579. $y=\frac{1}{\ln x}$. **580.** $y=\frac{\ln x}{x^n}$.

581. $y=\frac{1-\ln x}{1+\ln x}$. **582.** $y=\frac{\ln x}{1+x^2}$.

583. $y=x^n \ln x$. **584.** $y=\sqrt{1+\ln^2 x}$.

585. $y=\ln(1-2x)$. **586.** $y=\ln(x^2-4x)$.

587. $y=\ln \operatorname{sen} x$. **588.** $y=\log_3(x^2-1)$.

589. $y=\ln \operatorname{tg} x$. **590.** $y=\ln \arccos 2x$.

591. $y=\ln^4 \operatorname{sen} x$. **592.** $y=\operatorname{arctg}[\ln(ax+b)]$.

593. $y=(1+\ln \operatorname{sen} x)^n$. **594.** $y=\log_2[\log_3(\log_5 x)]$.

595. $y=\ln \operatorname{arctg}\sqrt{1+x^2}$. **596.** $y=\operatorname{arcsen}^2 \ln(a^3+x^3)]$.

597. $y=\sqrt[3]{\ln \operatorname{sen}\frac{x+3}{4}}$.

Funciones exponenciales

En los ejercicios 598—633 derivar las funciones que se indican.

598. $y=2^x$. **599.** $y=10^x$. **600.** $y=\frac{1}{3^x}$.

601. $y=\frac{x}{4^x}$. **602.** $y=x\cdot 10^x$. **603.** $y=xe^x$.

604. $y=\frac{x}{e^x}$. **605.** $y=\frac{x^3+2^x}{e^x}$. **606.** $y=e^x \cos x$.

607. $y=\frac{e^x}{\operatorname{sen} x}$. **608.** $y=\frac{\cos x}{e^x}$. **609.** $y=2^{\frac{x}{\ln x}}$.

610. $y=x^3-3^x$. **611.** $y=\sqrt{1+e^x}$.

612. $y=(x^2-2x+3)e^x$. **613.** $y=\frac{1+e^x}{1-e^x}$.

614. $y=\frac{1-10^x}{1+10^x}$. **615.** $y=\frac{e^x}{1+x^2}$.

616. $y=xe^x(\cos x+\operatorname{sen} x)$. **617.** $y=e^{-x}$.

618. $y=10^{2x-3}$. **619.** $y=e^{\sqrt{x+1}}$.

620. $y=\operatorname{sen}(2^x)$. **621.** $y=3^{\operatorname{sen} x}$.

622. $y=a^{\operatorname{sen}^3 x}$. **623.** $y=e^{\operatorname{arcsen} 2x}$.

624. $y=2^{3^x}$. **625.** $y=e^{\sqrt{\ln x}}$.

626. $y=\operatorname{sen}(e^{x^2+3x-2})$. **627.** $y=10^{1-\operatorname{sen}^4 3x}$.

628. $y=e^{\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}}$. **629.** $y=\ln \operatorname{sen}\sqrt[3]{\operatorname{arctg} e^{3x}}$.

630. $y=ae^{-b^2x^2}$. **631.** $y=x^2 e^{-\frac{x^2}{a^2}}$.

632. $y=Ae^{-k^2x}\operatorname{sen}(\omega x+\alpha)$. **633.** $y=a^x x^a$.

Funciones hiperbólicas

En los ejercicios 634—649 derivar las funciones que se indican.

634. $y=\operatorname{sh}^3 x$.
635. $y=\ln \operatorname{ch} x$.
636. $y=\operatorname{arctg}(\operatorname{th} x)$.
637. $y=\operatorname{th}(1-x^2)$.
638. $y=\operatorname{sh}^2 x+\operatorname{ch}^2 x$.
639. $y=\operatorname{ch}(\operatorname{sh} x)$.
640. $y=\sqrt{\operatorname{ch} x}$.
641. $y=e^{\operatorname{ch}^2 x}$.
642. $y=\operatorname{th}(\ln x)$.
643. $y=x \operatorname{sh} x-\operatorname{ch} x$.
644. $y=\sqrt[3]{(1+\operatorname{th}^2 x)^3}$.
645. $y=\frac{1}{2} \operatorname{th} \frac{x}{2}-\frac{1}{6} \operatorname{th}^3 \frac{x}{2}$.
646. $y=\sqrt[4]{\frac{1+\operatorname{th} x}{1-\operatorname{th} x}}$.
647. $y=\frac{1}{2} \operatorname{th} x+\frac{\sqrt{2}}{8} \ln \frac{1+\sqrt{2} \operatorname{th} x}{1-\sqrt{2} \operatorname{th} x}$.
648. $y=\frac{1}{x} \operatorname{ch} 2x+\sqrt{x} \operatorname{sh} 2x$.
649. $y=x^2 e^{3x} \operatorname{cosech} x$.

Derivación logarítmica

En los ejercicios 650—666 derivar las funciones que se indican aplicando la regla de la derivación logarítmica.

650. $y = x^{x^2}$. 651. $y = x^{x^x}$.
652. $y = (\operatorname{sen} x^{\cos x})$. 653. $y = (\ln x)^x$.
654. $y = (x + 1)^{2/x}$. 655. $y = x^3 e^{x^2} \operatorname{sen} 2x$.
656. $y=\frac{(x-2)^2 \sqrt[3]{x+1}}{(x-5)^3}$.
657. $y=x^{\ln x}$.
658. $y=\frac{(x+1)^3 \sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}$.
659. $y=\sqrt{x \operatorname{sen} x \sqrt{1-e^x}}$.
660. $y=\sqrt{\frac{1-\operatorname{arcsen} x}{1+\operatorname{arcsen} x}}$.
661. $y=x^{\frac{1}{x}}$.
662. $y=x^{\operatorname{sen} x}$.
663. $y=\left(\frac{x}{1+x}\right)^x$.
664. $y=2x^{\sqrt{x}}$.
665. $y=(x^2+1)^{\operatorname{sen} x}$.
666. $y=\sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}$.

Funciones diversas

En los ejercicios 667—770 derivar las funciones que se indican.

667. $y=(1+\sqrt[3]{x})^3$.
668. $y=a \operatorname{tg}\left(\frac{x}{k}+b\right)$.
669. $y=\sqrt{1+\sqrt{2px}}$.
670. $y=\operatorname{arctg}(x^2-3x+2)$.

671. $y = \lg(x - \cos x)$.

672. $y = 3\cos^2 x - \cos^3 x$.

673. $y = 5\operatorname{tg}\frac{x}{5} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$.

674. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x + \sqrt{x}}}$.

675. $y = \operatorname{sen}\frac{x}{2}\operatorname{sen} 2x$.

676. $y = \operatorname{sen} x \cdot e^{\cos x}$

677. $y = y^5\sqrt[3]{x^6 - 8}$

678. $y = e^{-x^2}\ln x$.

679. $y = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$.

680. $y = \operatorname{arctg}\frac{x+1}{x-1}$.

681. $y = e^{2x+3}\left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right)$.

682. $y = \frac{2\operatorname{sen}^2 x}{\cos 2x}$.

683. $y = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{3}}{1-x^2}$.

684. $y = \frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \operatorname{ctg}\frac{x}{2}}{x}$.

685. $y = \operatorname{sen}^2\frac{x}{3}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$.

686. $y = \frac{\sqrt[9]{4x^5 + 2}}{3x^4}$.

687. $y = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})$.

688. $y = x\operatorname{arctg}\sqrt{x}$.

689. $y = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x}$.

690. $y = \cos 2x \ln x$.

691. $y = \frac{2}{3}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{1-x^2}$.

692. $y = \operatorname{arcsen}(n \operatorname{sen} x)$.

693. $y = \operatorname{arcsen}\sqrt{\operatorname{sen} x}$.

694. $y = \frac{1}{18}\operatorname{sen}^6 3x - \frac{1}{24}\operatorname{sen}^8 3x$.

695. $y = x - \sqrt{1-x^2}\operatorname{arcsen} x$.

696. $y = \cos\frac{\operatorname{arcsen} x}{2}$.

697. $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$.

698. $\arccos\sqrt{1-3x}$.

699. $y = \operatorname{sen}^2\left(\frac{1-\ln x}{x}\right)$.

700. $y = \log_3(x^2 - \operatorname{sen} x)$.

701. $y = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

702. $y = \ln\frac{x + \sqrt{1-x^2}}{x}$.

703. $y = x\operatorname{arcsen}(\ln x)$.

704. $y = \operatorname{tg}\frac{1-e^x}{1+e^x}$.

705. $y = \cos x\sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 x}$.

706. $y = 0{,}4\left(\cos\frac{2x+1}{2} - \operatorname{sen} 0{,}8x\right)^2$.

707. $y = x \cdot 10^{\sqrt{x}}$.

708. $y = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 2x}$.

709. $y = \ln\operatorname{arctg}\frac{1}{1+x}$.

710. $y = \ln\frac{1}{x + \sqrt{x^2-1}}$.

711. $y = \sqrt[3]{1 + x\sqrt{x+3}}$.

712. $y = x^2\sqrt{1 + \sqrt{x}}$.

713. $y = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 x}}$.

714. $y = x^3\operatorname{arctg} x^3$.

715. $y=\frac{\ln \operatorname{sen} x}{\ln \cos x}$.

716. $y=\operatorname{arcsen} x+\sqrt{1-x^2}$.

717. $y=\frac{\operatorname{arcsen} 4x}{1-4x}$.

718. $y=e^{\frac{1}{\ln x}}$.

719. $y=\ln \frac{1-e^x}{e^x}$

720. $y=10^{x \operatorname{tg} x}$.

721. $y=\operatorname{sen}^2 x \cdot \operatorname{sen} x^2$.

722. $y=\frac{2\cos x}{\sqrt{\cos 2x}}$.

723. $y=x\sqrt{\frac{1-x}{1+x^2}}$.

724. $y=\frac{1}{4}\ln \frac{1+x}{1-x}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x$.

725. $y=2^{\frac{x}{\ln x}}$,

726. $y=\sqrt{(a-x)(x-b)}-(a-b)\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a-x}{x-b}}$.

727. $y=\frac{\operatorname{sen} 3x}{2\operatorname{sen}^2 x \cos x}$.

728. $y=e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$.

729. $y=\sqrt{a^2-x^2}-a\arccos \frac{x}{a}$.

730. $y=\sqrt{x^2+1}-\ln\left(\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)$.

731. $y=\frac{\operatorname{sen}^2 x}{1+\operatorname{ctg} x}+\frac{\cos^2 x}{1+\operatorname{tg} x}$.

732. $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.

733. $y=e^{ax}(a\operatorname{sen} x-\cos x)$.

734. $y=xe^{1-\cos x}$.

735. $y=\frac{1}{\operatorname{arctg} e^{-2x}}$.

736. $y=e^x(\operatorname{sen} 3x-3\cos 3x)$.

737. $y=3x^3\operatorname{arcsen} x+(x^2+2)\sqrt{1-x^2}$.

738. $y=\frac{1}{\sqrt{1+e^{-\sqrt{x}}}}$.

739. $y=2\operatorname{arcsen}\frac{x-2}{\sqrt{6}}-\sqrt{2+4x-x^2}$.

740. $y=\ln(e^x\cos x+e^{-x}\operatorname{sen} x)$.

741. $y=\frac{1+x\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}$.

742. $y=\frac{1}{\cos(x-\cos x)}$.

743. $y=e^x\operatorname{sen} x\cos^3 x$.

744. $y=\sqrt[11]{9+6\sqrt[5]{x^9}}$.

745. $y=x-\ln\left(2e^x+1+\sqrt{e^{2x}+4e^x+1}\right)$.

746. $y=e^{\operatorname{arctg}\sqrt{1+\ln(2x+3)}}$.

747. $y=\frac{e^{x^2}}{e^x+e^{-x}}$.

748. $y=\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\operatorname{ctg} x\ln(1+\operatorname{sen} x)-x$.

749. $y = 2\ln\left(2x - 3\sqrt{1-4x^2}\right) - 6\arcsen 2x$.

750. $y = \frac{3x^2-1}{3x^3} + \ln\sqrt{1+x^2} + \operatorname{arctg} x$.

751. $y = \frac{1}{2}(3-x)\sqrt{1-2x-x^2} + 2\arcsen\frac{x+1}{\sqrt{2}}$.

752. $y = \ln\left(x \operatorname{sen} x\sqrt{1-x^2}\right)$. **753.** $y = x\sqrt{1+x^2}\operatorname{sen} x$.

754. $y = \frac{\sqrt{x+2}\,(3-x)^4}{(x+1)^5}$. **755.** $y = \sqrt[5]{\left(1+xe^{\sqrt{x}}\right)^3}$.

756. $y = \frac{1}{\sqrt{x}} e^{x^2 - \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\ln x + 1}$.

757. $y = \frac{\operatorname{sen} x}{4\cos^4 x} + \frac{3\operatorname{sen} x}{8\cos^2 x} + \frac{3}{8}\ln\frac{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$.

758. $y = \frac{xe^x \operatorname{arctg} x}{\ln^5 x}$. **759.** $y = \frac{(1-x^2)\,e^{3x-1}\cos x}{(\arccos x)^3}$.

760. $y = x\sqrt{(x^2+a^2)^3} + \frac{3a^2x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{3a^4}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$.

761. $y = x(\arcsen x)^2 - 2x + 2\sqrt{1-x^2}\arcsen x$.

762. $y = \ln\cos\operatorname{arctg}\frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

763. $y = \frac{1}{m\sqrt{ab}}\operatorname{arctg}\left(e^{mx}\sqrt{\frac{a}{b}}\right)$.

764. $y = \frac{1}{3}\ln\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}\ln\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$.

765. $y = \ln\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} + 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

766. $y = (\operatorname{tg} 2x)^{\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}$. **767.** $y = \sqrt[3]{\frac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+4}}}$.

768. $y = \ln\sqrt[4]{\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$.

769. $y = \arccos\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$.

770. $y = -\frac{x}{1+8x^3} + \frac{1}{12}\ln\frac{(1+2x)^2}{1-2x+4x^2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\operatorname{arctg}\frac{4x-1}{\sqrt{3}}$.

771. Demostrar que la función $y = \ln\frac{1}{1+x}$ satisface la relación $xy' + 1 = e^y$.

772. Demostrar que la función

$$y=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1}+\ln\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}$$

satisface la relación $2y=xy'+\ln y'$.

773. Demostrar que la función $y=\frac{\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}}$ satisface la relación $(1-x^2)\,y'-xy=1$.

774*. Calcular las sumas

a) $1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}$;

b) $2+2\cdot 3x+3\cdot 4x^2+\ldots+n\,(n-1)x^{n-2}$.

Funciones inversas

775. Supongamos que la regla para derivar la función potencial fue establecida sólo para un exponente entero positivo. Deducir la fórmula para derivar la raíz, aplicando la regla para derivar la función inversa.

776. $x=e^{\operatorname{arcsen} y}$; hallar la expresión para $\frac{dy}{dx}$ mediante y, mediante x.

777. $t=2-3s+s^3$; expresar $\frac{ds}{dt}$ mediante s.

778. $u=\frac{1}{2}\ln\frac{1+v}{1-v}$; comprobar la relación $\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{du}=1$.

779. Teniendo en cuenta que las funciones $\operatorname{arcsen}\sqrt{x}$ y $\operatorname{sen}^2 x$ son recíprocamente inversas y que $(\operatorname{sen}^2 x)'=\operatorname{sen}2x$, hallar $(\operatorname{arcsen}\sqrt{x})'$.

780. Designemos la función, inversa a la función potencial exponencial $y=x^x$, por el símbolo $\alpha(x)$, es decir, supongamos que de $y=x^x$ se deduce $x=\alpha(y)$. Hallar la fórmula para la derivada de la función $y=\alpha(x)$.

781. Las funciones que son inversas a las funciones hipebólicas son designadas por los símbolos Arsh x, Arch x, Arth x. Hallar las derivadas de estas funciones.

782. $s=te^{-t}$; hallar $\frac{dt}{ds}$.

783. $y=\frac{1-x^4}{1+x^4}$. Expresar $\frac{dx}{dy}$ mediante x, mediante y. Mostrar que es válida la relación $\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dy}=1$.

784. $x=y^3-4y+1$. Hallar $\frac{dy}{dx}$.

785. $t=\operatorname{arcsen} 2^s$. Hallar la expresión para $\frac{ds}{dt}$ mediante s, mediante t.

786. Comprobar la validez de la relación $\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dy}=1$, si x e y se relacionan por medio de la dependencia:

1) $y=x^2+ax+b$; 2) $y=x^{-n}$;

3) $y=\ln(x^2-1)$.

Funciones dadas en forma implícita

787. Aplicando la derivación mostrar que las derivadas de los dos miembros de la igualdad $\operatorname{sen}^2 x=1-\cos^2 x$ son idénticamente iguales entre sí.

788. Aplicando la derivación mostrar que las derivadas de los dos miembros de la igualdad

$$\frac{2\operatorname{sen}^2 x-1}{\cos x}+\frac{\cos x\,(2\operatorname{sen} x+1)}{1+\operatorname{sen} x}=\operatorname{tg} x$$

son idénticamente iguales entre sí.

789. ¿A qué es igual el coeficiente angular de la tangente a la elipse $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}=1$ en el punto $(1, \sqrt{2})$?

790. ¿A qué es igual el coeficiente angular de la tangente a la hipérbola $xy=a$ $(a=0)$ en el punto $(a, 1)$?

791. ¿A qué es igual el coeficiente angular de la tangente a la circunferencia $(x-1)^2+(y+3)^2=17$ en el punto $(2, 1)$?

En los ejercicios 792—812 hallar las derivadas de las funciones y dadas en forma implícita.

792. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. **793.** $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$.

794. $x^3+y^3-3axy=0$. **795.** $y^2\cos x=a^2\operatorname{sen} 3x$.

796. $y^3-3y+2ax=0$. **797.** $y^2-2xy+b^2=0$.

798. $x^4+y^4=x^2y^2$. **799.** $x^3+ax^2y+bxy^2+y^3=0$.

800. $\operatorname{sen}(xy)+\cos(xy)=\operatorname{tg}(x+y)$. **801.** $2^x+2^y=2^{x+y}$.

802. $2y\ln y=x$. **803.** $x-y=\arcsen x-\arcsen y$.

804. $x^y=y^x$. **805.** $y=\cos(x+y)$.

806. $\cos(xy)=x$. **807.** $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

808. $y=1+xe^y$.

809. $x\operatorname{sen} y-\cos y+\cos 2y=0$.

810. $\operatorname{tg}\frac{y}{2}=\sqrt{\frac{1-k}{1+k}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

811. $y\operatorname{sen} x-\cos(x-y)=0$.

812. $y=x+\operatorname{arctg} y$.

813. Mostrar que la función y definida por la ecuación $xy-\ln y=1$, satisface también la relación

$$y^2+(xy-1)\frac{dy}{dx}=0.$$

Aplicaciones de la derivada

814. En la parábola $y = x^2$ se han marcado dos puntos cuyas abscisas son $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Por estos puntos pasa la secante. ¿En qué punto de la parábola la tangente a ésta es paralela a la secante trazada?

815. Una cuerda está trazada de manera que pasa por el foco de la parábola y es perpendicular al eje de ésta. Por los puntos de intersección de la cuerda y la parábola pasan tangentes. Demostrar que éstas se cortan en ángulo recto.

816. Escribir la ecuación de la tangente y de la normal a la hipérbola $y = 1/x$ en el punto cuya abscisa es $x = -1/2$. Hallar la subtangente y la subnormal.

817. Mostrar que el segmento de la tangente a la hipérbola $y = \frac{a}{x}$ comprendido entre los ejes de coordenadas está dividido en dos partes iguales por el punto de contacto.

818. Mostrar que respecto a la hipérbola $xy = a$ el área del triángulo formado por cualquier tangente y los ejes de coordenadas es igual al cuadrado del semieje de la hipérbola.

819. Un punto móvil se desplaza sobre una recta de modo que su distancia s del punto inicial al cabo de t s es igual a $s = \frac{1}{4}t^4 - 4t^3 + 16t^2$.

a) ¿En qué momentos se encontró en el punto inicial el punto referido? b) ¿En qué momentos fué igual a cero su velocidad?

820. Un cuerpo cuya masa es de 3 kg efectúa movimiento rectilíneo de acuedro con la ley

$$s = 1 + t + t^2,$$

s viene expresada en centímetros, t, en segundos. Determinar la energía cinética $\left(\frac{mv^2}{2}\right)$ del cuerpo al cabo de 5 s al iniciar el movimiento.

821. El ángulo α de giro de una polea en función del tiempo t viene expresado por la función $\alpha = t^2 + 3t - 5$. Hallar la velocidad angular para $t = 5$ s.

822. Una rueda gira de modo que el ángulo de giro es proporcional al cuadrado de tiempo. La primera vuelta ha sido realizada en 8 s. Hallar la velocidad angular ω al cabo de 32 s al comenzar el movimiento.

823. El ángulo θ, que se forma al dar una vuelta una rueda, al cabo de t segundos, es igual a $\theta = at^2 - bt + c$, donde a, b, c son constantes positivas. Hallar la velocidad angular ω de la rotación de la rueda. ¿En qué momento es igual a cero la velocidad angular?

824. La cantidad de electricidad que pasa por un conductor a partir del momento de tiempo $t = 0$, se calcula con la fórmula siguiente

$$Q = 2t^2 + 3t + 1 \text{ (culombios).}$$

Hallar la intensidad de corriente al final del quinto segundo.

825. En la línea $y = x^2 (x - 2)^2$ hallar los puntos en los cuales las tangentes sean paralelas al eje de abscisas.

826. Mostrar que la línea $y = x^5 + 5x - 12$ en todos sus puntos está inclinada hacia el eje Ox, formándose entre ellos un ángulo agudo

827. ¿En qué puntos de la línea $y = x^3 + x - 2$ la tangente a ella es paralela a la recta $y = 4x - 1$?

828. Formar las ecuaciones de las tangentes a la línea $y = x - \frac{1}{x}$ en los puntos de su intersección con el eje de abscisas.

829. Formar la ecuación de la tangente a la línea $y = x^3 + 3x^2 - - 5$, perpendicular a la recta $2x - 6y + 1 = 0$.

En los ejercicios 830—833 formar las ecuaciones de la tangente y de la normal a las líneas que se indican.

830. $y = \operatorname{sen} x$ en el punto $M(x_0, y_0)$.

831. $y = \ln x$ en el punto $M(x_0, y_0)$.

832. $y = \frac{8a^3}{4a^2 + x^2}$ en el punto cuya abscisa es $x = 2a$.

833. $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$ (cisoide) en el punto $M(x_0, y_0)$.

834. Mostrar que la subtangente a una parábola de n-ésimo orden $y = x^n$ es igual a $\frac{1}{n}$ parte de la abscisa del punto de contacto.

Indicar el modo de construir la tangente a la línea $y = x^n$.

835. Hallar las subtangentes y las subnormales a la línea $y = x^3$, $y^2 = x^3$, $xy^2 = 1$. Indicar el modo de construir las tangentes a las líneas indicadas.

836. Formar las ecuaciones de la tangente y de la normal a la parábola $x^2 = 4\,ay$ en su punto (x_0, y_0). Mostrar que la tangente en el punto cuya abscisa es $x_0 = 2am$ tiene la siguiente ecuación $x = = \frac{y}{m} + am$.

837. La cuerda de la parábola $y = x^2 - 2x + 5$ une los puntos cuyas abscisas son $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Formar la ecuación de la tangente a la parábola paralela a la cuerda.

838. Formar la ecuación de la normal a la línea $y = \frac{x^2 - 3x + 6}{x^2}$ en el punto cuya abscisa es $x = 3$.

839. Formar la ecuación de la normal a la línea $y = -\sqrt{x} + 2$ en el punto de su intersección con la bisectriz del primer ángulo coordenado.

840. Formar la ecuación de la normal a la parábola $y = x^2 - 6x + 6$ perpendicular a la recta que une el origen de coordenadas con el vértice de la parábola.

841. Mostrar que las normales a la línea $y = x^2 - x + 1$, trazadas en los puntos cuyas abscisas son $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = 5/2$ se cortan en un solo punto.

842. En los puntos de intersección de la recta $x - y + 1 = 0$ y la parábola $y = x^2 - 4x + 5$ están trazadas las normales a la parábola.

Hallar el área del triángulo engendrado por las normales y la cuerda que subtiende los referidos puntos de intersección.

843. Mostrar que las tangentes a la hipérbola $y = \frac{x-4}{x-2}$ en los puntos de su intersección con los ejes de coordenadas son paralelas entre sí.

844. Trazar la tangente a la hipérbola $y = \frac{x+9}{x+5}$ de modo que atraviese el origen de coordenadas.

845. En la línea $y = \frac{1}{1+x^2}$ hallar el punto en el cual la tangente sea paralela al eje de abscisas.

846. Hallar la ecuación de la tangente a la línea

$$x^2(x + y) = a^2(x - y)$$

en el origen de coordenadas.

847. Demostrar que las tangentes a la línea $y = \frac{1+3x^2}{3+x^2}$ trazadas en los puntos en los cuales $y = 1$, se cortan en el origen de coordenadas.

848. Trazar la normal a la línea $y = x \ln x$ que sea paralela a la recta $2x - 2y + 3 = 0$.

849. Hallar la distancia que media entre el origen de coordenadas y la normal a la línea $y = e^{2x} + x^2$, trazada en el punto $x = 0$.

850. Construir la gráfica de la función $y = \operatorname{sen}(2x - \pi/3)$ y hallar el punto de intersección de las tangentes a la gráfica, trazadas en los puntos cuyas abscisas son $x_1 = 0$ y $x_2 = 5\pi/12$.

851. Mostrar que la subtangente a la línea $y = ae^{bx}$ (donde a y b son constantes) tiene longitud constante en todos los puntos.

852. Mostrar que la subnormal a la línea $y = x \ln(cx)$ (donde c es cualquier constante) en cualquier punto de la línea referida es la cuarta proporcional a la abscisa, a la ordenada y a la suma de la abscisa y de la ordenada del punto referido.

853. Mostrar que cualquier tangente a la línea

$$y = \frac{1}{2}\sqrt{x - 4x^2}$$

se corta con el eje de ordenadas en un punto equidistante entre el punto de contacto y el origen de coordenadas.

854. Mostrar que la tangente a la elipse $\frac{x^2}{a_2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ en el punto $M(x_0, y_0)$ tiene la siguiente ecuación $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$.

855. Mostrar que la tangente a la hipérbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ en el punto $M_1(x_0, y_0)$ tiene la siguiente ecuación $\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1$.

856. Demostrar que la normal a la elipse en cualquier punto que le pertenezca divide en dos el ángulo entre los radios focales de este

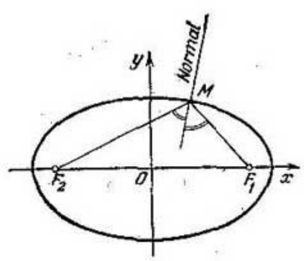

Fig. 21

punto (véase la fig. 21). Deducir el procedimiento para construir la tangente y la normal a la elipse.

857. Formar las ecuaciones de las tangentes a la hipérbola $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{7}=1$ que sean perpendiculares a la recta $2x+4y-3=0$.

858. Una recta pasa por el origen de coordenadas y es paralela a la tangente trazada a una curva en un punto cualquiera M de la misma. Hallar el lugar geométrico P de los puntos de intersección de la recta referida con una recta que sea paralela al eje de ordenadas y que pase por el punto M.

Hallar tales lugares geométricos para a) la parábola $y^2=2px$, b) la logarítmica $y=\log_b x$, c) la circunferencia $x^2+y^2=a^2$, d) la tractriz

$$y=\sqrt{a^2-x^2}-a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}.$$

En los ejercicios 859—864 hallar los ángulos que se forman al cortarse las líneas que se indican.

859. 1) $y=\frac{x+1}{x+2}$ e $y=\frac{x^2+4x+8}{16}$.

2) $y=(x-2)^2$ e $y=4x-x^2+4$.

860. 1) $x^2+y^2=8$ e $y^2=2x$.

2) $x^2+y^2-4x=1$ y $x^2+y^2+2y=9$.

861. $x^2-y^2=5$ y $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{8}=1$.

862. $x^2+y^2=8ax$ e $y^2=\frac{x^3}{2a-x}$.

863. $x^2=4ay$ e $y=\frac{8a^3}{x^2+4a^2}$.

864. $y=\operatorname{sen} x$ e $y=\cos x$ $(0\leqslant x\leqslant \pi)$.

865. Formar la ecuación de la tangente y de la normal a la línea

$$\left(\frac{x}{a}\right)^n+\left(\frac{y}{b}\right)^n=2$$

en el punto cuya abscisa es a.

866. Demostrar que la suma de los segmentos formados en los ejes de coordenadas por la tangente a la curva $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$ es igual a a para todos sus puntos.

867. Mostrar que el segmento de la tangente a la astroide $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ limitado por los ejes de coordenadas tiene longitud constante e igual a a.

868. Demostrar que el segmento de la tangente a la tractriz

$$y=\frac{a}{2}\ln\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{a-\sqrt{a^2-x^2}}-\sqrt{a^2-x^2}$$

limitado por los ejes de ordenadas y el punto de contacto, tiene longitud constante.

869. Mostrar que para cualquier punto $M(x_0, y_0)$ de la hipérbola equilátera $x^2-y^2=a^2$ el segmento de la normal desde el punto M hasta el punto de intersección con el eje de abscisas es igual al radio polar del punto M.

870. Mostrar que el segmento cortado en el eje de abscisas por la tangente en un punto cualquiera de la curva $\frac{a}{x^2}+\frac{b}{y^2}=1$, es proporcional al cubo de la abscisa del punto de contacto.

871. Demostrar que la ordenada de cualquier punto de la línea $2x^2y^2-x^4=c$ (donde c es una constante) es una media proporcional entre la abscisa y la diferencia entre la abscisa y la subnormal trazada a la línea en el mismo punto.

872. Dadas las elipses $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ cuyo eje $2a$ es común, mientras que los ejes $2b$ son diferentes (véase la fig. 22), demostrar que las

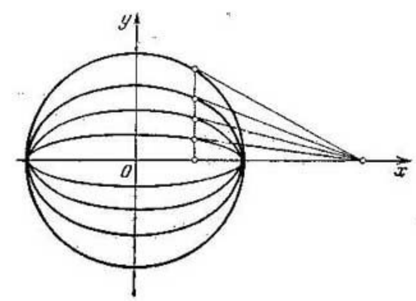

Fig. 22

tangentes trazadas en los puntos cuyas abscisas son las mismas, se cortan en un mismo punto que pertenece al eje de abscisas. Valiéndose de ello, señalar un procedimiento sencillo para construir la tangente a la elipse.

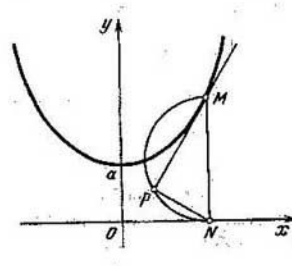

Fig. 23

873. Mostrar que la línea $y=e^{hx}$ sen mx toca cada una de las líneas $y=e^{hx}$, $y=-e^{hx}$ en todos los puntos que son comunes para ellas.

874. Para construir la tangente a la catenaria $y=a\,\mathrm{ch}\frac{x}{2}$ se procede de la manera siguiente: en la ordenada MN del punto M, que sirve de diámetro, se traza una semicircunferencia (véase la fig. 23) y se marca la cuerda $NP=a$; la recta MP será la tangente buscada. Demostrarlo.

Derivación gráfica

875. Al pasar la corriente eléctrica por el devanado del electroimán de un motor ha sido medida la temperatura, lo cual ha dado los siguientes resultados:

Tiempo t (en min)	0	5	10	15	20	25
Temperatura θ °C	20	26	32,5	41	46	49
Tiempo t (en min)	30	35	40	45	50	55
Temperaturt θ °C	52,5	54,5	56,5	58	59,5	61

Construir una gráfica aproximada de la dependencia continua de la temperatura en función del tiempo. Después de haber efectuado la derivación gráfica, construir la gráfica que muestre a qué velocidad varía la temperatura en función del tiempo.

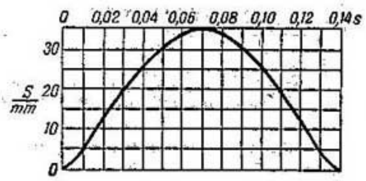

Fig. 24

876. La fig. 24 presenta la curva de la subida que efectúa la válvula de admisión del cilindro de una máquina de vapor (de baja presión). Construir la curva de velocidad aplicando la derivación gráfica.

§ 3. Diferencial. Diferenciabilidad de la función

Diferencial

877. Hallar el incremento de la función $y = x^2$ correspondiente al incremento Δx de la variable independiente. Calcular Δy, si $x = 1$ y $\Delta x = 0{,}1$; $0{,}01$; ¿Cuál será el error (absoluto y relativo) del valor de Δy, si se limita al término que contiene sólo el primer grado de Δx?

878. Hallar el incremento Δv del volumen v de una esfera al aumentar el radio $R = 2$ en ΔR. Calcular Δv, si $\Delta R = 0{,}5$; $0{,}1$; $0{,}01$. ¿Cuál será el error en el valor de Δv, si se limita al término que contiene sólo el primer grado de ΔR?

879. Dada la función $y = x^3 + 2x$, hallar el valor del incremento y de su parte lineal principal que corresponden a la variación de x desde $x = 2$ hasta $x = 2{,}1$.

880. ¿Qué incremento recibe la función $y = 3x^2 - x$ al pasar el valor de la variable independiente de $x = 1$ a $x = 1{,}02$? ¿Cuál es el valor de la parte lineal principal correspondiente? Hallar la razón entre los valores, segundo y primero.

881. Dados la función $y = f(x)$ y el incremento $\Delta x = 0{,}2$ en un punto x, hallar la derivada en el punto x, tomando en consideración que la parte principal correspondiente del incremento de la función resultó igual a $0{,}8$.

882. Sea dada la función $f(x) = x^2$. Es sabido que en un punto al incremento de la variable independiente $\Delta x = 0{,}2$ le corresponde la parte principal del incremento de la función $df(x) = -0{,}8$. Hallar el valor inicial de la variable independiente.

883. Hallar el incremento y la diferencial de la función $y = x^2 - x$ para $x = 10$ y $\Delta x = 0{,}1$. Calcular los errores absoluto y relativo que se obtienen al sustituir el incremento por la diferencial. Trazar la gráfica.

884. Hallar el incremento y la diferencial de la función $y = \sqrt{x}$ para $x = 4$ y $\Delta x = 0{,}41$. Calcular los errores absoluto y relativo. Trazar la gráfica.

885. $y = x^3 - x$. Para $x = 2$ calcular Δy y dy, dando a Δx los valores $\Delta x = 1$; $\Delta x = 0{,}1$; $\Delta x = 0{,}01$. Hallar los valores correspondientes del error relativo

$$\delta = \frac{|\Delta y - dy|}{|\Delta y|}.$$

886. Para la función $y = 2^x$, cuando $x = 2$ y $\Delta x = 0{,}4$, hallar gráficamente (trazando la gráfica en papel milimetrado a gran escala) el incremento y la diferencial y calcular los errores absoluto y relativo al sustituir el incremento por la diferencial.

887. El lado de un cuadrado mide 8 cm. ¿En cuánto aumentará su área si cada lado se prolonga en: a) 1 cm; b) 0,5 cm; c) 0,1 cm? Hallar la parte lineal principal del incremento del área del cuadrado y valorar el error relativo (en tanto por ciento) al sustituir el incremento por su parte principal.

888. Es sabido que al aumentar cada lado de un cuadrado en 0,3 cm la parte lineal principal del incremento del área constituye 2,4 cm². Hallar la parte lineal principal del incremento del área que corresponde al incremento de cada lado en: a) 0,6 cm; b) 0,75 cm; c) 1,2 cm.

889. Hallar la diferencial de la función:

1) $0{,}25\sqrt{x}$; 2) $\frac{\sqrt[3]{x}}{0{,}2}$; 3) $\frac{1}{0{,}5x^2}$; 4) $\frac{1}{4x^4}$; 5) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$;

6) $\frac{1}{n\sqrt[3]{x}}$; 7) $\frac{\sqrt{x}}{a+b}$; 8) $\frac{p}{q^x}$; 9) $\frac{m-n}{x^{0,2}}$; 10) $\frac{m+n}{\sqrt{x}}$

11) $(x^2+4x+1)(x^2-\sqrt{x})$; 12) $\frac{x^3+1}{x^3-1}$; 13) $\frac{1}{1-t^2}$;

14) $(1+x-x^2)^3$; 15) $\operatorname{tg}^2 x$; 16) $5^{\ln \operatorname{tg} x}$; 17) $2^{-\frac{1}{\cos x}}$;

18) $\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{4}\right)$; 19) $\frac{\cos x}{1-x^2}$; 20) $\sqrt{\operatorname{arcsen} x}+(\operatorname{arctg} x)^2$;

21) $3 \operatorname{arcsen} x-4 \operatorname{arctg} x+\frac{1}{2} \arccos x-\frac{7}{2} \operatorname{arctg} x$;

22) $3^{-\frac{1}{x^2}}+3x^3-4\sqrt{x}$.

890. Calcular el valor de la diferencial de la función: 1) $y=\frac{1}{(\operatorname{tg} x+1)^2}$ al variar la variable independiente desde $x=\frac{\pi}{6}$ hasta $x=\frac{61\pi}{360}$; 2) $y=\cos^2\varphi$ al variar φ desde 60° hasta 60°30′; 3) $y=\operatorname{sen} 2\varphi$ al variar φ desde $\frac{\pi}{6}$ hasta $\frac{61\pi}{360}$; 4) $y=\operatorname{sen} 3\varphi$ al variar φ desde $\frac{\pi}{6}$ hasta $\frac{61\pi}{360}$; 5) $y=\operatorname{sen}\frac{\theta}{3}$ al variar θ desde $\frac{\pi}{6}$ hasta $\frac{61\pi}{360}$.

891. Hallar el valor aproximado del incremento de la función $y = \operatorname{sen} x$ al variar x desde 30° hasta 30°1′. ¿A qué es igual sen 30°1′?

892. Hallar el valor aproximado del incremento de la función $y = \operatorname{tg} x$ al variar x desde 45° hasta 45°10′.

893. Hallar el valor aproximado del incremento de la función $y=\frac{1+\cos x}{1-\cos x}$ al variar x desde $\frac{\pi}{3}$ hasta $\frac{\pi}{3}+\frac{1}{100}$.

894. $\rho=k\sqrt{\cos 2\varphi}$, hallar $d\rho$.

895. $y=3^{\frac{1}{x}}+2^{\frac{1}{2x}}+6^{\sqrt{x}}$. Calcular dy para $x=1$ y $dx=0,2$.

896. Calcular aproximadamente sen 60°3′, sen 60°18′. Comparar los resultados obtenidos con los datos tabulares.

897. Comprobar que la función $y=\frac{1+\ln x}{x-x\ln x}$ satisface la relación $2x^2\,dy=(x^2y^2+1)\,dx$.

898. Comprobar que la función y definida por la ecuación $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=$ $=\ln\sqrt{x^2+y^2}$, satisface la relación $x\,(dy-dx)=y\,(dy+dx)$.

899. $f(x)=e^{0,1x(1-x)}$. Calcular aproximadamente $f(1,05)$.

900. Calcular arctg 1,02; arctg 0,97.

901. Calcular aproximadamente $\sqrt{\frac{(2,037)^2-3}{(2,037)^2+5}}$.

902. Calcular aproximadamente arcsen 0,4983.

903. Si la longitud de un hilo pesado (cable, cadena) (véase la fig. 25) es igual a $2s$, el medio tramo es l, y la flecha es igual a f, se tiene la igualdad aproximada

$$s = l\left(1 + \frac{2}{3}\frac{f^2}{l^2}\right).$$

a) Calcular qué cambio sufre la longitud del hilo al variar su flecha en la magnitud df.

b) Tomando en consideración la variación ds que sufre la longitud del hilo (por ejemplo, al alterarse la temperatura o la carga), decir qué cambio se opera en la flecha debido a ello.

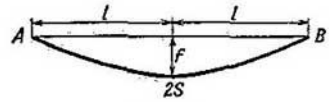

Fig. 25

904. Cuando se calcula un ángulo por su tangente y por su seno con ayuda de tablas logarítmicas, se cometen errores. Hacer un paralelo entre éstos, es decir, comparar la exactitud de los resultados obtenidos para el ángulo x con las fórmulas $\lg \operatorname{sen} x = y$ y $\lg \operatorname{tg} x = z$ si y y z son dadas con errores iguales.

905. Al efectuar cálculos técnicos se recurre, muy a menudo, a la reducción de π y $\sqrt{g}$ (g es la aceleración de la gravedad) en el caso en que uno de estos números está en el numerador y el otro, en el denominador. ¿Cuál es el error relativo que se comete?

906. Expresar la diferencial de la función compuesta por medio de la variable independiente y su diferencial:

1) $y = \sqrt[3]{x^2+5x}$; $x = t^3+2t+1$; 2) $s = \cos^2 z$, $z = \frac{t^2-1}{4}$;

3) $z = \operatorname{arctg} v$, $v = \frac{1}{\operatorname{tg} s}$; 4) $v = 3^{-\frac{1}{x}}$, $x = \ln \operatorname{tg} s$;

5) $s = e^z$, $z = \frac{1}{2}\ln t$, $t = 2u^2 - 3u + 1$;

6) $y = \ln \operatorname{tg} \frac{u}{2}$, $u = \arcsin v$, $v = \cos 2s$.

Diferenciabilidad de las funciones

907. La función $y = |x|$ es continua para cualquier x. Comprobar que no es derivable cuando $x = 0$.

908. Efectuando un análisis, decir si la función $y = |x^3|$ para $x = 0$ es continua y derivable.

909. La función $f(x)$ está definida de la manera siguiente: $f(x) = 1 + x$ para $x \leqslant 0$; $f(x) = x$ para $0 < x < 1$; $f(x) = 2 - x$

para $1 \leqslant x \leqslant 2$ y $f(x) = 3x - x^2$ para $x > 2$. Averiguar si la función $f(x)$ es continua y aclarar la existencia y la continuidad de $f'(x)$.

910. La función $y = |\operatorname{sen} x|$ es continua para cualquier x. Mostrar que no es derivable cuando $x = 0$. ¿Existen otros valores de la variable independiente para los cuales la función no sea derivable?

911. Averiguar si la función $y = e^{-|x|}$ es continua y derivable para $x = 0$.

912. $f(x) = x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ para $x \neq 0$, $f(0) = 0$. ¿Es derivable la función $f(x)$ cuando $x = 0$?

913. $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x}}$ para $x \neq 0$, $f(0) = 0$. ¿Es derivable y continua la función $f(x)$ cuando $x = 0$?

914. Dada la función $f(x) = 1 + \sqrt[3]{(x-1)^2}$, mostrar que la parte lineal principal del incremento de la función no es susceptible de ser despejada cuando $x = 1$ y, por lo tanto, la función $f(x)$ no tiene derivada para $x = 1$. Dar la intepretación geométrica del resultado.

915. $f(x) = x \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ para $x \neq 0$, $f(0) = 0$. ¿Es continua la función $f(x)$ cuando $x = 0$? ¿Es variable? Dar la interpretación geométrica del resultado.

916. $f(x) = \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ para $x \neq 0$ y $f(0) = 0$. ¿Es continua la función $f(x)$ cuando $x = 0$? ¿Es derivable?

§ 4. La derivada como velocidad de variación (otros ejemplos)

Velocidad relativa

917. Un punto se mueve sobre la espiral de Arquímedes $\rho = a\varphi$. Hallar la velocidad de la variación del radio polar ρ respecto al ángulo polar φ.

918. Un punto se mueve sobre la espiral logarítmica $\rho = e^{a\varphi}$. Hallar la velocidad de la variación del radio polar si se sabe que gira con velocidad angular ω.

919. Un punto se mueve sobre la cicunferencia $\rho = 2r \cos\varphi$. Hallar la velocidad de la variación de la abscisa y la ordenada del punto si el radio polar gira con velocidad angular ω. En este caso el eje polar desempeña la función del de las abscisas, y el polo ha de ser considerado como el origen del sistema de coordenadas cartesianas.

920. Un círculo de radio R rueda, sin deslizarse, sobre una recta. El centro del círculo se mueve con velocidad constante v. Hallar la velocidad de la variación de la abscisa x y la ordenada y para un punto que pertenece al límite del círculo.

921. La presión barométrica p sufre alteraciones al variar la altura h de acuerdo con la función $\ln \frac{p}{p_0} = ch$, donde p_0 es la presión normal y c es una constante. A la altura de 5540 m la presión alcanza la mitad de la normal. Hallar la velocidad de la variación de la presión barométrica en función de la altura.

922. Entre y y x existe la relación $y^2 = 12x$. El argumento x crece uniformemente a una velocidad de 2 unidades por segundo. ¿A qué velocidad aumenta y cuando $x = 3$?

923. La ordenada del punto que describe la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ decrece con una velocidad de 1,5 cm/s. ¿A qué velocidad varía la abscisa del punto cuando la ordenada llega a ser igual a 4 cm?

924. ¿En qué punto de la elipse $16x^2 + 9y^2 = 400$ la ordenada decrece con la misma velocidad con que crece la abscisa?

925. El lado de un cuadrado aumenta con velocidad v. ¿Cuál es la velocidad de la variación del perímetro y del área del mismo en el momento en que su lado llega a ser igual a a?

926. El radio de un círculo cambia con velocidad v. ¿Cuál es la velocidad de la variación de la longitud de su circunferencia y del área en el momento en que su radio llega a ser igual a r?

927. El radio de una esfera cambia con velocidad v. ¿Con qué velocidad varía su volumen y su superficie?

928. ¿Para qué valor del ángulo su seno varía dos veces más lento que el argumento?

929. ¿Para qué valor del ángulo son iguales las velocidades de la variación de su seno y de su tangente?

930. La velocidad del crecimiento del seno aumentó en n veces. ¿Cuántas veces aumentó la velocidad del crecimiento de la tangente?

931. Supongamos que el volumen del tronco de un árbol es proporcional al cubo de su diámetro y que éste crece de año en año uniformemente. Mostrar que la velocidad del crecimiento del volumen, siendo el diámetro igual a 90 cm, es 25 veces mayor que la del crecimiento para el caso del diámetro igual a 18 cm.

Funciones dadas en forma paramétrica

932. Probar si un punto dado por las coordenadas cartesianas está en la línea cuya ecuación se da en forma paramétrica: a) ¿Está el punto (5; 1) sobre la circunferencia $x = 2 + 5 \cos t$, $y = -3 + 5 \operatorname{sen} t$? b) ¿Está el punto $(2, \sqrt{3})$ sobre la circunferencia $x = 2 \cos t$, $y = 2 \operatorname{sen} t$?

933. Construir las gráficas de las funciones dadas en forma paramétrica:

a) $x = 3\cos t$, $y = 4 \operatorname{sen} t$; b) $x = t^2 - 2t$, $y = t^2 + 2t$;

c) $x = \cos t$, $y = t + 2\operatorname{sen} t$; d) $x = 2^{t-1}$, $y = \frac{1}{4}(t^3 + 1)$.

934. De las ecuaciones que dan la función en forma paramétrica eliminar el parámetro:

1) $x = 3t$, $y = 6t - t^2$; 2) $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} 2t$;
3) $x = t^3 + 1$, $y = t^2$; 4) $x = \varphi - \operatorname{sen}\varphi$, $y = 1 - \cos\varphi$;
5) $x = \operatorname{tg} t$, $y = \operatorname{sen} 2t + 2\cos 2t$.

935. Hallar el valor del parámetro que corresponde a las coordenadas dadas del punto sobre la línea cuya ecuación se da en forma paramétrica:

1) $x = 3(2\cos t - \cos 2t)$, $y = 3(2\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 2t)$; $(-9, 0)$;
2) $x = t^2 + 2t$, $y = t^3 + t$; $(3, 2)$;
3) $x = 2\operatorname{tg} t$, $y = 2\operatorname{sen}^2 t + \operatorname{sen} 2t$; $(2, 2)$;
4) $x = t^2 - 1$, $y = t^3 - t$; $(0, 0)$.

En los ejercicios 936—945 hallar las derivadas de y respecto a x.

936. $x = a\cos\varphi$, $y = b\operatorname{sen}\varphi$.

937. $x = a\cos^3\varphi$, $y = b\operatorname{sen}^3\varphi$.

938. $x = a(\varphi - \operatorname{sen}\varphi)$, $y = a(1 - \cos\varphi)$.

939. $x = 1 - t^2$, $y = t - t^3$.

940. $x = \frac{t+1}{t}$, $y = \frac{t-1}{t}$.

941. $x = \ln(1 + t^2)$, $y = t - \operatorname{arctg} t$.

942. $x = \varphi(1 - \operatorname{sen}\varphi)$, $y = \varphi\cos\varphi$.

943. $x = \frac{1+t^3}{t^2-1}$, $y = \frac{1}{t^2-1}$.

944. $x = e^t \operatorname{sen} t$, $y = e^t \cos t$.

945. $x = \frac{3at}{1+t^3}$, $y = \frac{3at^2}{1+t^3}$.

En los ejercicios 946—949 hallar los coeficientes angulares de las tangentes a las líneas que se indican.

946. $x = 3\cos t$, $y = 4\operatorname{sen} t$ en el punto $(3\sqrt{2}/2,\ 2\sqrt{2})$.

947. $x = t - t^4$, $y = t^2 - t^3$ en el punto $(0,0)$.

948. $x = t^3 + 1$, $y = t^2 + t + 1$ en el punto $(1,1)$.

949. $x = 2\cos t$, $y = \operatorname{sen} t$ en el punto $(1,\ -\sqrt{3}/2)$.

950. Para la línea dada paramétricamente mostrar la relación entre el parámetro t y el ánuglo α que forma la tangente a la línea con el eje de abscisas.

1) $\begin{cases} x=\cos t+t\,\mathrm{sen}\,t-\dfrac{t^2}{2}\cos t, \\ y=\mathrm{sen}\,t-t\cos t-\dfrac{t^2}{2}\,\mathrm{sen}\,t; \end{cases}$

2) $x = a\cos^3 t,\ y = a\,\mathrm{sen}^3 t;$

3) $x=a\cos t\sqrt{2\cos 2t},\ y=a\,\mathrm{sen}\,t\sqrt{2\cos 2t}.$

951. Comprobar que la función dada en forma paramétrica mediante las ecuaciones $x = 2t + 3t^2$, $y = t^2 + 2t^3$ satisface la relación $y = y'^2 + 2y'^3$ (la prima denota la derivación con respecto a x, esto es, $y' = \frac{dy}{dx}$).

952. Comprobar que la función dada en forma paramétrica mediante las ecuaciones $x=\frac{1+t}{t^3}$, $y=\frac{3}{2t^2}+\frac{2}{t}$ satisface la relación $xy'^3=1+y'$ $\left(y'=\frac{dy}{dx}\right)$.

953. Comprobar que la función dada en forma paramétrica mediante las ecuaciones $x = \mathrm{ch}\,2t$, $y = \mathrm{sh}\,2t$ satisface la relación $yy' - x = 0$ $\left(y' = \frac{dy}{dx}\right)$.

954. Comprobar que la función dada en forma paramétrica mediante las ecuaciones

$$x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}-\ln\frac{1+\sqrt{1+t^2}}{t},\quad y=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}},$$

satisface la relación $y\sqrt{1+y'^2}=y'$ $\left(y'=\frac{dy}{dx}\right)$.

955. Comprobar que la función dada en forma paramétrica mediante las ecuaciones $x=\frac{1+\ln t}{t^2}$, $y=\frac{3+2\ln t}{t}$ satisface la relación $yy'=2xy'^2+1$ $\left(y'=\frac{dy}{dx}\right)$.

956. Hallar los ángulos que se forman al cortarse las líneas:

1) $y=x^2$ y $\begin{cases} x=\frac{5}{3}\cos t, \\ y=\frac{5}{4}\,\mathrm{sen}\,t; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x=a\cos\varphi \\ y=a\,\mathrm{sen}\,\varphi \end{cases}$ y $\begin{cases} x=\dfrac{at^2}{1+t^2}, \\ y=\dfrac{at\sqrt{3}}{1+t^2} \end{cases}$

957. Mostrar que cualquiera que sea la posición del círculo generador de una cicloide, la tangente y la normal en el punto correspondiente de la cicloide pasan por su punto superior e inferior, respectivamente.

958. Hallar las longitudes de la tangente, la normal, la subtangente y la subnormal a la cardioide

$$x = a(2\cos t - \cos 2t),\quad y = a(2\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 2t)$$

en un punto cualquiera de ésta.

959. Hallar las longitudes de la tangente, la normal, la subtangente, la subnormal a la astroide

$$x = a\operatorname{sen}^3 t,\qquad y = a\cos^3 t$$

en un punto cualquiera de ésta.

960. Demostrar que la tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ es, al mismo tiempo, la normal a la evolvente de la circunferencia

$$x = a(\cos t + t\operatorname{sen} t),\qquad y = a(\operatorname{sen} t - t\cos t).$$

961. Hallar las longitudes de la tangente, la normal, la subtangente y la subnormal a la evolvente de la circunferencia (véanse las ecuaciones de ésta en el ejercicio anterior).

962. Demostrar que el segmento de la normal a la curva

$$x = 2a\operatorname{sen} t + a\operatorname{sen} t\cos^2 t,\qquad y = -a\cos^3 t,$$

limitado por los ejes de coordenadas, es igual a $2a$.

En los ejercicios 963—966 formar las ecuaciones de la tangente y la normal a las líneas que se indican en los puntos citados.

963. $x = 2e^t;\qquad y = e^{-t}\qquad$ para $t = 0$.

964. $x = \operatorname{sen} t,\qquad y = \cos 2t\qquad$ para $t = \pi/6$

965. $x = 2\ln\operatorname{ctg} t + 1,\quad y = \operatorname{tg} t + \operatorname{cgt} t\quad$ para $t = \pi/4$.

966. 1) $x = \dfrac{3at}{1+t^2},\quad y = \dfrac{3at^2}{1+t^2}\quad$ para $t = 2$;

2) $\begin{cases} x = t(t\cos t - 2\operatorname{sen} t), \\ y = t(t\operatorname{sen} t + 2\cos t), \end{cases}$ para $t = \dfrac{\pi}{4}$;

3) $x = \operatorname{sen} t,\ y = a^t\qquad$ para $t = 0$.

967. Mostrar que en dos puntos de la cardioide (véase el ejercicio 958), los cuales corresponden a los valores del parámetro t que se diferencian en $\frac{2}{3}\pi$, las tangentes son paralelas.

968. Demostrar que si las líneas OT y ON son las perpendiculares bajadas desde el origen de coordenadas hasta la tangente y la normal a la astroide en cualquiera de sus puntos (véase el ejercicio 959), se tiene

$$4\cdot OT^2 + ON^2 = a^2.$$

969. Hallar la longitud de la perpendicular bajada desde el origen de coordenadas hasta la tangente a la línea

$$2x = a\,(3\cos t + \cos 3t),\ 2y = a\,(3\,\mathrm{sen}\, t + \mathrm{sen}\, 3t).$$

Mostrar que $4\rho^2 = 3p^2 + 4a^2$, donde ρ es el radio polar del punto dado y p es la longitud de dicha perpendicular.

Velocidad de la variación del radio polar

970. Dada la circunferencia $\rho = 2\,r\,\mathrm{sen}\,\varphi$, hallar el angulo θ formado por el radio polar y la tangente, y el ángulo α que forman entre sí el eje polar y la tangente.

971. Demostrar que para la parábola $\rho = a\sec^2\frac{\varphi}{2}$ la suma de los ángulos formados por la tangente con el radio polar y el eje polar, es igual a dos ángulos rectos. Valiéndose de esta propiedad construir la tangente a la parábola.

972. Dada la línea $\rho = a\,\mathrm{sen}^3\frac{\varphi}{3}$ (concoide), mostrar que $\alpha = 4\theta$ (las designaciones son las que se dan en el ejercicio 970).

973. Mostrar que dos parábolas $\rho = a\sec^2\frac{\varphi}{2}$ y $\rho = b\,\mathrm{cosec}^2\frac{\varphi}{2}$ se cortan formando un ángulo recto.

974. Hallar el valor de la tangente del ángulo formado entre el eje polar y la tangente a la línea $\rho = a\sec^2\varphi$ en los puntos en que $\rho = 2a$.

975. Hallar la tangente del ángulo formado entre el eje polar y la línea tangente en el origen de coordenadas: 1) a la línea $\rho = \mathrm{sen}^3\varphi$ 2) a la línea $\rho = \mathrm{sen}\,3\varphi$.

976. Mostrar que dos cardioides $\rho = a\,(1 + \cos\varphi)$ y $\rho = a\,(1 - \cos\varphi)$ se cortan formando un ángulo recto.

977. La ecuación de la línea en las coordenadas polares es dada en forma paramétrica: $\rho = f_1(t)$, $\varphi = f_2(t)$. Expresar la tangente del ángulo θ formado entre la línea tangente y el radio polar, como función de t.

978. Una línea viene dada mediante las ecuaciones $\rho = at^3$, $\varphi = bt^2$. Hallar el ángulo entre el radio polar y la tangente.

979. Dada la elipse $x = a\cos t$, $y = b\,\mathrm{sen}\,t$, expresar el radio polar ρ y el ángulo polar φ como función del parámetro t. Valiéndose de la forma así obtenida para dar la elipse, calcular el ángulo formado entre la tangente y el radio polar.

Se llama *subtangente polar* a la proyección del segmento de la tangente desde el punto de contacto hasta su intersección con la perpendicular levantada al radio polar en el polo, sobre dicha perpendicular. De análoga manera se define la *subnormal polar*. Tomando esto en consideración, resolver los problemas de los ejercicios 980—984.

980. Deducir la fórmula para la subtangente polar y la subnormal polar de la línea $\rho = f(\varphi)$.

981. Mostrar que la longitud de la subtangente polar de la espiral hiperbólica $\rho = \frac{a}{\varphi}$ es constante.

982. Mostrar que la longitud de la subnormal polar de la espiral de Arquímedes $\rho = a\varphi$ es constante.

983. Hallar la longitud de la subnormal polar de la espiral logarítmica $\rho = a^{\varphi}$.

984. Hallar la longitud de la subnormal polar de la espiral logarítmica $\rho = a^{\varphi}$.

Velocidad de la variación de la longitud

En los ejercicios 985—999 s designa la longitud del arco de la línea correspondiente.

985. La recta $y = ax + b$; $\frac{ds}{dx} = ?$

986. La circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$; $\frac{ds}{dx} = ?$

987. La elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; $\frac{ds}{dy} = ?$

988. La parábola $y^2 = 2px$; $ds = ?$

989. La parábola semicúbica $y^2 = ax^3$; $\frac{ds}{dy} = ?$

990. La sinusoide $y = \operatorname{sen} x$; $ds = ?$

991. La catenaria $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ $(y = \operatorname{ch} x)$; $\frac{ds}{dx} = ?$

992. La circunferencia $x = r\cos t$, $y = r \operatorname{sen} t$; $\frac{ds}{dt} = ?$

993. La cicloide $x = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a(1 - \cos t)$; $\frac{ds}{dt} = ?$

994. La astroide $x = a\cos^3 t$, $y = a \operatorname{sen}^3 t$; $ds = ?$

995. La espiral de Arquímedes $x = at \operatorname{sen} t$, $y = at\cos t$; $ds = ?$

996. La cardioide $\begin{cases} x = a(2\cos t - \cos 2t), \\ y = a(2\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 2t); \end{cases}$ $ds = ?$

997. La tractriz

$$x = a\left(\cos t + \ln \operatorname{tg}\frac{t}{2}\right), \quad y = a \operatorname{sen} t; \quad ds = ?$$

998. La evolvente de la circunferencia

$$x = a(\cos t + t \operatorname{sen} t), \; y = a(\operatorname{sen} t - t\cos t); \; \frac{ds}{dt} = ?$$

999. La hipérbola $x = a \operatorname{ch} t$, $y = a \operatorname{sh} t$; $ds = ?$

Velocidad del movimiento

1000. Una escala, que mide 10 m de longitud, tiene apoyado su extremo superior contra una pared vertical. Su extremo inferior se halla apoyado en el suelo y se desliza apartándose de la pared a 2 m por minuto. ¿A qué velocidad va descendiendo el extremo superior de la escala cuando el inferior dista 6 m de la pared? ¿Cuál es la dirección del vector de la velocidad?

1001. Un tren y un globo aerostático parten de un mismo punto simultáneamente. El tren se traslada a una velocidad uniforme de 50 km por hora. El globo sube (también uniformemente) a 10 km por hora. ¿A qué velocidad se aparta el uno del otro? ¿Cuál es la dirección del vector de la velocidad?

1002. Un hombre de 1,7 m de estatura se aleja, a 6,34 km por hora, de una fuente luminosa que se encuentra a 3 m de altura. ¿A qué velocidad se traslada la sombra que proyecta su cabeza?

1003. Un caballo corre a 20 km por hora a lo largo de una circunferencia en cuyo centro se halla un farol. En el punto inicial de la carrera del caballo está situada una cerca que sigue la dirección de la tangente a la circunferencia referida. ¿A qué velocidad se desplaza la sombra del caballo a lo largo de la cerca en el momento en que éste ha recorrido 1/8 de la circunferencia?

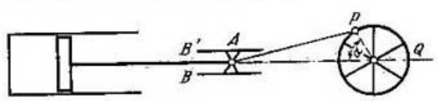

Fig. 26

1004. La fig. 26 muestra, de manera esquemática, el mecanismo de manivela de una máquina de vapor: A es la cruceta, BB' son las correderas de la cruceta, AP es la biela, P es el gorrón de manivela,

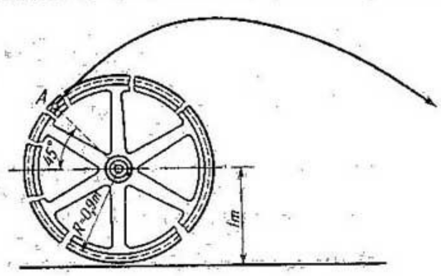

Fig. 27

Q es el volante. El volante, de radio R, gira uniformemente con velocidad angular ω. La longitud de la biela es igual a l. ¿Cuál es la velocidad que tiene la cruceta al desplazarse, en el momento en que el volante ha girado un ángulo α?

1005. Un volante que había dado 80 vueltas por minuto quedó roto. El radio del mismo mide 0,9 m. Su centro se halla levantado por sobre el suelo, la distancia entre ambos, en línea vertical, mide 1 m. ¿Cuál es la velocidad a que efectuará su caída hacia el suelo el pedazo roto (designado por la letra A en la fig. 27)?

§ 5. Derivación sucesiva

Funciones dadas en forma explícita

1006. $y = x^2 - 3x + 2$; $y'' = ?$
1007. $y = 1 - x^2 - x^4$; $y''' = ?$
1008. $f(x) = (x + 10)^6$; $f'''(2) = ?$
1009. $f(x) = x^6 - 4x^3 + 4$; $f^{IV}(1) = ?$
1010. $y = (x^2 + 1)^3$; $y'' = ?$ **1011.** $y = \cos^2 x$; $y''' = ?$
1012. $f(x) = e^{2x-1}$; $f''(0) = ?$ **1013.** $f(x) = \operatorname{arctg} x$; $f''(1) = ?$

1014. $f(x) = \frac{1}{1-x}$; $f^{V}(x) = ?$

1015. $y = x^3 \ln x$; $y^{IV} = ?$ **1016.** $f(x) = \frac{a}{x^n}$; $y''(x) = ?$

1017. $\rho = a \operatorname{sen} 2\varphi$; $\frac{d^4\rho}{d\varphi^4} = ?$ **1018.** $y = \frac{1-x}{1+x}$; $y^{(n)} = ?$

En los ejercicios 1019—1028 hallar las segundas derivadas de las funciones

1019. $y = xe^{x^2}$. **1020.** $y = \frac{1}{1+x^3}$.

1021. $y = (1 + x^2) \operatorname{arctg} x$. **1022.** $y = \sqrt{a^2 - x^2}$.

1023. $y = \ln (x + \sqrt{1 + x^2})$. **1024.** $y = \frac{1}{a + \sqrt{x}}$.

1025. $y = e^{\sqrt{x}}$. **1026.** $y = \sqrt{1 - x^2} \arcsen x$.

1027. $y = \arcsen (a \operatorname{sen} x)$. **1028.** $y = x^x$.

En los ejercicios 1029—1040 hallar las expresiones comunes para las derivadas de n-ésimo orden de las funciones:

1029. $y = e^{ax}$. **1030.** $y = e^{-x}$.

1031. $y = \operatorname{sen} ax + \cos bx$ **1032.** $y = \operatorname{sen}^2 x$.

1033. $y = xe^x$. **1034.** $y = x \ln x$.

1035. $y=\frac{1}{ax+b}$. **1036.** $y=\ln(ax+b)$.

1037. $y=\log_a x$. **1038.** $y=\frac{x}{x^2-1}$.

1039. $y=\frac{1}{x^2-3x+2}$. **1040.** $y=\operatorname{sen}^4 x+\cos^4 x$.

1041. Demostrar que la función $y=(x^2-1)^n$ satisface la relación

$$(x^2-1)y^{(n+2)}+2xy^{(n+1)}-n(n+1)y^{(n)}=0.$$

1042. Demostrar que la función $y=e^x \operatorname{sen} x$ satisface la relación $y''-2y'+2y=0$, mientras la función $y=e^{-x}\operatorname{sen} x$ satisface la relación $y''+2y'+2y=0$.

1043. Demostrar que la función $y=\frac{x-3}{x+4}$ satisface la relación $2y'^2=(y-1)\ y''$.

1044. Demostrar que la función $y=\sqrt{2x-x^2}$ satisface la relación $y^3y''+1=0$.

1045. Demostrar que la función $y=e^{4x}+2e^{-x}$ satisface la relación $y'''-13y'-12y=0$.

1046. Demostrar que la función $y=e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}$ satisface la relación $xy''+\frac{1}{2}y'-\frac{1}{4}y=0$.

1047. Demostrar que la función $y=\cos e^x+\operatorname{sen} e^x$ satisface la relación $y''-y'+ye^{2x}=0$.

1048. Demostrar que la función

$$y=A\ \operatorname{sen}(\omega t+\omega_0)+B\cos(\omega t+\omega_0)$$

(A, B, ω, ω_0 son constantes) satisface la relación

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\omega^2y=0.$$

1049. Demostrar que la función

$$a_1e^{nx}+a_2e^{-nx}+a_3\cos nx+a_4\operatorname{sen} nx$$

(a_1, a_2, a_3, a_4, n son constantes) satisface la relación $\frac{d^4y}{dx^4}=n^4y$.

1050. Demostrar que la función $y=\operatorname{sen}(n \operatorname{arcsen} x)$ satisface la relación $(1-x^2)\ y''-xy'+n^2y=0$.

1051. Demostrar que la función $e^{\alpha \operatorname{arcsen} x}$ satisface la relación $(1-x^2)\ y''-xy'-\alpha^2y=0$.

1052. Demostrar que la función $y=(x+\sqrt{x^2+1})^k$ satisface la relación $(1+x^2)y''+xy'-k^2y=0$.

1053. Demostrar que la expresión $S=\frac{y'''}{y'}-\frac{3}{2}\left(\frac{y''}{y'}\right)^2$ no varía si sustituimos y por $\frac{1}{y}$; esto es, si ponemos $y=\frac{1}{y_1}$, se tiene $\frac{y_1'''}{y_1'}-\frac{3}{2}\left(\frac{y_1''}{y_1'}\right)^2=S$.

1054. Sea dado $y=f(x)$. Expresar $\frac{d^2x}{dy^2}$ mediante $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Mostrar que la fórmula $R=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$ es susceptible de ser reducida a la forma

$$R^{\frac{2}{3}}=\frac{1}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{\frac{2}{3}}}+\frac{1}{\left(\frac{d^2y}{dy^2}\right)^{\frac{2}{3}}}.$$

1055. Sea dado $F(x)=f(x)\cdot\varphi(x)$ siendo $f'(x)\varphi'(x)=C$. Demostrar que

$$\frac{F''}{F}=\frac{f''}{f}+\frac{\varphi''}{\varphi}+\frac{2C}{f\cdot\varphi} \text{ y } \frac{F'''}{F}=\frac{f'''}{f}+\frac{\varphi'''}{\varphi}.$$

Funciones dadas en forma implícita

1056. $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$; $\frac{d^2y}{dx^2}=?$

1057. $x^2+y^2=r^2$; $\frac{d^3y}{dx^3}=?$ **1058.** $y=\operatorname{tg}(x+y)$; $\frac{d^3y}{dx^3}=?$

1059. $s=1+te^s$; $\frac{d^2s}{dt^2}=?$ **1060.** $y^3+x^3-3axy=0$; $y''=?$

1061. $y=\operatorname{sen}(x+y)$; $y''=?$ **1062.** $e^{x+y}=xy$; $y''=?$

1063. Deducir la fórmula para la segunda derivada de la función inversa a la dada $y=f(x)$.

1064. $e^y+xy=e$; hallar $y''(x)$ para $x=0$.

1065. $y^2=2px$; hallar la expresión $k=\frac{y''}{\sqrt{(1+y'^2)^3}}$.

1066. Comprobar que de $y^2+x^2=R^2$ se deduce $k=\frac{1}{R}$, donde $k=\frac{|y''|}{\sqrt{(1+y'^2)^3}}$.

1067. Demostrar que si

$$ax^2+2bxy+cy^2+2gx+2fy+h=0,$$

se tiene

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{ax+by+g}{bx+cy+f} \text{ y } \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{A}{(bx+cy+f)^3}$$

donde A es una constante que no depende de x e y.

1068. Demostrar que si $(a+bx)e^{\frac{y}{x}} = x$, se tiene

$$x^3 \frac{d^2y}{dx^2} = \left(x\frac{dy}{dx} - y\right)^2.$$

Funciones dadas en forma paramétrica

1069. $x = at^2, \quad y = bt^3; \quad \frac{d^2x}{dy^2} = ?$

1070. $x = a\cos t, \quad y = a\,\mathrm{sen}\, t; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = ?$

1071. $x = a\cos t, \quad y = b\,\mathrm{sen}\, t; \quad \frac{d^3y}{dx^3} = ?$

1072. $x = a(\varphi - \mathrm{sen}\,\varphi), \quad y = a(1 - \cos\varphi); \quad \frac{d^2y}{dx^2} = ?$

1073. 1) $x = a\cos^3 t, \quad y = a\,\mathrm{sen}^3 t; \quad \frac{d^3y}{dx^3} = ?$

2) $x = a\cos^2 t, \quad y = a\,\mathrm{sen}^2 t; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = ?$

1074. 1) $x = \ln t, \quad y = t^2 - 1; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = ?$

2) $x = \mathrm{arcsen}\, t, \quad y = \ln(1-t^2); \quad \frac{d^2y}{dx^2} = ?$

1075. $x = at\cos t, \quad y = at\,\mathrm{sen}\, t; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = ?$

1076. Demostrar que la función $y = f(x)$ dada mediante las ecuaciones paramétricas $y = e^t \cos t$, $x = e^t\,\mathrm{sen}\, t$, satisface la relación $y''(x+y)^2 = 2(xy' - y)$.

1077. Demostrar que la función $y = f(x)$ dada paramétricamente mediante las ecuaciones $y = 3t - t^3$, $x = 3t^2$ satisface la relación

$$36y''(y - \sqrt{3x}) = x + 3.$$

1078. Demostrar que la función dada paramétricamente mediante las ecuaciones

$$x = \mathrm{sen}\, t, \quad y = \mathrm{sen}\, kt,$$

satisface la relación

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + k^2y = 0.$$

1079. Demostrar que si

$$x = f(t)\cos t - f'(t)\,\mathrm{sen}\, t, \quad y = f(t)\,\mathrm{sen}\, t + f'(t)\cos t$$

se tiene

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = [f(t) + f''(t)]^2\, dt^2.$$

Aceleración del movimiento

1080. Un punto efectúa movimiento rectilíneo, siendo $s=\frac{4}{3}t^3 - t+5$. Hallar la aceleración a al finalizar el 2° segundo (s está expresada en metros; t, en segundos).

1081. Un movimiento rectilíneo se efectúa de acuerdo con la fórmula $s = t^2 - 4t + 1$.

Hallar la velocidad y la aceleración del movimiento.

1082. Un punto efectúa movimiento rectilíneo, siendo $s=\frac{2}{9}\times \operatorname{sen}\frac{\pi t}{2} + s_0$. Hallar la aceleración al finalizar el primer segundo (s está expresada en cm, t, en s).

1083. Un punto efectúa el movimiento rectilíneo, siendo $s = \sqrt{t}$. Demostrar que el movimiento del punto es retardado y que la aceleración a es proporcional al cubo de la velocidad v.

1084. Una viga pesada, que mide 13 m, se hace descender hacia el suelo de la manera siguiente (véase la fig. 28): su extremo inferior está sujeto a una vagoneta, mientras que el superior se mantiene fijo con un cable devanado en un cabrestante. El cable va desenrollándose a 2 m por minuto. ¿Qué aceleración experimenta la vagoneta cuando se aparta rodando, en el momento en que dista 5 m del punto O?

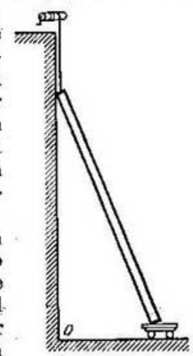

Fig. 28

1085. La cubierta de una barcaza se encuentra 4 m más abajo de la altura del muelle. Tirando de la barcaza, la hacen acercarse para que se ponga al lado del muelle, mediante un cable el cual va devanándose en un cabrestante a 2 m por segundo. ¿Qué aceleración experimenta la barcaza al moverse, en el momento en que dista 8 m del muelle (en línea horizontal)?

1086. Un punto efectúa movimiento rectilíneo de manera que su velocidad varía proporcionalmente a la raíz cuadrada del trayecto recorrido. Mostrar que el movimiento se efectúa al actuar una fuerza constante sobre el punto indicado.

1087. Se tiene un punto material sobre el cual actúa una fuerza inversamente proporcional a la velocidad del movimiento del punto. Demostrar que la energía cinética del punto es la función lineal del tiempo.

Fórmula de Leibniz

1088. Aplicar la fórmula de Leibniz para calcular la derivada:
1) $[(x^2+1)\operatorname{sen} x]^{(20)}$;
2) $(e^x \operatorname{sen} x)^{(n)}$; 3) $(x^3 \operatorname{sen} \alpha x)^{(n)}$.

1089. Mostrar que si $y = (1-x)^{-\alpha}e^{-\alpha x}$, se tiene

$$(1-x)\frac{dy}{dx}=\alpha xy.$$

Aplicando la fórmula de Leibniz mostrar que

$$(1-x)\,y^{(n+1)}-(n+\alpha x)\,y^{(n)}-n\alpha y^{(n-1)}=0.$$

1090. La función $y=e^{\alpha \operatorname{arcsen} x}$ satisface la relación $(1-x^2)\,y''-xy'-\alpha^2 y=0$ (véase el ejercicio 1051). Aplicando la fórmula de Leibniz y derivando esta igualdad n veces, mostrar que

$$(1-x^2)\,y^{(n+2)}-(2n+1)\,xy^{(n+1)}-(n^2+\alpha^2)\,y^{(n)}=0.$$

1091. Mostrar que

$$(e^{ax}\cos bx)^{(n)}=r^n e^{ax}\cos(bx+n\varphi),\ \text{donde}\ r=\sqrt{a^2+b^2},\ \operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a}.$$

Aplicando la fórmula de Leibniz, llegar a las siguientes fórmulas:

$$r^n\cos n\varphi=a^n-C_n^2a^{n-2}b^2+C_n^4a^{n-4}b^4-\ \ldots,$$
$$r^n\operatorname{sen} n\varphi=C_n^1a^{n-1}b-C_n^3a^{n-3}b^3+C_n^5a^{n-5}b^5-\ \ldots$$

1092. Demostrar que $(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}})^{(n)}=(-1)^n\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}}$.

1093. Mostrar que la función $y=\operatorname{arcsen} x$ satisface la relación $(1-x^2)y''=xy'$. Aplicando a ambos miembros de esta ecuación la fórmula de Leibniz, hallar $y^{(n)}(0)$ $(n\geqslant 2)$.

1094. Aplicando la fórmula de Leibniz n veces, mostrar que la función $y=\cos(m \operatorname{arcsen} x)$ satisface la relación

$$(1-x^2)y^{(n+2)}-(2n+1)\,xy^{(n+1)}+(m^2-n^2)\,y^{(n)}=0.$$

1095. Si $y=(\operatorname{arcsen} x)^2$, se tiene

$$(1-x^2)y^{(n+1)}-(2n-1)\,xy^{(n)}-(n-1)^2\,y^{(n-1)}=0.$$

Hallar $y'(0)$, $y''(0)$, $\ldots$, $y^{(n)}(0)$.

Diferenciales de ordenes superiores

1096. $y=\sqrt[3]{x^2}$; $d^2y=?$ **1097.** $y=x^m$; $d^3y=?$

1098. $y=(x+1)^3(x-1)^2$; $d^2y=?$

1099. $y=4^{-x^2}$; $d^2y=?$

1100. $y = \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\operatorname{tg} x\right)$; $d^2y = ?$ **1101.** $y = \sqrt{\ln^2 x - 4}$; $d^2y = ?$

1102. $y = \operatorname{sen}^2 x$; $d^3y = ?$ **1103.** $\rho^2 \cos^3\varphi - a^2 \operatorname{sen}^3\varphi = 0$; $d^2\rho = ?$

1104. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$; $d^2y = ?$

1105. $y = \ln\frac{1-x^2}{1+x^2}$; $x = \operatorname{tg} t$; expresar d^2y mediante: 1) x y dx, 2) t y dt.

1106. $y = \operatorname{sen} z$; $z = a^x$; $x = t^3$; expresar d^2y mediante: 1) z y dz, 2) x y dx; 3) t y dt.