

EJERCICIOS PARA ENTRENARSE

Lenguaje algebraico.

Operaciones con monomios

- Expresa las siguientes cantidades en el lenguaje algebraico.

- El espacio recorrido en un tiempo t por un móvil que lleva velocidad constante v .
- El volumen de un cubo de arista x .
- El volumen de un cilindro de radio de la base r y altura h .
- El perímetro de un triángulo isósceles de lados iguales x y lado desigual y .

- En estas columnas están, desordenados, cuatro polinomios y sus respectivos valores numéricos para ciertos valores de x .

Polinomio	x	Valor numérico
$x^4 - 2x^2 - x + 1$	$x = 2$	-1
$x^2 - 3 x + 1 $	$x = 0$	-3
$\frac{x^3}{2} + 1$	$x = 1$	-5
$x^5 - 3x^4 - 2x^3 + x + 1$	$x = -2$	1

Relaciona en tu cuaderno cada polinomio con su valor numérico para el valor de x correspondiente.

- Dados los monomios $A = 6x^2$, $B = 3x^4$, $C = \frac{1}{2}x^4$ y $D = -2x$, realiza las siguientes operaciones.

- $A + D$
- $B - C$
- $A - B + C$
- $A \cdot D$
- $B : C$
- $D \cdot B$
- $A \cdot B \cdot C$
- $A : D \cdot B$

- Realiza las siguientes operaciones.

- $(-2x^2 + x) \cdot (3x^2)$
- $(x^3 - 2x + 1) \cdot \left(\frac{1}{2}x\right)$
- $(-3x^4 + 2x^3 - 5x) : (4x)$
- $(4x^5 - 3x^4 + x^3 - 2x^2) : (2x^2)$

Operaciones con polinomios

- Dados los polinomios $P(x) = 2x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x + 1$, $Q(x) = 3x^3 + x^2 - \frac{2}{3}x + 2$ y $R(x) = -4x^4 + x^2 - 4$, realiza las siguientes operaciones.

- $P(x) + Q(x)$
- $Q(x) - R(x)$
- $R(x) - Q(x) + P(x)$
- $P(x) + Q(x) + R(x)$

- 37 Rellena en tu cuaderno cada recuadro con el coeficiente adecuado.

- $(2x^2 + \square x - 1) - (-3x^2 - 5x + \square) = 5x^2 + 2x + 4$
- $(3x^4 - x + 2) - (\square x^4 + \square x + \square) = 4x^4 + 3x + 3$
- $(5x^3 + \square x^2 + \square) + (\square x^3 + x^2 - 2) = 2x^3 - 3x^2 - 3$

- 38 Realiza las siguientes operaciones con los polinomios $P(x) = \frac{1}{2}x^4 + 2x^3 + 1$, $Q(x) = 3x^3 - 4x - 1$ y $R(x) = 4x^2 - 5x + 3$.

- $P(x) \cdot [Q(x) + R(x)]$
- $Q(x) \cdot [R(x) - P(x)]$
- $R(x) \cdot [P(x) + Q(x)]$

¿Qué propiedad puedes aplicar para efectuarlas?

- Calcula estas potencias.

- $(x + y - 2z)^2$
- $(3a - 2b + c)^2$

Identidades notables

- Efectúa estas operaciones.

- $(2x^2 - 3y)^2$
- $(3x - 2y)^3$
- $(3x^3 - \sqrt{x})^2$
- $(2x^4 + x^2)^2$
- $(5a + 3b) \cdot (5a - 3b)$
- $(2xy + 4zt) \cdot (2xy - 4zt)$

División de polinomios. Regla de Ruffini

- Realiza las siguientes divisiones de polinomios.

- $(6x^3 - 2x^2 - 1) : (x^2 + x + 2)$
- $(-3x^4 + x^2 - 2x + 3) : (3x^2 - 2x + 1)$
- $(x^6 - 2x^3 + 3x - 3) : (-2x^3 + x - 2)$

- 42 Expresa las siguientes divisiones de la forma

$$\frac{D(x)}{d(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{d(x)}$$

- $\frac{3x^2 - 3x + 1}{x^2 + 2x - 1}$
- $\frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x^2 - x + 3}$
- $\frac{4x^2 - 1}{x^2 + 3}$
- $\frac{2x^3 + x^2 - x + 3}{x^3 + 2x - 1}$

Realiza las siguientes divisiones aplicando la regla de Ruffini, e indica el cociente y el resto.

- $(3x^4 - 2x^2 + x - 3) : (x + 1)$
- $(x^5 - 2x^3 - x + 1) : (x - 1)$
- $(2x^3 - x^2 + 3x - 1) : (x + 2)$

Calcula el resto de las siguientes divisiones sin necesidad de realizarlas.

- $(x^7 - 3x^2 + 1) : (x - 1)$
- $(x^{101} - 2) : (x + 1)$
- $(x^5 - 2x^3 + 3) : (x - 3)$

¿Qué teorema has utilizado?

- 45 Halla el valor de k en los siguientes polinomios teniendo en cuenta los datos indicados.

- $x^3 + (k + 2)x + 1$ es divisible entre $(x + 1)$.
- $(x^4 + kx^2 + 2x + 1) : (x - 1)$ tiene -4 como resto.
- $x^4 + 3x^3 + kx^2 + x - 6$ tiene por factor $(x + 1)$.

Factorización de polinomios

46 Calcula las raíces enteras de los siguientes polinomios.

- a) $P(x) = 2x^2 + 6x^2 - 2x - 6$
 b) $Q(x) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12$
 c) $R(x) = x^4 + x^3 - 8x^2 - 9x - 9$

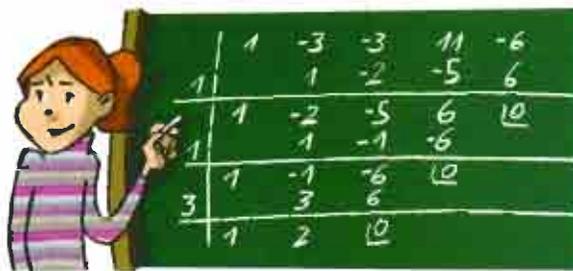
47 Escribe un polinomio de grado 3 cuyas raíces sean $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ y $x_3 = -4$.

¿Existen más polinomios que verifiquen esas condiciones? ¿Por qué?

48 Factoriza los siguientes polinomios.

- a) $P(x) = x^3 + x^2 - 6x$
 b) $Q(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$
 c) $R(x) = x^3 - x^2 - x^3 - 2x^2$
 d) $S(x) = 6x^3 + 5x^2 - 3x - 2$
 e) $T(x) = 2x^4 + 7x^3 + 8x^2 + 3x$

49 Observa el siguiente esquema y escribe el polinomio inicial y su expresión factorizada.



50 Factoriza el polinomio

$$P(x) = 2x^3 + 7x^2 - 3x - 18$$

sabiendo que verifica las siguientes condiciones.

$$P\left(\frac{3}{2}\right) = 0, P(-2) = 0 \text{ y } P(-3) = 0$$

CUESTIONES PARA ACLARARSE

51 ¿Cuál de estas expresiones algebraicas es un monomio?

- a) $\sqrt{12}x$ c) $3x^2$
 b) $\frac{4}{x}$ d) $x^3\sqrt{3}$

52 ¿Puedes realizar la división $(x^3 - x^2 - x + 1) : (x^2 - 1)$ utilizando la regla de Ruffini?

53 Un polinomio es de grado 7, y otro, de grado 6. Indica el grado de los polinomios que resultan de estas operaciones entre ellos.

- a) La suma **c) El cociente**
 b) El producto d) El cubo del segundo

54 Tenemos dos polinomios de grado 3. ¿Puede el polinomio suma ser de grado 2? Pon un ejemplo.

55 Si $P(0) = -7$, ¿puede ser $P(x) = ax^2 + bx + 8$? Razona la respuesta.

56 Indica razonadamente cuáles son las raíces del polinomio $(x-1)(x+2)(x-3)$.

57 Si $P(8) = 0$, ¿puede $P(x)$ ser irreducible? ¿Por qué?

58 El polinomio $Q(x)$ es de grado 3 y sabemos que $Q(-1) = Q(2) = Q(0) = 0$. ¿Cuál es la posible expresión del polinomio $Q(x)$?

Y si además sabemos que $Q(-2) = 16$, ¿cuál es entonces su expresión exacta?

59 Calcula el resto de la división $M(x) : (x-6)$ sabiendo que $M(6) = 3$.

60 Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

- a) Si $(x+6)$ divide a $L(x)$, entonces 6 es una raíz de $L(x)$.
 b) Si $G(-5) = 0$, $(x+5)$ es un factor de $G(x)$.
 c) Si $B(x)$ es irreducible, existe al menos un valor $x = a$ para el que $B(a) = 0$.
 d) Un polinomio de grado 5 no puede disponer de 6 raíces.
 e) Un polinomio con término independiente 0 posee al menos una raíz.
 f) $x^n + 1$ es irreducible o tiene como única raíz -1 .

61 ¿Es divisible entre $(x+3)$ el polinomio $x^2 + 3^2$?

62 Indica cuál de estos polinomios tiene -8 como raíz y 24 de término independiente.

- a) $3x - 24$ b) $3x + 24$ c) $24x + 8$ d) $24(x + 8)$

63 ¿Qué polinomio podría expresarse como el cociente $\frac{x^2 - 4x + 3}{x-1}$?

64 Si el polinomio $P(x) = x^2 - kx + t$ tiene una raíz doble en $x = 2$, ¿cuánto valen k y t ?

65 Calcula el resto de esta división.

$$(x^{27} - 49x^{12} + 17) : (x + 1)$$

66 $Q(x)$ es un polinomio con coeficientes enteros cuyo término independiente es un número primo, a . Si además se cumple que:

$$Q(\pm a) \neq 0 \text{ y } Q(\pm 1) \neq 0$$

Indica razonadamente si $Q(x)$ puede tener raíces enteras.

PROBLEMAS PARA APLICAR

- 67 Relaciona en tu cuaderno las magnitudes indicadas correspondientes a un triángulo equilátero de lado x con los monomios de la columna de la derecha.

Perímetro	$\frac{\sqrt{3}}{2}x$
Área	$3x$
Altura	$\frac{\sqrt{3}}{4}x$

- 68 Escribe el polinomio que expresa el volumen de un ortoedro cuyas dimensiones son números consecutivos, siendo el mayor de ellos x .

- 69 Utiliza la notación polinómica para demostrar que la suma de un múltiplo de 12, un múltiplo de 8 y un múltiplo de 20 es múltiplo de 4.

- 70 ¿Qué monomio expresa la diagonal de un cubo de lado x ?

- 71 Sean los polinomios $E(x) = 4\pi x^2$, $F(x) = \frac{5}{3}\pi x^2$ y $G(x) = 2\pi x^2 + 10\pi x$ asociados a distintas figuras geométricas. Relaciona en tu cuaderno las cantidades de estas tres columnas.

Volumen de un cono de radio 3 y altura 5	$G(3)$	36π
Área de un cilindro de altura 5 y radio 3	$E(3)$	15π
Volumen de una esfera de radio 3	$F(3)$	48π

- 72 Calcula a , b y c sabiendo que $x^3 - 6x^2 + ax + b$ es el cubo del binomio $x + c$.

- 73 Halla los valores de a y b para que los restos de las divisiones del producto $(ax^2 + bx) \cdot (x - 3)$ entre $(x - 1)$ y $(x + 1)$ sean, respectivamente, -6 y -2 .

- 74 Simplifica los siguientes polinomios.

a) $(x - 2)(x + 2) - (x - 3)(x + 3) - x(2x + 1) - 4$
 b) $(x^2 + 2x + 1)(x^4 - 2x^2 + 3x^2 + 1) - x^6 + 2x^3$

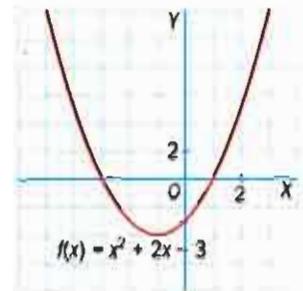
- 75 Calcula los valores de a y b necesarios para que se cumplan estas igualdades.

a) $x^5 - 5x^3 + 4x^2 - 3x - 2 = (x - 2)(x^4 + ax^3 + bx^2 + 2x + 1)$

b) $x^5 - x^5 - 2x^4 - 4x^2 + 4x + 8 = (x^2 - x - 2)(x^4 + ax^3 + bx - 4)$

- 76 Halla un polinomio de segundo grado, $R(x)$, que cumpla $R(1) = 5$, $R(-1) = 9$ y $R(0) = 4$.

- 77 Observa la gráfica de $y = f(x)$ y halla las raíces del polinomio $f(x) = x^2 + 2x - 3$.



- 78 Estudia el signo de este polinomio por el procedimiento que se indica a continuación.

$$Q(x) = (x + 2)(x - 1)(x - 3)$$

- a) Encuentra sus ceros.
 b) Divide la recta real en los intervalos que tienen por extremos esos ceros.
 c) Elige un punto en cada uno de esos intervalos y calcula el valor numérico de $Q(x)$ en ese punto. El signo de este valor numérico es el signo de $Q(x)$ en todo el intervalo.

- 79 La expresión que nos da la posición, s , de un objeto que sigue un movimiento uniformemente acelerado es:

$$s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + s_0$$

Donde a es la aceleración; v_0 , la velocidad inicial; s_0 , la posición inicial, y t , el tiempo.

- a) ¿Puede el polinomio $M(t) = 5t^2 + 6t + 3$ describir un movimiento uniformemente acelerado? Identifica, en caso afirmativo, los valores a , v_0 y s_0 .
 b) ¿Puede el monomio $T(t) = 4,9t^2$ corresponder a un cuerpo que se deja caer en el vacío? ¿Por qué? ¿Cuál es el valor de a en este caso?

- 80 Un Ayuntamiento quiere construir un depósito de agua.

Disponen de una pieza cuadrada de metal de 20×20 metros de la que cortan cuatro cuadrados de lado x en las cuatro esquinas, y levantan los cuatro rectángulos resultantes para formar los laterales del depósito, soldando las esquinas.

- a) ¿Qué polinomio $V(x)$ expresa el volumen que puede acumular el depósito?

- b) Halla los valores numéricos de V en $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ y 6 , y después dibuja los puntos $(x, V(x))$.

- c) ¿Podrías averiguar para qué valor de x el depósito tiene el máximo volumen?



REFUERZO

Operaciones con polinomios

● Dados los polinomios $P(x) = 3x^3 - 4x^2 + 10x - 5$, $Q(x) = 6x^4 - 5x^3 + 8x - 5$ y $R(x) = -x^2 - 3x + 8$, aplica la propiedad distributiva y calcula estos productos.

- a) $P(x) \cdot [Q(x) + R(x)]$
- b) $Q(x) \cdot [R(x) - P(x)]$

● Completa la siguiente división de polinomios en tu cuaderno rellenando los coeficientes que faltan.

$$\begin{array}{r}
 2x^4 + \square x^3 + \square x^2 - 4x + 1 \quad | \quad x^2 - x + 2 \\
 -\square x^4 + \square x^3 + \square x^2 \\
 \hline
 x^3 - \quad x^2 - 4x + 1 \\
 -\square x^3 + \square x^2 + \square x \\
 \hline
 \quad + \square x^2 + \square x + 1
 \end{array}$$

Aplica la prueba de la división para comprobar que la has realizado correctamente.

● Utilizando la regla de Ruffini, averigua si $(x - 3)$ es factor del polinomio $P(x) = x^3 - 4x^2 + 8x - 15$.
¿Tiene más factores dicho polinomio? ¿Por qué?

Identidades notables

- Desarrolla estas expresiones.
 - a) $(4x^2y^3 - 5y^2t)^2$
 - b) $(-3 + 6b^3c^4)^2$
 - c) $(2x - 3y)^3$
 - d) $(5x^3z + 7y^2t) \cdot (5x^3z - 7y^2t)$

Raíces y factorización de polinomios

- Indica si los valores $x_1 = 2$ y $x_2 = 1$ son raíces del polinomio $P(x) = x^5 + x^4 - 7x^3 + 7x - 6$.
- 86 Halla el polinomio de cuarto grado cuyo coeficiente principal es 3 y que tiene por raíces $x_1 = 1$ (raíz doble), $x_2 = -2$ y $x_3 = 4$. Desarróllalo.
- 87 Factoriza los siguientes polinomios.
 - a) $x^3 - x^2 - 5x - 3$
 - b) $3x^4 - 5x^3 - 33x^2 + 23x - 12$

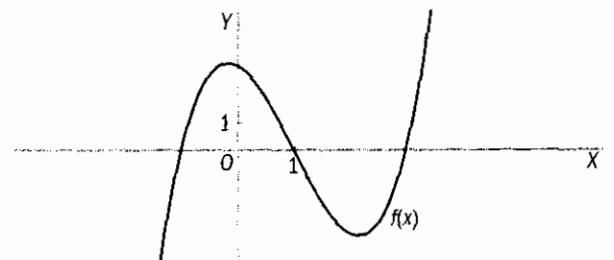
AMPLIACIÓN

- 88 En un hexágono regular de lado x , ¿qué polinomio determina la expresión de su área?
- 89 Halla el polinomio de tercer grado que cumple estas tres condiciones.
 - Su coeficiente principal es 8.
 - Es divisible por $2x^2 + 1$.
 - El resto de su división entre $(x + 2)$ es 56.
- Demuestra que el polinomio $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$ no toma valores numéricos negativos para ningún valor de x .
- 91 Si $N(x) = 8x^3 + ax^2 + 54x + x$, calcula a y b para que $N(x)$ sea un cubo perfecto. En ese caso, ¿qué polinomio al cubo da como resultado $N(x)$?
- Demuestra que la suma de la unidad más la suma de los cuadrados de tres números consecutivos es divisible entre tres.
- 93 Halla a y b para que $T(x)$ sea divisible entre $A(x)$ en estos dos casos.
 - a) $T(x) = 3x^3 + ax^2 + bx + 9$ y $A(x) = x^2 - 9$
 - b) $T(x) = 2x^4 + ax^3 - x^2 + bx + 1$ y $A(x) = x^2 - 1$

● Completa en tu cuaderno esta división.

$$\begin{array}{r}
 \square \quad | \quad -1 \quad \square \quad 1 \quad \square \\
 \square \quad | \quad \square \quad \square \quad \square \\
 \hline
 \square \quad | \quad \square \quad 2 \quad -3 \quad -4
 \end{array}$$

- 95 Factoriza el numerador y el denominador para encontrar una expresión simplificada de la fracción algebraica $\frac{L(x)}{R(x)}$, si $L(x) = 3x^3 - 16x^2 + 17x - 4$ y $R(x) = 2x^3 - 13x^2 + 23x - 12$.
- Estudia el signo del polinomio $P(x) = x^3 + 3x^2 - 10x$ según el proceso de la actividad número 78.
- La gráfica de la función polinómica $y = f(x)$ es la siguiente.



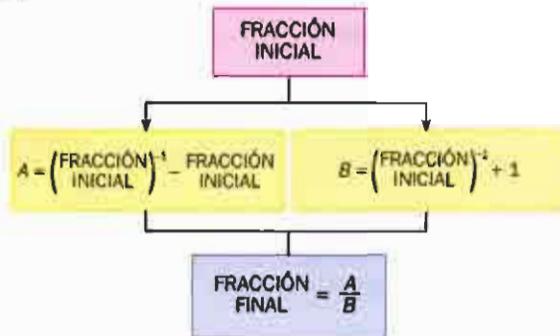
¿Cuál de los siguientes puede ser $f(x)$?

- a) $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$
- b) $f(x) = x^3 - 4x$
- c) $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$
- La suma de las raíces de un polinomio de grado 2 es 2, y su producto, -3 . ¿Cuál es el polinomio sabiendo que su coeficiente de grado 2 es 1?
- Si $M(-1) = 5$, $M\left(\frac{1}{2}\right) = 5$, $M(-4) = 5$ y $M(12) = 5$, y el grado de $M(x)$ es 4, ¿cuál es su expresión?

PARA INTERPRETAR Y RESOLVER

100 Transformaciones en una fracción

Dada una fracción inicial cualquiera, realizamos las siguientes transformaciones sucesivas.



a) Aplica las transformaciones a las fracciones:

$$\frac{1}{3}, \frac{4}{5} \text{ y } \frac{7}{10}$$

b) ¿Qué relación verifican las fracciones inicial y final? Demuestra, a partir de una fracción genérica $\frac{a}{b}$, la conjetura que has obtenido en el apartado anterior.

101 Cambio de dimensiones

Esther, Elvira y Emilia han heredado de su abuelo el terreno que aparece en la figura, que tiene forma cuadrada de lado a .

A Esther le corresponde la franja vertical de x metros; a Elvira, la franja horizontal de y metros, y Emilia, el resto.



Escribe mediante polinomios las siguientes medidas:

- La superficie de terreno correspondiente a Emilia.
- El área que heredan Esther y Elvira. Calcula la relación entre estas dos áreas si el terreno inicial tiene de lado 100 metros, y las anchuras de las franjas son de 30 y 40 metros, respectivamente.

AUTOEVALUACIÓN

1 Transcribe las dos siguientes expresiones verbales al lenguaje algebraico.

- La multiplicación de tres números consecutivos.
- El perímetro de un rectángulo de base b y altura h .

2 Calcula el valor numérico del siguiente polinomio para $x_1 = 2$ y $x_2 = -1$.

$$P(x) = \frac{x^3}{2} - 2(x^2 - 1)$$

3 Si $P(x) = 3x^2 - 2x + 4$, $Q(x) = -2x^3 - x^2 + 5x - 1$ y $R(x) = x^4 - x^3 + 4x^2 + 3x - 2$, calcula estas operaciones.

- $P(x) - Q(x) + R(x)$
 - $P(x) \cdot [Q(x) + R(x)]$
- ¿Qué grado tienen los polinomios resultantes?

4 Realiza las siguientes divisiones de polinomios.

- $(5x^4 - 3x^2 + x - 1) : (x^3 - x - 1)$
- $(4x^3 - 2x + 2) : (x^2 + x + 1)$

¿Podrías aplicar la regla de Ruffini? ¿Por qué?

5 Realiza las siguientes divisiones aplicando la regla de Ruffini.

- $(2x^3 + 4x^2 - 5x - 3) : (x - 2)$
- $(x^4 - 3x^2 + 4x - 2) : (x + 3)$

Indica los polinomios cociente y resto.

6 El desarrollo del cuadrado del binomio $(3ab - c)^2$ corresponde con:

- $9a^2b^2 - c^2$
- $9a^2b^2 - 6abc + c^2$
- $9a^2b^2 + 6abc + c^2$

7 Indica a cuál de las siguientes expresiones corresponde el desarrollo de la suma por diferencia $(2x^2y + 3y^2z)(2x^2y - 3y^2z)$.

- $4x^4y^2 + 9y^4z^2$
- $4x^4y - 9y^2z$
- $4x^4y^2 - 9y^4z^2$

8 Calcula el valor que debe tener k para que el polinomio $P(x) = x^5 + kx^4 + x^3 - 4x^2 + x - 4$ sea divisible entre $(x - 4)$.

9 ¿Es $(x + 1)$ un factor del polinomio $x^{71} - 1$? Razona tu respuesta.

10 Factoriza los siguientes polinomios.

- $P(x) = 6x^2 + 13x^2 - 13x + 20$
- $Q(x) = x^3 + x^2 - 5x^2 - 11x - 6$