265. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right).$

266. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n-1}{2^n+1}.$ **267.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{2^{\frac{1}{n}}+1}.$

Función de argumento continuo

En los ejercicios 268—304 hallar los límites.

268. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+5}{x^2-3}.$ **269.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^3-3x+1}{x-4}+1\right)$

270. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x}{1-x}.$ **271.** $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\frac{x^2-3}{x^4+x^2+1}.$

272. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}.$ **273.** $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}.$

274. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}.$ $\frac{1}{2}$ **275.** $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}.$ 6

276. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+x-2}{x^3-x^2-x+1}.$ I **277.** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right).$ -1

278. $\lim\limits_{x\to 2}\left[\frac{1}{x(x-2)^2}-\frac{1}{x^2-3x+2}\right].$ ∞

279. $\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{x+2}{x^2-5x+4}+\frac{x-4}{3(x^2-3x+2)}\right].$

280. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}$ (m y n son números enteros).

281. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}.$ **282.** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4-5x}{x^2-3x+1}.$

283. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2+1}.$ **284.** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+x-3x^3}{1+x^2+3x^3}.$

285. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1}-x\right).$ **286.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2-1}-\frac{x^2}{2x+1}\right).$

287. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{3x^2}{2x+1}-\frac{(2x-1)(3x^2+x+2)}{4x^2}\right].$

288. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+1)^{10}+(x+2)^{10}+\ldots+(x+100)^{10}}{x^{10}+10^{10}}.$

289. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-x}.$ **290.** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt[5]{x^4+1}}.$

291. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[5]{x^7+3}+\sqrt[4]{2x^3-1}}{\sqrt[6]{x^8+x^7+1}-x}.$

292. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^4+3}-\sqrt[5]{x^3+4}}{\sqrt[3]{x^7+1}}$. **293.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$.

294. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x^2}$. **295.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$.

296. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$. **297.** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$.

298. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$. **299.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$.

300. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$. **301.** $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt{x-b}-\sqrt{a-b}}{x^2-a^2}$ $(a>b)$.

302. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1}$ (n y m son números enteros).

303*. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt[4]{1-2x}}{x+x^2}$. **304.** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{7+x^3}-\sqrt{3+x^2}}{x-1}$.

305. ¿De qué manera varían las raíces de la ecuación cuadrada $ax^2+bx+c=0$ cuando b y c conservan sus valores constantes $(b\neq 0)$ y la magnitud a tiende a cero?

En los ejercicios 306—378 hallar los límites.

306. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})$. **307.** $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$.

308. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$ *). **309.** $\lim\limits_{x\to\pm\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$.

310. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x)$.

311. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3})$.

312. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}$.

313. $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1})$.

---

314. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 3x}{x}$. **315.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} kx}{x}$.

316. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\alpha x}{\operatorname{sen}\beta x}$. **317.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{sen} 5x}$.

318. $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\operatorname{sen}(\alpha^n)}{(\operatorname{sen}\alpha)^m}$ (n y m son números enteros positivos).

---

* En los ejemplos en que se presenta $x\to\pm\infty$ deben ser considerados separadamente los casos de $x\to+\infty$ y $x\to-\infty$.

319. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\arcsin x}{3x}$.

320. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x-\arcsin x}{2x+\operatorname{arctg} x}$.

321. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

322. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^3 x}{x \operatorname{sen} 2x}$.

323. $\lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt[3]{(1-\cos\alpha)^2}}$.

324. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+\operatorname{sen} x-\cos x}{1-\operatorname{sen} x-\cos x}$.

325. $\lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{sen}\alpha}{\alpha^3}$.

326. $\lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{(1-\cos\alpha)^2}{\operatorname{tg}^3\alpha-\operatorname{sen}^3\alpha}$.

327. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}-\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}\right)$.

328. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\operatorname{sen} x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}$.

329. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{\sqrt[3]{(1-\operatorname{sen} x)^2}}$.

330. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 2x}$.

331. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\operatorname{tg} x$.

332. $\lim\limits_{\alpha\to \pi} \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{1-\frac{\alpha^2}{\pi^2}}$.

333. $\lim\limits_{z\to 1} (1-z)\operatorname{tg}\dfrac{\pi z}{2}$.

334. $\lim\limits_{y\to a} \left(\operatorname{sen}\dfrac{y-a}{2}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\pi y}{2a}\right)$.

335. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos x-\operatorname{sen} x}{\cos 2x}$.

336. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}} \dfrac{\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos x}$.

337. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{1-\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{4}-\operatorname{sen}\frac{x}{4}\right)}$.

338. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(2x\operatorname{tg} x-\dfrac{\pi}{\cos x}\right)$.

339. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(a+x)-\cos(a-x)}{x}$.

340. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos\alpha x-\cos\beta x}{x^2}$.

341. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(a+x)-\operatorname{sen}(a-x)}{\operatorname{tg}(a+x)-\operatorname{tg}(a-x)}$.

342. $\lim\limits_{\alpha\to \beta} \dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha-\operatorname{sen}^2\beta}{\alpha^2-\beta^2}$.

343. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(a+2h)-2\operatorname{sen}(a+h)+\operatorname{sen} a}{h^2}$.

344. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(a+2h)-2\operatorname{tg}(a+h)+\operatorname{tg} a}{h^2}$.

345. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\operatorname{sen}^2 x}$.

346. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\operatorname{sen} x}-\sqrt{1-\operatorname{sen} x}}{\operatorname{tg} x}$.

347. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x\operatorname{sen} x}-\sqrt{\cos 2x}}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$.

348. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$.

349. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1-\operatorname{arctg} 3x}-\sqrt[3]{1-\operatorname{arcsen} 3x}}{\sqrt{1-\operatorname{arcsen} 2x}-\sqrt{1+\operatorname{arctg} 2x}}$.

350*. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{\pi}-\sqrt{\arccos x}}{\sqrt{x+1}}$.

---

351. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$.

352. $\lim\limits_{t\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{t}\right)^t$.

353. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x+1}{x}}$.

354. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^{mx}$.

355. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$.

356. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}$.

357. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$.

358. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)^x$.

359. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)^x$.

360. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^x$.

361. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$.

362. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^x$.

363. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{sen} x)^{\operatorname{cosec} x}$.

364. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}^2\sqrt{x})^{\frac{1}{2x}}$.

365. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+kx)}{x}$.

366. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(a+x)-\ln a}{x}$.

367. $\lim\limits_{x\to\infty}\{x[\ln(x+a)-\ln x]\}$.

368. $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}$.

369. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{a^h-1}{h}$.

370. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{3x}$.

371. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x-e}{x-1}$.

372*. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$.

373. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\operatorname{sen} x}$.

374. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\operatorname{sen} 2x}-e^{\operatorname{sen} x}}{x}$.

375. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$.

376. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$.

377. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\operatorname{ch} x-\operatorname{sh} x)$.

378. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\operatorname{th} x$.

Diversos límites

En los ejercicios 379—401 hallar los límites.

379. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(ax+1)^n}{x^n+A}$. Considerar separadamente los casos en que n es: 1) un número entero positivo, 2) un número entero negativo, 3) cero.

380. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}-x\sqrt{2}\right)$.

381. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{a^x}{a^x+1}$ $(a>0)$.

382. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}$ $(a>0)$.

383. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$.

384. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}$.

385. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+\operatorname{sen} x}{x+\cos x}$.

386. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\operatorname{arcsen} x}{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$.

387. $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(a+3h)-3\operatorname{sen}(a+2h)+3\operatorname{sen}(a+h)-\operatorname{sen} a}{h^3}$.

388. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^2 x\left(\sqrt{2\operatorname{sen}^2 x+3\operatorname{sen} x+4}-\sqrt{\operatorname{sen}^2 x+6\operatorname{sen} x+2}\right)$.

389. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$.

390*. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\ldots\cos\frac{x}{2^n}\right)$.

391. $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)$.

392. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x}\right)$.

393*. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\operatorname{arctg}\frac{x+1}{x+2}-\frac{\pi}{4}\right)$.

394. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\operatorname{arctg}\frac{x+1}{x+2}-\operatorname{arctg}\frac{x}{x+2}\right)$.

395*. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{arcsen} x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$.

396. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x^n}\right)^x$ $(n>0)$.

397*. $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}$.

398. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln\cos x}{x^2}$.

399. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^{\frac{\operatorname{sen} x}{x-\operatorname{sen} x}}$.

400. $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x+\operatorname{sen} x)^{\frac{1}{x}}$.

491. $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x+a\operatorname{sen} bx)^{\frac{1}{x}}$.

Comparación de magnitudes infinitesimales

402. La magnitud infinitesimal u_n toma los valores

$$u_1=1, \quad u_2=\frac{1}{2}, \quad u_3=\frac{1}{3}, \ldots, \quad u_n=\frac{1}{n}, \ldots,$$

y la magnitud infinitesimal v_n respectivamente

$$v_1=1, \quad v_2=\frac{1}{2!}, \quad v_3=\frac{1}{3!}, \ldots, \quad v_n=\frac{1}{n!}, \ldots$$

Comparar u_n y v_n. ¿Cuál de las dos es de orden infinitesimal superior?

403. La función u_n, toma los valores

$$u_1=0, \quad u_2=\frac{3}{8}, \quad u_3=\frac{8}{27}, \ldots, \quad u_n=\frac{n^2-1}{n^3}, \ldots,$$

y la función v_n, respectivamente

$$v_1=2, \quad v_2=\frac{5}{8}, \quad v_3=\frac{10}{27}, \ldots, \quad v_n=\frac{n^2+1}{n^3}, \ldots$$

Comparar estas dos magnitudes infinitesimales.

404. La magnitud infinitesimal u_n toma los valores

$$u_1=0, \quad u_2=\frac{1}{4}, \quad u_3=\frac{2}{9}, \ldots, \quad u_n=\frac{n-1}{n^2}, \ldots,$$

y la magnitud infinitesimal v_n, respectivamente

$$v_1=3, \quad v_2=\frac{5}{4}, \quad v_3=\frac{7}{9}, \ldots, \quad v_n=\frac{2n+1}{n^2}, \ldots$$

Comprobar que u_n y v_n son infinitesimales del mismo orden, pero no equivalentes.

405. Las funciones $y=\frac{1-x}{1+x}$ e $y=1-\sqrt{x}$ son infinitesimales cuando $x \to 1$. ¿Cuál de las dos es de orden infinitesimal superior?

406. Dada la función $y=x^3$, mostrar que Δy y Δx cuando $\Delta x \to 0$ y $\Delta x \neq 0$, son infinitesimales del mismo orden.

Comprobar que la magnitud Δy es infinitesimal de orden superior que Δx cuando $x=0$.

¿Para qué valor de x son equivalentes los incrementos Δy y Δx?

407. Comprobar que las magnitudes infinitesimales $1-x$ y $1-\sqrt[3]{x}$ son del mismo orden infinitesimal cuando $x \to 1$. ¿Son equivalentes?

408. Sea $x \to 0$. Entonces $\sqrt{a+x^3}-\sqrt{a}$ $(a>0)$ es una magnitud infinitesimal. Determinar su orden respecto a x.

409. Definir el orden, respecto a x, de la función infinitesimal para $x \to 0$:

1) $x^3+1000x^2$; 2) $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}$; 3) $\frac{x(x+1)}{1+\sqrt{x}}$; 4) $\frac{7x^{10}}{x^3+1}$.

410. Demostrar que los incrementos de las funciones $u = a\sqrt{x}$ y $v = bx^2$ para $x > 0$ y para el incremento general $\Delta x \to 0$ son del mismo orden infinitesimal. ¿Para qué valor de x son equivalentes (a y b son distintas de cero)?

411. Mostrar que cuando $x \to 1$ las magnitudes infinitesimales $1 - x$ y $a(1 - \sqrt[k]{x})$, donde $a \neq 0$ y k es un número entero positivo, son del mismo orden infinitesimal. ¿Para qué valor de a son equivalentes?

412. Demostrar que las funciones $\sec x - \operatorname{tg} x$ y $\pi - 2x$ son infinitesimales del mismo orden cuando $x \to \pi/2$. ¿Son equivalentes?

413. Demostrar que las magnitudes infinitesimales $e^{2x} - e^x$ y $\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} x$ son equivalentes cuando $x \to 0$.

414. Definir el orden de la función infinitesimal respecto a x cuando $x \to 0$:

$$1)\ \sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}-1; \quad 2)\ \sqrt{1+2x}-1-\sqrt{x}; \quad 3)\ e^{\sqrt{x}}-1;$$

$$4)\ e^{\operatorname{sen} x}-1; \quad 5)\ \ln(1+\sqrt{x \operatorname{sen} x}); \quad 6)\ \sqrt{1+x^2}\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2};$$

$$7)\ e^x-\cos x; \quad 8)\ e^{x^2}-\cos x; \quad 9)\ \cos x-\sqrt[3]{\cos x};$$

$$10)\ \operatorname{sen}(\sqrt{1+x}-1); \quad 11)\ \ln(1+x^2)-2\sqrt[3]{(e^x-1)^2};$$

$$12)\ \operatorname{arcsen}(\sqrt{4+x^2}-2).$$

Algunos problemas de geometría

415. Consideremos un triángulo equilátero de lado a. Sus tres alturas sirven para engendrar un nuevo triángulo equilátero y así sucesivamente n veces. Hallar el límite de la suma do las áreas de todos los triángulos cuando $n \to \infty$.

416. Un círculo de radio R lleva inscrito un cuadrado; éste, lleva inscrito un círculo el cual, a su vez, tiene inscrito un cuadrado, y así sucesivamente n veces. Hallar el límite de la suma de las áreas de todos los círculos y el de la suma de las áreas de todos los cuadrados cuando $n \to \infty$.

417. Un triángulo isósceles rectángulo cuya base está dividida en $2n$ partes iguales lleva inscrita una figura escalonada (véase la fig. 15). Demostrar que la diferencia entre el área del triángulo y la figura escalonada es infinitesimal cuando n crece infinitamente.

418. Un triángulo isósceles rectángulo cuyo cateto es igual a a, tiene dividida su hipotenusa en n partes iguales. De los puntos de división están trazadas rectas paralelas a los catetos resultando una línea quebrada, $AKLMNOPQRTB$ (véase la fig. 16), cuya longitud es igual a $2a$ para cualquier n. De ahí que el límite de su longitud es igual a $2a$. Pero, por otra parte, la línea quebrada va aproximándose

infinitamente a la hipotenusa del triángulo cuando n crece infinitamente. Por consiguiente, la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de las longitudes de los catetos. Este razonamiento encierra un error. Hallarlo.

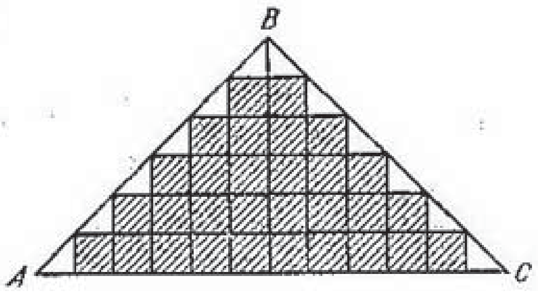

Fig. 15

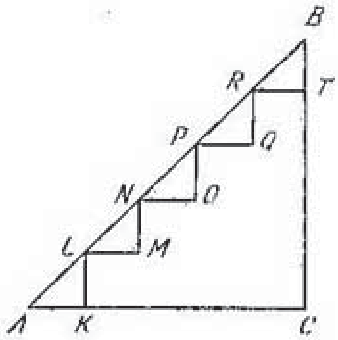

Fig. 16

419. El segmento AB cuya longitud es a, está dividido en partes iguales por n puntos, desde los cuales se han trazado rayos en ángulos

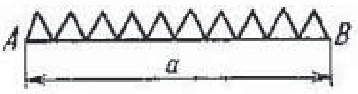

Fig. 17

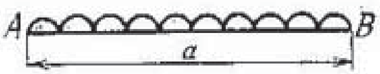

Fig. 18

$\frac{\pi}{2n}$ (véase la fig. 17). Hallar el límite de la longitud de dicha línea quebrada cuando n crece infinitamente. Comparar con el resultado del ejercicio anterior.

420. El segmento AB cuya longitud es a está dividido en n partes iguales. Los pequeños segmentos resultantes sirven de cuerdas y subtienden arcos de circunferencia, cada uno de los cuales es igual a π/n radián (véase la fig. 18). Hallar el límite de la longitud de la línea resultante cuando $n \to \infty$. ¿Cómo cambiaría el resultado si las cuerdas subtendiesen una semicircunferencia?

421. Una circunferencia cuyo radio es R está dividida por n puntos M_1, M_2, . . ., M_n en partes iguales. Cada uno de los referidos puntos sirve para trazar desde él un arco de circunferencia (cuyo radio es de r) hasta que se corte con otros arcos trazados desde los puntos vecinos (véase la fig. 19). Hallar el límite de la longitud de la línea cerrada resultante cuando n crece infinitamente.

422. Dos círculos de radios R y r respectivamente ($R > r$), tocan el eje OY en el origen de coordenadas y están colocados a la dere-

cha del eje (véase la fig. 20). ¿De qué orden, respecto a x, son el segmento infinitesimal MM' y el ángulo infinitesimal α cuando $x \to 0$?

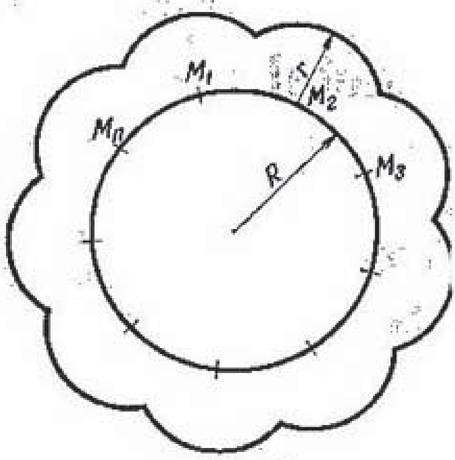

Fig. 19

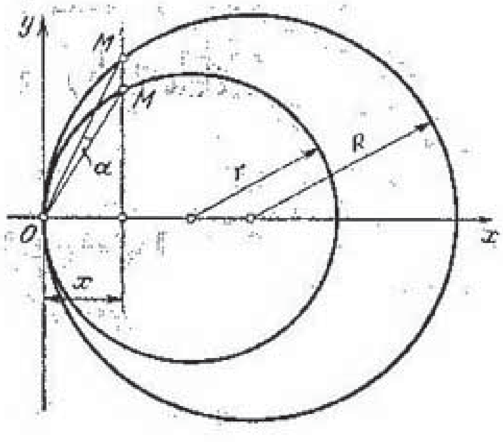

Fig. 20

423. El segmento lineal OP une el centro de una circunferencia con el punto P, que se halla fuera de aquélla. De éste trazamos una tangente PT a la circunferencia. Del punto T bajamos una perpendicular, TN, sobre la recta OP. El punto de intersección de la recta OP con la circunferencia es A. Demostrar que los segmentos AP y AN son infinitesimales equivalentes cuando $P \to A$.

424. En los puntos extremos y medio del arco AB de una circunferencia se han trazado las tangentes y los puntos A y B se han unido por una cuerda. Demostrar que la razón de las áreas de dos triángulos resultantes tiende a 4, disminuyendo infinitamente el arco AB.

Problemas de cálculo

425. Partiendo de la equivalencia de las funciones $\sqrt{1+x}-1$ y $\frac{1}{2}x$, cuando $x \to 0$, calcular aproximadamente: 1) $\sqrt{105}$; 2) $\sqrt{912}$; 3) $\sqrt{260}$; 4) $\sqrt{1632}$; 5) $\sqrt{0{,}31}$; 6) $\sqrt{0{,}021}$.

426. Mostrar que las funciones $\sqrt[n]{1+x}-1$ y x/n son infinitesimales equivalentes cuando $x \to 0$. Valerse de ello para calcular aproximadamente las raíces: 1) $\sqrt[3]{1047}$; 2) $\sqrt[3]{8144}$; 3) $\sqrt[5]{1{,}1}$; 4) $\sqrt[5]{1080}$. Hallar el valor de las referidas raíces en la tabla logarítmica. Comparar los resultados.

427. Valiéndose de la equivalencia de $\ln(1+x)$ y x cuando $x \to 0$, calcular aproximadamente los logaritmos naturales (neperianos) de los siguientes números: 1,01; 1,02; 1,1; 1,2. Hallar los logaritmos decimales de los mismos números y compararlos con los datos presentados en la tabla.

Capítulo III

Derivada y diferencial. Cálculo diferencial.

§ 1. Derivada. Velocidad de variación de la función

Algunos problemas de física

428. Dada la ecuación del movimiento rectilíneo del punto:

$$s = 5t + 6,$$

hallar la velocidad media del movimiento: a) en los primeros 6 segundos, b) en el intervalo de tiempo transcurrido entre el final del tercer segundo hasta el final del sexto segundo.

429. El punto M va alejándose del punto inmóvil A de modo que la distancia AM aumenta siendo proporcional al cuadrado de tiempo. Al transcurrir 2 min desde que comenzó el movimiento, la distancia AM era igual a 12 m. Hallar la velocidad media del movimiento: a) en los primeros 5 min; b) en el intervalo de tiempo desde $t = 4$ min hasta $t = 7$ min; c) en el intervalo de tiempo desde $t = t_1$ hasta $t = t_2$.

430. Dada la ecuación del movimiento rectilíneo:

$$s = t^3 + \frac{3}{t},$$

hallar la velocidad media del movimiento en el intervalo de tiempo desde $t = 4$ hasta $t = 4 + \Delta t$, poniendo $\Delta t = 2$; 1; 0,1; 0,03.

431. Un cuerpo efectúa la caída libre de acuerdo con la ley $s = \frac{gt^2}{2}$, donde g ($\approx 9{,}80$ m/s^2) es la aceleración de la gravedad. Hallar la velocidad media del movimiento en el intervalo de tiempo desde $t = 5$ s hasta $(t + \Delta t)$s, poniendo $\Delta t = 1$s; 0,1s; 0,05 s; 0,001s; hallar la velocidad del cuerpo en caída libre al final del quinto y del décimo segundos. Obtener la fórmula de la velocidad del cuerpo en caída libre para cualquier momento de tiempo t.

432. Consideremos una barra delgada de estructura heterogénea AB cuya longitud $L = 20$ cm. La masa de un segmento AM aumenta proporcionalmente al cuadrado de la distancia entre el punto M