43. Si $f(x)$ es el peso del segmento AM, se tiene $f(x) = 2x$ para $0 \leqslant x \leqslant 1$, $f(x) = 2 + \frac{3}{2}(x-1)$ para $1 < x \leqslant 3$, $f(x) = x + 2$ para $3 < x \leqslant 4$. La función viene determinada cuando $0 \leqslant x \leqslant 4$.

44. Para $0 \leqslant x \leqslant R$ $S = \pi(2R - x)^2$, para $R \leqslant x \leqslant 3R$ $S = \pi R^2$, para $3R \leqslant x \leqslant 4R$ $S = \pi(6Rx - x^2 - 8R^2)$. Fuera del intervalo $[0, 4R]$ la función $S = f(x)$ no está determinada.

45. $V = \pi x \left(R^2 - \frac{x^2}{4}\right)$; $0 < x < 2R$.

46. $S = \frac{\pi x^2}{2R}\sqrt{4R^2 - x^2}$; $0 < x < 2R$.

47. 1) $x > 0$; 2) $x > -3$; 3) $x \leqslant \frac{5}{2}$; 4) $-\infty < x \leqslant 0$; 5) todo el eje numérico, excepto los puntos $x = \pm 1$; 6) todo el eje numérico; 7) no está determinado sólo para $x = 0$, $x = -1$, $x = 1$; 8) todo el eje numérico excepto los puntos $x = 1$ y $x = 2$; 9) $-1 \leqslant x \leqslant 1$; 10) $-\infty < x < 0$ y $4 < x < \infty$; 11) $-\infty < x \leqslant 1$ y $3 \leqslant x < \infty$; en el intervalo $(1, 3)$ la función no está definida; 12) $-\infty < x < 1$ y $2 < x < \infty$; en el intervalo $[1, 2]$ la función no está definida; 13) $-4 \leqslant x \leqslant 4$; 14) $1 \leqslant x \leqslant 3$; 15) $0 \leqslant x \leqslant 1$; 16) $-\frac{3}{2} \leqslant x \leqslant \frac{5}{2}$; 17) $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$; 18) $-1 \leqslant x \leqslant 1$; 19) $-\infty < x < 0$; 20) no tiene sentido; 21) $1 \leqslant x \leqslant 4$; 22) $2k\pi < x < (2k+1)\pi$, donde k es un entero; 23) $2k\pi \leqslant x \leqslant (2k+1)\pi$, donde k es un entero; 24) $0 < x < 1$ y $1 < x < \infty$.

48. 1) $-2 \leqslant x < 0$ y $0 < x < 1$; 2) $-1 \leqslant x \leqslant 3$; 3) $1 \leqslant x < 4$; 4) $\frac{3}{2} < x < 2$ y $2 < x < \infty$; 5) el dominio de definición consta sólo del punto $x = 1$; 6) $-1 < x < 0$ y $1 < x < 2$; $2 < x < \infty$; 7) $3 - 2\pi < x < 3 - \pi$; $3 < x \leqslant 4$; 8) $-4 \leqslant x \leqslant -\pi$ y $0 \leqslant x \leqslant \pi$; 9) $2k\pi < x < (2k+1)\pi$, donde k es un entero; 10) $4 < x < 5$ y $6 < x < \infty$; 11) no está definida en parte alguna; 12) $-1 < x \leqslant 1$ y $2 \leqslant x < 3$; 13) todo el eje numérico; 14) $4 \leqslant x \leqslant 6$; 15) $2 < x < 3$.

49. 1) Sí; 2) son idénticas en cualquier intervalo que no contenga el punto $x = 0$; 3) son idénticas en el intervalo $[0, \infty)$; 4) son idénticas en el intervalo $(0, \infty)$.

50. 1) Por ejemplo, $y = \sqrt{4 - x^2}$; 2) por ejemplo, $y = \frac{1}{x\sqrt{4 - x^2}}$; 3) por ejemplo, $y = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-4}$.

51. 1) $1 < x \leqslant 3$; 2) $0 \leqslant x < +\infty$ para dos ramas y $1 \leqslant x < +\infty$ para otras dos ramas.

52. $-\infty < x < \infty$.

53. 1) $y > 0$ para $x > 2$; $y < 0$ para $x < 2$; $y = 0$ para $x = 2$; 2) $y > 0$ para $x < 2$ y $x > 3$; $y < 0$ para $2 < x < 3$; $y = 0$ para $x_1 = 2$ y $x_2 = 3$; 3) $y > 0$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$, la función no tiene ceros; 4) $y > 0$ en los intervalos $(0, 1)$, $(2, +\infty)$; $y < 0$ en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(1, 2)$; $y = 0$ para $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$; 5) $y > 0$ para $x \neq 0$; $y = 0$ para $x = 0$.

54. 1), 3), 8), 10), 11), 15) son pares; 5), 6), 9), 12), 14), 17) son impares; 2), 4), 7), 13), 16) no son pares ni impares.

55. 1) $y = (x^2 + 2) + 3x$; 2) $y = (1 - x^4) + (-x^3 - 2x^5)$; 3) $y = (\operatorname{sen} 2x + \operatorname{tg} x) + \cos\frac{x}{2}$.

57. 1) $y=\frac{a^x+a^{-x}}{2}+\frac{a^x-a^{-x}}{2}$;

2) $y=\frac{(1+x)^{100}+(1-x)^{100}}{2}+\frac{(1+x)^{100}-(1-x)^{100}}{2}$.

59. Las funciones 1), 5), 6), 8).

60. Véanse las gráficas en las figs. 80 y 81.

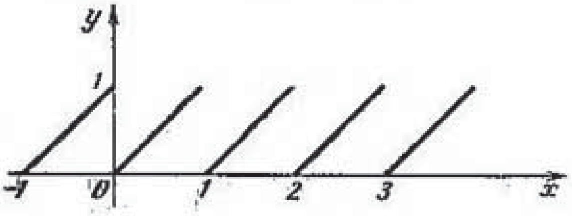

Fig. 80

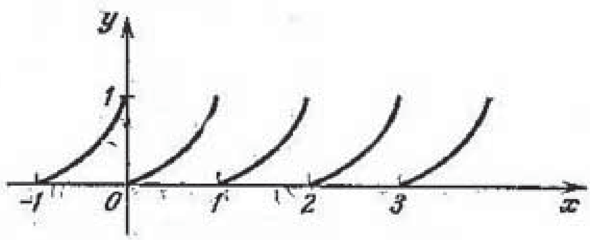

Fig. 81

61. 1) En el intervalo $(-\infty, 0)$ decrece, en el intervalo $(0, +\infty)$ crece; 2) en el intervalo $(-\infty, 0)$ decrece, en el intervalo $(0, +\infty)$ conserva su valor constante, que es el cero.

62. 1) El valor máximo es 1, el valor mínimo es 0; 2) el valor máximo es 1, el valor mínimo es igual a -1; 3) el valor máximo es 2, el valor mínimo es 0; 4) no tiene valor máximo, el mínimo es 1.

65. $I=\frac{E}{3}$. 66. a) $p=0{,}727h$; b) 10,5 gf/cm^2; c) 36,4 cm. 67. $F=\frac{8}{45}w$.

68. 1) $y=\frac{2}{3}x+4$; 2) $y=1{,}195x+1{,}910$; 3) $y=-0{,}57x+8{,}63$.

69. a) $V=100+0{,}35t$; b) 100 cm^3.

70. $S=16{,}6+1{,}34t$. 71. $V=12-0{,}7t$.

72. $\Delta y=6$. 73. $\Delta y=-6$. 74. $\Delta x=4$.

75. El valor finito $x_2=2a$.

76. $x=3$; gráficamente se busca el punto de intersección de la gráfica de la función $y=\varphi(x)$ y la recta $y=2x-4$.

78*. Es necesario prestar atención a que los datos del problema llevan suprimido el signo de igualdad de la siempre válida relación $|f(x)+\varphi(x)| \leqslant |f(x)|+|\varphi(x)|$. La estricta desigualdad se verifica para $x<3$ y $x>4$. El problema puede ser solucionado construyendo las gráficas de las funciones $\Phi(x)=|f(x)+\varphi(x)|$ y $\psi(x)=|f(x)|+|\varphi(x)|$.

79. $x<2$. Véase la indicación al ejercicio 78*.

82. $y=\begin{cases} 0 & \text{sobre el intervalo } (-\infty;\ -3); \\ -\frac{5}{9}x^2+5 & \text{sobre el intervalo } [-3;\ 3], \\ \frac{2}{3}x-2 & \text{sobre el intervalo } [3;\ 6]. \end{cases}$

83. 1) $y=-\frac{7}{8}$ para $x=\frac{1}{4}$; 2) $y=\frac{17}{4}$ para $x=-\frac{3}{2}$; 3) $y=5$ para $x=0$; 4) $y=-\frac{7a^2}{8}$ para $x=\frac{a}{4}$; 5) $y=\frac{a^3}{4b^2}$ para $x=\frac{a^2}{2b^2}$.

84. 1) $y=-6$ para $x=-2$; 2) $y=0{,}31875$ para $x=\frac{3}{8}$; 3) $y=\frac{5}{8}$ para $x=\frac{1}{4}$; 4) $y=a^4$ para $x=0$; 5) $y=-\frac{9}{4}b^2$ para $x=\frac{b}{2a}$.

85. $a=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}$. 86. $a=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}$. 87. 4 m. 88. Cada uno a 50 cm.

89. Aquel cuya sección axial es un cuadrado.

90. Cuanto menor es la altura del cono, tanto mayor es su superficie lateral. La función alcanza su valor máximo cuando el radio de la base es igual a $\frac{P}{4}$, es decir, cuando el cono degenera en un disco plano.

91. 12,5 cm.

92. La altura del rectángulo debe ser igual a la mitad de la altura del triángulo.

93. El radio del cilindro debe ser igual a la mitad del radio del cono.

94. El radio del cilindro debe ser igual a $\frac{RH}{2(H-R)}$ para $H>2R$; para $H\leqslant 2R$ la superficie total del cilindro inscrito será tanto mayor cuanto mayor es el radio de su base.

95. $\frac{P}{2}$. 96. $a=\frac{P}{6-\sqrt{3}}$. 97. $\frac{4}{\pi+4}$.

98. El lado debe ser igual a 10 cm.

99. El lado de la base y cada una de las aristas deben medir 10 cm.

100. El lado del triángulo debe ser igual a $\frac{3a}{9+4\sqrt{3}}$.

101. El punto buscado es $\left(\frac{b}{6},\ \frac{b}{6}\right)$.

102. El punto buscado es $\left(\frac{15}{11},\ \frac{37}{11}\right)$.

104. $x_1\approx-1{,}1$; $x_2\approx 2{,}1$; 2) $x_1=-1$, $x_2=\frac{5}{2}$; 3) $x_1\approx 0{,}5$, $x_2\approx 4{,}1$; 4) $x_1=x_2=\frac{3}{2}$; 5) no tiene raíces reales.

105. $x_1=-3$, $x_2=8$. En la solución gráfica se busca el punto de intersección de la gráfica de la función $y=\varphi(x)$ y de la parábola $y^2=7x+25$.

106. Si $b^2-4ac>0$ y $a>0$, la función está definida en todo el eje numérico excepto el intervalo $x_1\leqslant x\leqslant x_2$ donde x_1 y x_2 son las raíces del trinomio. Para $b^2-4ac>0$ y $a<0$ la función está definida sólo cuando $x_1<x<x_2$.

Si $b^2-4ac<0$ y $a>0$, la función está definida en todo el eje numérico. Si $b^2-4ac<0$ y $a<0$, la función no está definida en parte alguna. Por fin, para $b^2-4ac=0$ la función está definida en todo el eje numérico excepto un punto, a saber, $x=-\frac{b}{2a}$ si $a>0$, pero si $a<0$, la función no está definida en parte alguna.

107. $f(x+1)=2x^2+5x+3$.

108*. Sea $\frac{x^2+2x+c}{x^2+4x+3c}=m$, donde m es cualquier número real, entonces, $(m-1)x^2+2(2m-1)x+c(3m-1)=0$. El argumento x debe ser un número real, por consiguiente, $(2m-1)^2-(m-1)(3mc-c)\geqslant 0$ ó $(4-3c)m^2+4(c-1)m-(c-1)\geqslant 0$, pero como m es un número real, esta desigualdad, a su vez, es válida sólo cuando

$$\begin{cases} 4-3c>0 \\ 4(c-1)^2+(4-3c)(c-1)\leqslant 0, \end{cases}$$

de donde $0\leqslant c\leqslant 1$, pero como $c\neq 0$, por consiguiente, $0<c\leqslant 1$.

109. $pv=1748$.

110. La variable x es inversamente proporcional a v.

111. La variable x es directamente proporcional a v.

112. La cantidad de la sustancia desprendida es inversamente proporcional al volumen del solvente.

114. 1) para $x=1$, $y=4$ (el valor máximo);
para $x=5$, $y=\frac{4}{5}$ (el valor mínimo);
2) para $x=-1$, $y=\frac{1}{7}$ (el valor máximo);
para $x=2$, $y=-2$ (el valor mínimo);
3) para $x=0$, $y=1$ (el valor máximo);
para $x=4$, $y=-\frac{3}{5}$ (el valor mínimo).

117. 1) $y=x$; 2) $y=\frac{x}{2}$; 3) $y=\frac{1-x}{3}$; 4) $y=\pm\sqrt{x-1}$; 5) $y=\frac{1}{x}$;
6) $y=\frac{x-1}{x}$; 7) $y=1\pm\sqrt{x+1}$; 8) $y=\pm\sqrt{x^3-1}$;
9) $y=\lg\frac{x}{10}$; 10) $y=-2+10^{x-1}$; 11) $y=2^{\frac{1}{x}}$;
12) $y=\log_2\frac{x}{1-x}$; 13) $y=\frac{1}{2}\lg\frac{x}{2-x}$; 14) $y=\frac{1}{3}\operatorname{arcsen}\frac{x}{2}$;
15) $y=\dfrac{1+\operatorname{arcsen}\frac{x-1}{2}}{1-\operatorname{arcsen}\frac{x-1}{2}}$; 16) $y=\pm\cos\frac{x}{4}$ $(0\leqslant x\leqslant 2\pi)$.

119. $d=-a$. **122.** $1<x\leqslant 3$; $y=1+2^{1-x^2}$.

123. $y=\operatorname{arcsen}\sqrt[3]{x-x^2-2}$.

125. $x_1\approx -0{,}5$, $x_2=1$, $x_3\approx 54{,}5$.

126*. 1) $x_1\approx 1{,}4$, las demás raíces son imaginarias; x_1 es la abscisa del punto de intersección de las gráficas de las funciones cúbica y lineal: $y=x^3$ e $y=-x+4$; 2) $x_1=1$, $x_2=-1$, $x_3=3$; es conveniente aplicar el cambio de la variable $x=x'+\alpha$ seleccionando α de tal modo que el coeficiente de

x'^2 se reduzca a cero; y luego, como en el punto 1); 3) $x_1=4$, $x_2=x_3=1$; véase la indicación al punto 2); 4) $x_1=-1$, las demás raíces son imaginarias; véase la indicación al punto 2).

127. 1) 1,465 . . .; 2) $\approx 14{,}26$ cm; 3) casi 6,8 cm.

128. Si $y_1=x^n$, $y_2=\sqrt[n]{x}$, se tiene
cuando $n>1$ para $0<x<1$ $y_1<y_2$ y para $1<x<\infty$ $y_1>y_2$,
cuando $0<n<1$ para $0<x<1$ $y_1>y_2$, y para $1<x<\infty$ $y_1<y_2$,
cuando $-1<n<0$ para $0<x<1$ $y_1<y_2$, y para $1<x<\infty$ $y_1>y_2$,
cuando $n<-1$ para $0<x<1$ $y_1>y_2$, y para $1<x<\infty$ $y_1<y_2$.

133. $x_1=1$, $x_2=2$.

134. Los puntos de intersección son $(1, 2)$; $(3, 8)$; $\left(3, \frac{4}{3}\right)$; $(-1{,}5;\ 0{,}3)$.

135. $n=15$.

136. Partiendo de la definición de las funciones hiperbólicas es posible demostrar que $\operatorname{sh}(-x)=-\operatorname{sh} x$, $\operatorname{th}(-x)=-\operatorname{th} x$, $\operatorname{ch}(-x)=\operatorname{ch} x$. Estas funciones no son periódicas.

140. $y_{\min}\approx 0{,}8$ para $x\approx 0{,}4$.

141. La gráfica de la función es simértica respecto al origen de coordenadas porque la función es impar. $y=\frac{a^x-a^{-x}}{2}$.

143. 1) $A=1$, $T=\frac{2}{3}\pi$; 2) $A=5$, $T=\pi$; 3) $A=4$, $T=2$;
4) $A=2$, $T=4\pi$; 5) $A=1$, $T=\frac{8}{3}$; 6) $A=3$, $T=\frac{16}{5}\pi$.

144. 1) 2; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{3}{2\pi}$; 5; 2) 1; 4π; $\frac{1}{4\pi}$; $\frac{3\pi-1}{2}$; 3) $\frac{1}{3}$; 1; 1; $-\frac{\pi}{3}$;
4) 1; $6\pi^2$; $\frac{1}{6\pi^2}$; $\frac{1}{2\pi}$.

146. El dominio de definición es $(0, \pi)$. El área es máxima cuando $x=\frac{\pi}{2}$.

147. $x=R\operatorname{sen}\left(\frac{vt}{R}+\frac{\pi}{2}+\arccos\frac{a}{R}\right)$.

148. $y=\operatorname{sen}\left[\frac{t-t_0}{t_1-t_0}(\operatorname{arcsen} y_1-\operatorname{arcsen} y_0)+\operatorname{arcsen} y_0\right]$;

$$T=\frac{2\pi(t_1-t_0)}{\operatorname{arcsen} y_1-\operatorname{arcsen} y_0}; \qquad \varphi_{\text{inic}}=\frac{t_1\operatorname{arcsen} y_0-t_0\operatorname{arcsen} y_1}{t_1-t_0}.$$

149. $x=R(1-\cos\varphi)+a-\sqrt{a^2-R^2\operatorname{sen}^2\varphi}$, donde $\varphi=2\pi nt$.

151. 1) $x_1=0$, $x_{2,3}\approx\pm 1{,}9$; 2) $x=0$; $\pm 4{,}5$; $\pm 7{,}72$: luego, con exactitud considerable se puede apreciar $x\approx\pm\frac{(2n+1)\pi}{2}$ $(n>3)$; 3) $x\approx 0{,}74$; 4) $x_1=0{,}9$, $x_2=2{,}85$, $x_3=5{,}8$; 5) existe un sinnúmero de raíces; $x_1=0$, x_2 es un poco menos que $\frac{\pi}{2}$, x_3 es un poco mayor que $\frac{3\pi}{2}$, etc.

152. 1) 2π; 2) 2π; 3) 24; 4) 2.

153. 1) $y=\sqrt{2}\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$;
2) $y=\sqrt{5+2\sqrt{3}}\operatorname{sen}(x+\varphi_0)$, donde $\varphi_0=\operatorname{arcsen}\frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{3}}}$.

155*. 1) El período es $\frac{\pi}{2}$. Sobre el intervalo $[0, 2\pi]$ la función es susceptible de ser presentada de la siguiente forma:

$$y = \operatorname{sen} x + \cos x \text{ sobre el intervalo } \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

$$y = \operatorname{sen} x - \cos x \text{ sobre el intervalo } \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right],$$

$$y = -\operatorname{sen} x - \cos x \text{ sobre el intervalo } \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right],$$

$$y = -\operatorname{sen} x + \cos x \text{ sobre el intervalo } \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right].$$

2) El período es 2π. Sobre el intervalo $[0, 2\pi]$ la función es susceptible de ser presentada de la siguiente forma:

$$y = \operatorname{tg} x \text{ sobre el intervalo } \left[0, \frac{\pi}{2}\right).$$

$$y = 0 \text{ sobre el intervalo } \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right],$$

$$y = -\operatorname{tg} x \text{ sobre el intervalo } \left[\pi, \frac{3}{2}\pi\right).$$

$$y = 0 \text{ sobre el intervalo } \left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right].$$

156. 1) El dominio de definición está compuesto de una infinidad de intervalos de la forma $(2n\pi, (2n+1)\pi)$, donde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; no es par ni impar; periódica, el período es 2π. Sobre el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ el seno crece desde 0 hasta 1, por consiguiente, $\lg \operatorname{sen} x$ crece hasta 0 sin dejar de ser negativo. En el intervalo $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ el seno decrece desde 1 hasta 0, por consiguiente, decrece $\lg \operatorname{sen} x$. En el intervalo $(\pi, 2\pi)$ el seno tiene valores negativos, por consiguiente, la función $\lg \operatorname{sen} x$ no está definida. 2) El dominio de definición está compuesto de puntos separados de la forma $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, donde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ En estos puntos $y = 0$. La gráfica son puntos sueltos del eje de las abscisas. 3) La función está definida en todo el eje numérico, excepto los puntos $x = \pi n$, donde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

158. $\omega = 2 \arcsen \frac{a}{2\pi}$. **159.** $\gamma = \operatorname{arctg} \frac{a(l \cos\varphi + b \operatorname{sen}\varphi)}{b^2 + l^2 + a(b\cos\varphi - l \operatorname{sen}\varphi)}$.

160. $\alpha = \arccos\left[1 - \frac{x(2a - x)}{2R(a + R - x)}\right]$.

161. 1) $-1 \leqslant x \leqslant 1$;
2) $0 \leqslant x \leqslant 1$; 3) $0 \leqslant x \leqslant 1$; 4) $-1 \leqslant x \leqslant 0$; 5) $0 < x < \infty$;
6) $-\infty < x < 0$; 7) $0 < x < \infty$; 8) $-\infty < x \leqslant 0$;
9) $-\infty < x < 1$; 10) $1 < x < \infty$.

162. 1) $-1 \leqslant x \leqslant 1$; 2) $0 \leqslant x \leqslant 1$; 3) $-\infty < x < \infty$; 4) está definida por todas partes, excepto $x = 0$.

163*. El período es 2π. Véase la gráfica en la fig. 82. *Indicación*. Sobre el intervalo $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ tenemos $y = \arcsen(\operatorname{sen} x) \equiv x$ de acuerdo con la

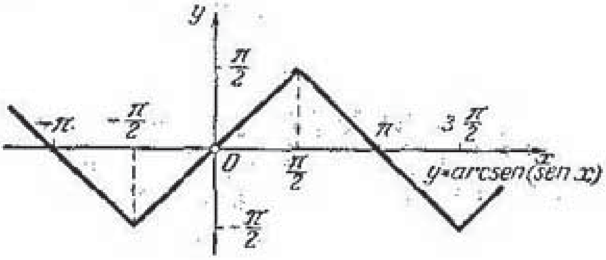

Fig. 82

definición de la función arcsen x. Para obtener la gráfica de la función sobre el intervalo $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant 3\frac{\pi}{2}$ ponemos $z = x - \pi$, entonces tenemos $x = \pi + z$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant z \leqslant \frac{\pi}{2}$,

$$y = \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x) = \operatorname{arcsen}\operatorname{sen}(z+\pi) = -\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} z) = -z;$$

$$y = \pi - x, \text{ etc.}$$

167. $y_{\text{máx}} \approx 15$, $y_{\text{mín}} \approx 5{,}5$; la función pasa del crecimiento al decrecimiento para $x = -2$. Cero de la función: $x \approx -3{,}6$.

169. $y = \frac{1}{32}(267 - 10x - x^2)$ ó $y = -0{,}0312x^2 - 0{,}3125x + 8{,}344$; ceros de la función: $x_1 \approx -22{,}09$, $x_2 \approx 12{,}09$. Para obtener raíces con exactitud hasta 0,01 los coeficientes deben ser tomados con exactitud hasta 0,0001.

170. $x_1 \approx 2{,}60$ cm, $x_2 \approx 7{,}87$ cm.

171. $x_1 \approx -2{,}3$, $x_2 \approx 3$; las demás raíces son imaginarias.

172*. Seleccionar α de modo que el coeficiente de x'^3 se reduzca a cero; $x_1 \approx -3{,}6$, $x_2 \approx -2{,}9$, $x_3 \approx 0{,}6$, $x_4 \approx 4{,}8$.

173. $x_1 \approx 0{,}59$, $x_2 \approx 3{,}10$, $x_3 \approx 6{,}29$, $x_4 \approx 9{,}43$; en general, $x \approx \approx \pi n$ $(n > 2)$.

174. $x_1 \approx -0{,}57$, $y_1 \approx -1{,}26$; $x_2 = -0{,}42$, $y_2 \approx 1{,}19$, $x_3 \approx 0{,}46$, $y_3 \approx \approx 0{,}74$, $x_4 \approx 0{,}54$, $y_4 \approx -0{,}68$.

Al capítulo II

176. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$, $n \geqslant 4$.

177. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$; $n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. 178. $n = 19\,999$.

179. $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$; $n \geqslant 1000$. La magnitud v_n ora es mayor que su límite ora menor, ora igual a él (en este último caso para $n = 2k+1$, donde $k = 0, 1, 2, \ldots$).

180. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$; $n \geqslant 14$; $n \geqslant \log_2 \frac{1}{\varepsilon}$.

181. $n \geqslant \frac{1}{3}\sqrt{\frac{5-6\varepsilon}{\varepsilon}}$, si $\varepsilon \leqslant \frac{5}{6}$; $n = 0$, si $\varepsilon > \frac{5}{6}$.

182. $n \geqslant \frac{a}{\sqrt{\varepsilon(2+\varepsilon)}}$; la sucesión u_n es decreciente.

183. $\lim_{n\to\infty} v_n = 0$; v_n alcanza su límite para $n = m + 1$, porque, a partir de este valor de n, $v_n = 0$.

185. 0. 186. 1) No. 2) Sí.

189. Cuando $a = 0$ este límite puede ser igual a cualquier número o no existir.

190. $\delta < \sqrt{4+\varepsilon} - 2$; $\delta < 0{,}00025$. 191. $\delta < 2 - \sqrt{3}$. 192. $\delta < \frac{2}{13}$.

193. $\left| x - \frac{\pi}{2} \right| < \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsen} 0{,}99 \approx 0{,}136$.

194. $N \geqslant \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1}$, si $\varepsilon \leqslant 1$; $N = 0$, si $\varepsilon > 1$.

195. $N \geqslant \sqrt{\frac{4}{\varepsilon} - 3}$, si $\varepsilon \leqslant \frac{4}{3}$; $N = 0$, si $\varepsilon > \frac{4}{3}$.

196. $n > \frac{N-1}{2}$,

197. u_n es una magnitud positiva infinitamente grande si la diferencia de la progresión $d > 0$, y negativa, cuando $d < 0$. En el caso de la progresión geométrica esta aserción es válida sólo cuando el valor absoluto del denominador de la progresión es mayor que 1.

198. $-\frac{1}{10^4+2} < x < \frac{1}{10^4-2}$. 199. $\frac{3000}{1001} < x < \frac{3000}{999}$.

200. $\delta < \frac{1}{\sqrt{N}} - 0{,}01$. 201. $\log_2 0{,}99 < x < \log_2 1{,}01$.

202. $M \geqslant 10^N = 10^{100}$. 203. $\operatorname{sen} x$, $\cos x$ y todas las funciones trigonométricas inversas. 205. No. Sí. 206. No. 207. 1) Por ejemplo, $x_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ y $x_n = 2\pi n$; 2) No.

209. Si $a > 1$, la función no es acotada (pero no es infinitamente grande) cuando $x \to +\infty$; cuando $x \to -\infty$ tiende a cero. Si $0 < a < 1$, la función no es acotada para $x \to -\infty$ (pero la función no es infinitamente grande). Cuando $x \to +\infty$, tiende a cero. Para $a = 1$ la función es acotada en todo el eje numérico.

210. 1), 3) y 5) no; 2) y 4) sí.

213. $\frac{-1}{10001} < x < \frac{1}{9999}$.

214. $N \geqslant \left(\frac{1-\varepsilon^2}{2\varepsilon} \right)^2$

215. 1) $y = 1 + \frac{1}{x^3-1}$; 2) $y = \frac{1}{2} + \frac{-1}{2(2x^2+1)}$; 3) $y = -1 + \frac{2}{1+x^2}$.

216*. Comparar u_n con la suma de los términos de la progresión geométrica $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots, \frac{1}{3^n}$. 220. 3. 221. Sí.

222. $f(x) = 9\pi$ para $0 \leqslant x \leqslant 5$; $f(x) = 4\pi$ para $5 < x \leqslant 10$; $f(x) = \pi$ para $10 < x \leqslant 15$. La función es discontinua cuando $x = 5$ y $x = 10$.

223. $a = 1$. 224. $A = -1$, $B = 1$. 225. $x = 2$; $x = -2$. 226. 2/3.

227. La función $y=\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ tiene, en el punto $x=0$, una discontinuidad superable, la función $y=\frac{\cos x}{x}$ tiene una discontinuidad de segundo género (infinita).

228. La función es discontinua cuando $x=0$.

229. La función tiene tres puntos de discontinuidad. Para $x=0$ la discontinuidad es superable, para $x=\pm 1$ la discontinuidad es de segundo género (infinita).

230. No. Si $x\to 0$ a la derecha, $f(x)\to \pi/2$; si $x\to 0$ a la izquierda, $f(x)\to -\pi/2$.

231. La función es discontinua cuando $x=0$. 232. 0.

234. No. Si $x\to 1$ a la derecha, $y\to 1$; si $x\to 1$ a la izquierda, $y\to 0$.

235. Si $x\to 0$ a la derecha, $y\to 1$; si $x\to 0$ a la izquierda, $y\to -1$.

236. La función es discontinua cuando $x=0$ (discontinuidad de primer género).

237. La función tiene discontinuidades de primer género en los puntos $x=$ $=\frac{\pi}{2}(2k+1)$.

238. Cuando $x=0$ la función es continua; cuando $x\neq 0$ la función es discontinua.

239. Las tres funciones son discontinuas cuando x es igual a un entero (negativo o positivo) o a cero.

241*. Escribir el polinomio en la forma $x^n\left(a_0+\frac{a_1}{x}+\ldots+\frac{a_n}{x^n}\right)$ y analizar su comportamiento para $x\longrightarrow\pm\infty$.

244*. Construir, de modo esquemático, la gráfica de la función $y=\frac{a_1}{x-\lambda_1}+\frac{a_2}{x-\lambda_2}+\frac{a_3}{x-\lambda_3}$ analizando su comportamiento en los entornos de los puntos $\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3$.

245. 1. 246. 1/2. 247. 3. 248. ∞. 249. 0. 250. 0. 251. 15/17.
252. 1. 253. 0. 254. 4. 255. 1. 256. 0. 257. 0. 258. 0. 259. 1.
260. 4/3. 261. 1/2. 260. —1/2. 263. —1.

264*. 1. Fijarse en que $\frac{1}{(n-1)n}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$. 265. $\frac{1}{2}$. 266. 1. 267. 0.

268. 9. 269. $\frac{3}{4}$. 270∞. 271. 0. 272.0

273. —2/5. 274. 1/2. 275. 6. 276. ∞.
277. —1. 278. ∞. 279. 0. 280. m/n. 281. 0. 282. ∞. 283. 1/2.
284. —1. 285. 0. 286. 1/4. 287. —1/2. 288. 100. 289. —1.
290. 1. 291. ∞. 292. 0.
293. 0. 294. ∞. 295. 4. 296. 1/4. 297. 3.

298. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$, si $x>0$; ∞, si $x=0$. 299. $\frac{1}{3}$. 300. $\frac{2}{3}$.

301. $\frac{1}{4a\sqrt{a-b}}$. 302. $\frac{m}{n}$. 303*. $\frac{1}{2}$. Sumar y restar una unidad al numerador. 304. —1/4. 305. Una raíz tiende a $-c/b$, otra, a ∞.

306. 0. 307. 0. 308. 0, si $x\to+\infty$; ∞, si $x\to-\infty$. 309. 1/2, si $x\to$ $\to+\infty$; $-\infty$, si $x\to-\infty$. 310. $\frac{a+b}{2}$, si $x\to+\infty$; ∞, si $x\to-\infty$.

311. $\pm 5/2$. 312. 0. 313. 1. 314. 3. 315. k. 316. α/β. 317. 2/5.
318. 0, si $n > m$; 1, si $n = m$; ∞, si $n < m$. 319. 2/3. 320. 1/3.
321. 1/2. 322. 3/4. 323. ∞. 324. -1. 325. 1/2. 326. ∞. 327. 0.
328. 1/2. 329. ∞. 330. $-3/2$. 331. 1. 332. $\pi/2$. 333. $2/\pi$.

334. $-\frac{a}{\pi}$. 335. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 336. 2. 337. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 338. -2. 339. $-2 \operatorname{sen} a$.

340. $\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}$. 341. $\cos^3 \alpha$. 342. $\frac{\operatorname{sen} 2\beta}{2\beta}$. 343. $-\operatorname{sen} \alpha$.

344. $\frac{2 \operatorname{sen} a}{\cos^3 a}$. 345. $\frac{\sqrt{2}}{8}$. 346. 1. 347. 6. 348. $\frac{3}{2}$. 349. -1.

350*. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Poner $\arccos x = y$. 351. $\frac{1}{e}$. 352. $\frac{1}{e}$. 353. 1.

354. e^{mk}. 355. e^6. 356. $e^{-\frac{2}{3}}$.

357. e^2. 358. 0, si $x \to +\infty$; ∞, si $x \to -\infty$. 359. ∞, si $x \to +\infty$; 0, si $x \to -\infty$. 360. 1. 361. ∞, si $x \to +\infty$; 0, si $x \to -\infty$.

362. e^2. 363. e. 364. $\sqrt{e}$. 365. k. 366. $1/a$. 367. a. 368. $1/e$.

369. $\ln a$. 370. 2/3. 371. e. 372*. 3/2; sumar y restar una unidad al numerador. 373. 2. 374. 1. 375. $a-b$. 376. 1.

377. 0, si $x \to +\infty$; ∞, si $x \to -\infty$.

378. 1, si $x \to +\infty$; -1, si $x \to -\infty$.

379. 1) a^n; 2) 0, si $A \neq 0$; a^n, si $A = 0$ y $a \neq 0$, y ∞, si $A = a = 0$; 3) $\frac{1}{1+A}$.

380. 0, si $x \to +\infty$; $-\infty$, si $x \to -\infty$.

381. Para $a > 1$ el límite es igual a 1, si $x \to +\infty$, e igual a 0, si $x \to -\infty$. Para $a < 1$ el límite es igual a 0, si $x \to +\infty$, e igual a 1, si $x \to -\infty$. Para $a = 1$ el límite es igual a 1/2.

382. Para $a > 1$ el límite es igual a 1, si $x \to +\infty$, e igual a -1, si $x \to -\infty$. Para $a < 1$, viceversa. Para $a = 1$ el límite es igual a 0.

383. 0. 384. 0. 385. 1.

386. 0. 387. $-\cos a$. 388. 1/12. 389. 1/8.

390*. $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$. Multiplicar y dividir por $\operatorname{sen} \frac{x}{2^n}$.

391. 1/2. 392. 0. 393*. $-1/2$. Valerse de la fórmula $\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} a = \operatorname{arctg} \frac{b-a}{1+ab}$. 394. $\frac{1}{2}$. 395*. $\frac{1}{2}$. Sustituir $\operatorname{arcsen} x$ por $\operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ y recurrir a la indicación al ejercicio 393.

396. ∞, si $n < 1$; e, si $n = 1$; 1, si $n > 1$.

397.* 1. Tomar la expresión $1-(1-\cos x)$ en vez de $\cos x$.

398. $-1/2$. 399. $1/e$. 400. e. 401. e^{ab}.

402. v_n es de orden infinitesimal superior. 403. u_n y v_n son magnitudes infinitesimales equivalentes. 405. Son del mismo orden. 406. Para $x = 0$ el orden infinitesimal es distinto. Cuando $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ las magnitudes Δy y Δx son equivalentes. 407. No.

408. De tercer orden. 409. 1) 2; 2) 1/2; 3) 1; 4) 10.

410. $x = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{a^2}{2b^2}}$. 411. $a = k$. 412. No. 414. 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{1}{2}$;

4) es infinitesimal equivalente; 5) es infinitesimal equivalente; 6) 1; 7) es infinitesimal equivalente; 8) 2; 9) 2; 10) 1; 11) 2/3; 12) 2.

415. $a^2\sqrt{3}$. 416. $2\pi R^2$; $4R^2$.

418. La línea quebrada viene aproximándose a la recta en el sentido de que sus puntos se aproximan, pero de ello no se deduce que la longitud de la línea quebrada tiende a la longitud del segmento.

419. a. 420. a, $\frac{\pi a}{2}$. 421. $2\pi(R+r)$.

422. El segmento y el ángulo son del orden 1/2.
425. 1) 10,25; 2) 30,2; 3) 16,125; 4) 40,4; 5) 0,558; 6) 0,145.
426. 1) 10,16; 2) 20,12; 3) 1,02; 4) 4,04.
427. $\ln 1{,}01 \approx 0{,}01$; $\ln 1{,}02 \approx 0{,}0{,}2$; $\ln 1{,}1 \approx 0{,}1$; $\ln 1{,}2 \approx 0{,}2$.

Al capítulo III

428. a) 5; b) 5. 429. a) $v=0{,}25\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; b) $v=0{,}55\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; c) $\frac{t_1+t_2}{1200}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

430. 75,88; 60,85; 49,03; 48,05. 431. $53{,}9\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $49{,}49\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $49{,}25\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $49{,}005\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $v_5=49{,}0\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $v_{10}=98{,}0\frac{\text{m}}{\text{s}}$; $v=9{,}8t\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

432. a) $4\frac{\text{g}}{\text{cm}}$; b) $40\ \frac{\text{g}}{\text{cm}}$; c) $4l\ \frac{\text{g}}{\text{cm}}$, donde l es la longitud del segmento AM.

433. 1) $95\ \frac{\text{g}}{\text{cm}}$; 2) a) $35\ \frac{\text{g}}{\text{cm}}$; b) $5\ \frac{\text{g}}{\text{cm}}$; c) $185\ \frac{\text{g}}{\text{cm}}$.

434. 1) $1{,}002\ \frac{\text{calorías}}{\text{g}\cdot\text{grados}}=4198\ \frac{\text{julios}}{\text{kg}\cdot\text{grados}}$; 2) $1{,}013\ \frac{\text{calorías}}{\text{g}\cdot\text{grados}}$.

435*. Introducir la velocidad angular media, luego, pasando al límite, obtener la magnitud buscada.

438. $k=\frac{f'(t)}{f(t)}$, donde k es el coeficiente de la dilatación lineal.

439. $k=S\frac{\varphi'(P)}{\varphi(P)}$. 440. 1) 56; 2) 19; 3) 7,625; 4) 1,261.

441. 1) 4,52; 2) —0,249; 3) 0,245. 442. a) 6,5; b) 6,1; c) 6,01; d) 6,001.

443. $f'(5)=10$; $f'(-2)=-4$; $f'\left(-\frac{3}{2}\right)=-3$. 444. 3; 0; 6; $\frac{1}{3}$.

445. $x_1=0$, $x_2=2$. 446. Para la función $f(x)=x^3$ no es válida. 447. 1.
448. 0,4343. 449. 2,303.
454. 1) 0; 2) 6; 3) —4; 4) $k_1=2$, $k_2=4$.
455. (1, 1); (—1, —1). 456. 1) (0, 0); 2) (1/2, 1/4). 457. No puede.

458. $\alpha_1=\operatorname{arctg}\frac{1}{7}$, $\alpha_2=\operatorname{arctg}\frac{1}{13}$. 459. $\alpha_1=\frac{\pi}{2}$, $\alpha_2=\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$.

460. arctg 3. 461. $y=12x-16$; $x+12y-98=0$; la subtangente es igual a $\frac{2}{3}$, la subnormal es igual a 96.

462. Para $x=0$ y para $x=2/3$.