 m³ y la presión es de 50 Kg por centímetro cuadrado, ¿cuál es la alteración de la presión si el volumen disminuye un m³ por segundo? *Sol.* Aumenta 7 Kg por cm² por segundo.

✓ 22. Si $y = 4x - x^3$ y x aumenta uniformemente a razón de $\frac{1}{3}$ de unidad por segundo, ¿cuál es la rapidez de variación de la pendiente de la gráfica en el instante en que $x = 2$? *Sol.* Disminuye 4 unidades por segundo.

23. Se echa agua en un recipiente hemisférico de 35 cm de diámetro a razón de 16 cm³ por segundo. ¿Con qué rapidez sube el agua, *a*) cuando ha llegado a media profundidad; *b*) en el momento de rebosar? (El volumen de un segmento esférico de una base es $\pi r h^2 - \frac{1}{3}\pi h^3$, siendo h la altura del segmento.)

24. El gas de un globo esférico se escapa a razón de 1 000 cm³ por minuto. En el instante en que el radio es 25 cm, *a*) ¿con qué rapidez disminuye el radio? *b*) ¿con qué rapidez disminuye el área de la superficie?

Sol. *b*) [illegible]0 cm² por minuto.

✓ 25. Si r representa el radio de una esfera, S la [illegible] y [illegible] demuéstrese la relación $\frac{dV}{dt} = \frac{r}{2}\frac{dS}{dt}$.

26. Una vía de ferrocarril cruza una carretera bajo un ángulo de [illegible] locomotora dista 160 m del crucero, y se aleja de él a la velocidad [illegible] hora. Un automóvil dista del crucero 160 m, y se acerca a él a la [illegible] 50 Km por hora. ¿A qué razón se altera la distancia entre los dos?

Sol. Aumenta 25 Km por hora ó $25\sqrt{3}$ K[illegible]

27. La longitud de una artesa horizontal es de 2,5 m; su sección [illegible] es un triángulo rectángulo isósceles. Si se echa agua en la artesa a [illegible] por minuto, ¿con qué rapidez sube la superficie del agua cuando [illegible] $\frac{1}{2}$ m de profundidad? *Sol.* 5 cm [illegible]

28. En el problema 27, ¿con qué rapidez debe echarse el agua para que el nivel suba de 4 cm por minuto, cuando el agua tiene [illegible]dad de 75 cm?

29. La longitud de una artesa horizontal es de 4 m; su sección [illegible] es un trapecio; el fondo tiene un metro de ancho; el seno del [illegible] caras laterales y el plano horizontal es $\frac{4}{5}$. Se echa agua en la art[illegible] $\frac{1}{4}$ m³ por minuto. ¿Con qué rapidez sube el nivel del agua cuando [illegible] 60 cm de profundidad?

30. En el problema 29, ¿con qué rapidez se saca agua de la ar[illegible] baja 3 cm por minuto cuando el agua tiene un metro de profundida[illegible]

✓ 31. El segmento que la tangente a la rama positiva de la [illegible] determina sobre el eje de las x aumenta 3 unidades por segundo. [illegible] nada en el origen OB. Hallar la velocidad de B después de 5 seg[illegible] tante en que la tangente pasaba por el origen.

Sol. $-\frac{16}{75}$ de unidad [illegible]

✓ 32. Un punto P se mueve a lo largo de la parábola $y^2 = x$ [illegible] su abscisa aumenta de una manera uniforme k unidades por seg[illegible] yección de P sobre el eje de las x es M. ¿Con qué rapidez aumen[illegible] triángulo OMP cuando P está en el punto de abscisa $x = a$?

Sol. [illegible] $k\sqrt{}$ [illegible] unidades [illegible]

PROBLEMAS ADICIONALES

1. Considérense los paralelepípedos cuyas [illegible] los rectáng[illegible] en el área limitada por la parábola $y^2 = 16x$ y [illegible] lado [illegible] por el foco, perpendicularmente al eje de simetría). [illegible] del rectángulo esté sobre el lado [illegible] de la p[illegible] las alturas de[illegible] pípedos son siempre iguales a la longitud del lado [illegible] Hallar el v[illegible] del mayor paralelepípedo.

Sol. [illegible]

.A - B

EXAMEN FINAL CALCULO 10 SECCIONES 01 y 03 5-8-85

EA $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x, & \text{si } x < 0 \\ e^x, & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ \sqrt{x-2}, & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

Hallar: i) Gráfico de f (2 pts)

ii) Dominio y Rango de f

iii) $f(-\pi)$, $f(1/2)$, $f(4)$, $f(1+h)$. si $h \geq$

iv) ¿Es $f(3)$ un nº racional? ¿Es f inyecti

ESOLVER LOS LIMITES SIGUIENTES:

a) $\lim_{x \to 2} \left(\frac{\operatorname{sen}(3x-6)}{7x-14} \right)$; b) $\lim_{x \to 1} \left(\frac{\sqrt[6]{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1} \right)$ (2 pts c/u)

allar El Dominio más amplio de la siguiente función:

$$f(x) = \operatorname{arc\,sen}(\tfrac{1}{3}x) + \frac{\ln(x^2+2)}{\sqrt{9-x^2}}$$ (3 pts)

EA $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ DEFINIDA ASI:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+\operatorname{sen} x} - \sqrt{1-\operatorname{sen} x}}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 10, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

¿POSEE f ALGUNA DISCONTINUIDAD NO EVITABLE? JUSTIFIQUE SU RESPUESTA (2 pts)

allar LA DERIVADA DE LAS SIGUIENTES FUNCIONES:

a) $f(x) = \left[\operatorname{sen}^3 \left(\sqrt{\frac{\log_3^2 x}{\operatorname{Tg} x^2}} \right) \right]^4$; b) $g(x) = \left(\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{1}{x}\right) \right)^{2^{x^2}}$ (2 pts c/u)

allar LOS INTERVALOS DE CRECIMIENTO y/o DECRECIMIENTO DE LA GRAFICA DE LA SIGUIENTE FUNCIÓN

$$f(x) = \frac{(x-1)^2}{x+1}$$ (2 pts)

ES CIERTO O FALSO QUE LA ECUACIÓN $x^{33} - x^8 - 3x^2 - 1 = 0$ TIENE, POR LO MENOS UNA RAIZ REAL? (JUSTIFIQUE SU RESPUESTA, USANDO EL TEOREMA DE BOLZANO) (2 pts)

Apellidos y Nombres ______________________________

Cedula ______________ Sección ____________ Opción ____________

Examen (Cap I, II)

(I) Resolver las siguientes inecuaciones

a) $\dfrac{x+2}{x+3} < \dfrac{x+1}{x}$; b) $|x^2 - 2x - 1| \geq 2$

(4 pts)

(II) Sea:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x} & \text{si } x \leq 1 \\ 3 - x & \text{si } 1 < x < 7 \\ x^2 + 1 & \text{si } x \geq 7 \end{cases}$$

Hallar: (4 pts)

a) Gráfico de f ; b) rango y dominio de f

c) $f(1)$; $f(-15)$; $f(3)$; $f(3/4)$; $f(1+h)$ si $h \geq 6$

d) ¿ Es $f(e)$ un número Racional? ¿Es f inyectiva?

(III) Sea $f: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{1\}$, tal que $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$ (4 pts)

Demostrar

i) f es Biyectiva

ii) Que existe f^{-1}

iii) $(f \circ f^{-1})_{(x)} = x$

(IV) Calcular el dominio mas amplio de la función

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 2}}{Ln(x-2)} + \arccos\left(\frac{x}{3}\right)$$

(V) Dada f, como se indica en la figura

...dos y nombres ____________________ Cedula ________

...ción ________ Sección ____________________

Examen (cap II y IV)

I) Haciendo uso de la definición de límite. Demostrar ?

$$\lim_{x \to 0} x^2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

II) Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1 + \cos 2x - 2\cos x}{x^2} \right)$; b $\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}}{a+x - \sqrt{a^2 - x^2}} \right)$

2 pts (2 pts)

III) Hallar los valores de las constantes $\underline{\underline{a}}$ y $\underline{\underline{b}}$ que hacen que la función f sea continua en $\mathbb{R}$, si:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2a & \text{si } x < -2 \\ 3ax + b & \text{si } -2 \leq x \leq 1 \\ 3x - 2b & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

3 pts

IV) Sea $f(x) = \begin{cases} g(x) \cdot (x^2 - 1), & \text{si } x \neq 0 \\ -1, & \text{si } x = 0 \end{cases}$ 3 pts

Donde Dom$(g) = \mathbb{R}$ y $\lim g(x) = f(0)$

i) ¿es f continua en $x_0 = 0$?

ii) En caso de no ser f continua en 0 ¿como modificaría la función f para que fuese continua en dicho punto?

V) Hallar los puntos de discontinuidad de la siguiente función y decir que tipos de discontinuidad presenta

$$f(x) = \frac{\operatorname{Sen}^2 x \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{x-1}\right)}{x(x+3)}$$

VI) Es cierto o falso que la ecuación $x^{15} - x^4 - 3x^2 + 1 = 0$ tiene por lo menos una raíz real? (Justifique su respuesta usando el teorema de Bolzano (3 pts)

$3\left[\frac{1}{4}(3x+\cancel{x})\right] + \left|\frac{1}{4}\right|\left|3x+\cancel{x}\right|$

$3x + \frac{1}{4}4x$

$f(g(x)) =$

$f\left(\frac{1}{4}(3x-|x|)\right) = 3\left[\frac{1}{4}(3x-|x|)\right] +$

$\left|\frac{1}{4}(3x-|x|)\right|$

$3\left[\frac{1}{4}(3x-|x|)\right] + \left|\frac{1}{4}\right|\left|3x-\ldots\right|$

$\frac{3x}{2} + \frac{x}{2}$

IV EXAMEN PARCIAL   CAL 10   S-A86

I) SEA $f(x) = 3x + |x|$ y $g(x) = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}|x|$. Probar que $f'(0)$ ni $g'(0)$ EXISTEN PERO que $(f \circ g)'(0)$ SI EXISTE. (4 pts) 2

II) DADA LA FUNCIÓN $F(x) = ax^2 + (a-1)x + 2$: 3

(a) ¿Que valor debe Tomar a para que LA PENDIENTE DE LA RECTA TANGENTE a LA CURVA F EN EL PUNTO $x_0 = 1$ SEA IGUAL a 5?.

(b) Hallar La ECUACIÓN DE LA RECTA NORMAL a LA CURVA F En El PUNTO $x_0 = 1$. (4 p

III) Hallar LA DERIVADA DE LAS SIGUIENTES FUNCIONES: 3

a) $f(x) = \left\{\operatorname{Sen}\left[\operatorname{arctg}\left(\operatorname{Ln} e^{3x} \cdot \frac{\sqrt[3]{x^2-1}}{1+\cos^2 x}\right)\right]\right\}^3$

b) $g(x) = \sqrt[x^2]{x}$. (4 pts)

IV) HALLAR LOS INTERVALOS DE CRECIMIENTO Y/O DECRECIMIENTO DE LA SIGUIENTE FUNCION: 3

$$f(x) = \frac{x^2-2x+2}{x-1}.$$ (4 pts)

V) a) ENUNCIE LOS TEOREMAS: DE ROLLE Y DEL VALOR MEDIO. 1

b) Si $f(x) = (x-1)^{2/5}$, MUESTRE QUE NO EXISTE UN NUMERO $x_0 \in (0,2)$ tal que $f'(x_0) = \frac{f(2)-f(0)}{2-0}$.

¿QUE HIPOTESIS T.V.M no se cumple para f en el INTERVALO $[0,2]$? (4 p

$\frac{2}{5}(x-1)$ $\quad \frac{2}{5}-1 = \frac{2-5}{5} = -\frac{3}{5}$ $\quad \frac{2}{5\sqrt[5]{(x-1)^3}}$

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS
MERIDA - VENEZUELA

2do EXAMEN PARCIAL CALCULO 10.

① Defina formalmente $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$

② Pruebe analíticamente que $f: \mathbb{R} - \{-1/4\} \to \mathbb{R} - \{3/4\}$, definida por $f(x) = \dfrac{3x-1}{4x+1}$ es biyectiva. Además determine f^{-1}

③ Dadas $f(x) = \sqrt{x-1} + 1/2$ y $g(x) = \log_2 (x - 1/2) - 1$ determine si $g \circ f$ ó $f \circ g$ existe, en caso afirmativo determine dominio, contradominio y ley de correspondencia

④ Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to \pi/4} \dfrac{\operatorname{sen} x - \cos x}{1 - \operatorname{tg} x}$ b) $\lim_{x \to 2} \dfrac{1-x}{(x-2)^2}$ c) $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^2 - x - 2}{x^3 + 1}$

d) $\lim_{x \to 2} (3-x)^{\frac{1}{x-2}}$ e) $\lim_{x \to 0^+} (x-1) \ln x$ f) $\lim_{x \to 2} \dfrac{\sqrt[3]{x+6} - 2}{x+2}$

⑤ Demuestre por definición que $\lim_{x \to 2} (x^3 - 1) = 7$

⑥ Si $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Hallar las condiciones sobre a y b para que $f(x) = f^{-1}(x)$

⑦ Dadas las siguientes funciones, determine: dominio, rango y gráfica

a) $f(x) = \arccos x$ b) $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$ c) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

⑧ Dada

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x-1)^3}, & x < 1 \\ 3^{x-1}, & 1 < x \leq 2 \\ \cos x, & \pi < x < 4\pi \end{cases}$$

Determine:

a) Dominio y rango
b) Gráfica de f.
c) Cortes con los ejes coordenados
d) $\lim f(x)$

$3\left[\frac{1}{4}(3x + \cancel{|x|})\right] + \left|\frac{1}{4}\right| \left|3x + \cancel{|x|}\right|$

$f(g(x)) =$

$f\left(\frac{1}{4}(3x - |x|)\right) = 3\left[\frac{1}{4}(3x - |x|)\right] +$

$3x + \frac{1}{4}\,4x$

$\left|\frac{1}{4}(3x - \right.$

$3\left[\frac{1}{4}(3x - |x|)\right] + \left|\frac{1}{4}\right|$

III EXAMEN PARCIAL   MA110   S-A86

(I) SEA $f(x) = 3x + |x|$ y $g(x) = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}|x|$. Probar que $f'(0)$ ni $g'(0)$ EXISTEN pero que $(f\circ g)'(0)$ SÍ EXISTE.   2 (4 pts)

(II) DADA LA FUNCIÓN $F(x) = ax^2 + (a-1)x + 2$:   3.

(a) ¿Que valor debe tomar $\underline{a}$ para que LA PENDIENTE DE LA RECTA TANGENTE a LA CURVA F EN EL PUNTO $x_0 = 1$ SEA IGUAL a 5?

(b) Hallar la ECUACIÓN DE LA RECTA NORMAL a LA CURVA F EN EL PUNTO $x_0 = 1$.   (4

(III) Hallar LA DERIVADA DE LAS SIGUIENTES FUNCIONES: 3

a) $f(x) = \left\{ \operatorname{Sen}\left[\operatorname{arctg}\left(\ln e^{3x} \cdot \frac{\sqrt[3]{x^2-1}}{1+\cos^2 x}\right)\right]\right\}^3$

b) $g(x) = \sqrt[x^2]{x}$.   (1 pt

IV) HALLAR LOS INTERVALOS DE CRECIMIENTO Y/O DECRECIMIENTO DE LA SIGUIENTE FUNCION: 3

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}.$$ (4 pt

V) a) ENUNCIE LOS TEOREMAS: DE ROLLE Y DEL VALOR MEDIO.   1

b) Si $f(x) = (x-1)^{2/5}$, MUESTRE QUE NO EXISTE UN NUMERO $x_0 \in (0,2)$ tal que $f'(x_0) = \frac{f(2) - f(0)}{2-0}$.

¿QUE HIPOTESIS T.V.M no se cumple PARA f en el INTERVALO $[0,2]$?   (4

$\frac{2}{5}(x-1)$ $\frac{2}{5}-1 = \frac{2-5}{5} = -\frac{3}{5}$ $\frac{2}{5\sqrt[5]{(x-1)^3}}$

II EXAMEN PARCIAL (Límite y continuidad) CAL 10, Secciones 08 y 10 S-A86.

1) UTILIZANDO LA DEFINICIÓN DE LIMITE, probar que:

$$\lim_{x \to 4} \sqrt{x} = 2$$

1/0 2 Ptos

4 Ptos

2) CALCULAR LOS SIGUIENTES LIMITES:

a) $\lim_{x \to 2} \left[\frac{\sqrt[3]{x^2-3} - \sqrt[3]{x-1}}{2-x} \right]$; b) $\lim_{x \to -1} \left[\frac{x^3+x^2-x-1}{x^2+2x+1} \right]$, c) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{x + \operatorname{Tg} x}{\operatorname{sen} x} \right)$

3 Ptos

(3) DADA LA SIGUIENTE FUNCIÓN:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{\operatorname{arctg} x + \pi/4} & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ 5x - 3/x & \text{si } 1 < x < 3 \\ 3x - 5 + K & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

(i) ¿ES f continua en 1? Justifique su respuesta

(ii) ¿Que valor debe tomarse para K PARA HACER que f sea continua en $x = 3$? ¡Justifique su respuesta!

3 Ptos

(4) Si f Es una función que presenta una Discontinuidad Evitable en $x = a$ y sea $g(x) = f(x)$ si $x \neq a$ y $g(a) = \lim_{x \to a} f(x)$. probar que g es continua en a.

⑤ Hallar los puntos De Discontinuidad de LA SIGUIENTE FUNCIÓN, Y Decir que Tipos de DISCONTINUIDAD PRESENTA:

$$f(x) = \frac{(1-\cos x)\operatorname{sen} x}{x^2} + \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x-1}\right)}{x+2}$$

(6) DETERMINE CUALES DE LAS SIGUIENTES AFIRMACIONES SON (V) Y CUALES FALSAS (F)

a) UNA FUNCION POLINOMIAL ES CONTINUA EN $\mathbb{R}$ __V__

b) " " RACIONAL " " " " __F__

UNA FUNCIÓN f ES CONTINUA EN $x = x_0$ SI $\lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = 0$ ____

d) LA FUNCIÓN $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$ ES CONTINUA EN $x=0$. ____

e) SI DOS FUNCIONES f y g son continuas En x_0, ENTONCES LA FUNCIÓN Producto $f \cdot g$ es continua en x_0 ____

f) IGUAL que la anterior pero para la funcion cociente f/g. ____

4 Ptos

3er PARCIAL CALCULO 10

① Estudie la continuidad de la siguiente función en los puntos dados, en caso de no ser continua, diga cuál es el tipo de discontinuidad

$$f(x) = \begin{cases} 2x-3 & , \quad x < -1 \\ 0 & , \quad x = -1 \\ x^3+1 & , \quad -1 < x \leq 0 \\ \ln x & , \quad 0 < x \leq 1 \\ x^4-1 & , \quad x > 1 \end{cases}$$

En los puntos $-1, 0, 1, 2$

② Determinar los valores de a y b para que la función

$$f(x) = \begin{cases} e^x - b + 2a & , \quad x < 0 \\ 3 & , \quad x = 0 \\ x^2 + b + 1 & , \quad x > 0 \end{cases}$$

sea continua en $x_0 = 0$

③ Enuncie el teorema de Weierstrass

④ Calcule por definición $f'(x_0)$ si $f(x) = \operatorname{sen} x$

⑤ Verifique que: $\left(\dfrac{1}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}\right)' = -\operatorname{arcsen}\left(\dfrac{1+x}{2x}\right)$

⑥ Calcular las siguientes integrales y simplifique

a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{(3-x)^3}}{(2-x)^2}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{\ln x} + \ln\left(\dfrac{1}{x^2+2}\right) + 4$

c) $f(x) = \ln(\sec x + \operatorname{tg} x) - \cos x$

d) $f(x) = x^{x^x}$

PRUEBA DE AUXILIARES DOCENTES 9/10/92

1) Resolver el sistema dado:

$$\begin{cases} a_1x + a_2y + a_3 > 0 \\ b_1x + b_2y + b_3 \leq 0 \end{cases}$$

$a_1 > 0$ y $b_1 > 0$

Donde $a_1x + a_2y + a_3 = 0$ es la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \dfrac{x \cdot \operatorname{tag}(\operatorname{sen}(x^2-1))}{\sqrt{x^3+1}}$ en el pto. $(1,0)$

$x =$

y $b_1x + b_2y + b_3 = 0$ es la ecuación de la directriz de la parábola $y^2 + 3y + x + 4 = 0$. $(y-a)^2 = -4p(x-b)$ (4 ptos.)

2) Una compañía necesita potes cilíndricos de aluminio para envasar sus productos. Cada pote debe tener $128\pi \, cm^3$ de volumen ¿Cuál debe ser el radio y la altura del pote si se quiere usar la menor cantidad posible de aluminio. (3 ptos)

3) Dar la definición de continuidad de una función $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e ilustre geométricamente. Decida si $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ es continua en $\mathbb{R}^2$ y justifique. (4 ptos)

4) Pruebe que si dos planos tienen un pto. común también tienen una recta común. (3 ptos.)

5) Estudie la convergencia de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}+1} + \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$$ (3 ptos)

6) Utilizando integrales triples hallar el volumen de un cilindro de radio r con tapa superior en el plano $y+z = a^2$ y base centrada en el origen. (3 ptos.)

$$128 = \cancel{\pi} r^2 h$$

$$h = \frac{128}{\cancel{\pi} r^2}$$

$$\frac{(n+1)^c}{n^2} = 1$$

$$x^{-3/2}$$

$$A(r) = 2\pi\left(r^2 + \frac{128}{r}\right) \qquad \frac{1}{\sqrt{n^3}+1} < \frac{1}{\sqrt{n^3}} \qquad x^{-1/2} \Big|_1^{\infty} = \frac{1}{\ }$$