

# Límites y Continuidad

Prof. Derwis Rivas Olivo

En cada caso determine el valor de  $a$  que hace posible que el límite exista y determine el valor de cada límite.

$$1. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{ax^3 - 5x - 7a}{x^3 + 5x^2 - 15x + 2}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 3/2} \frac{8ax^3 + 16x^2 - 9a}{4x^2 - 8x + 3}$$

Calcula los siguientes límites, en caso que exista.

$$1) \lim_{x \rightarrow a} \frac{3x^3 + 2x^2 - 3a^2x - 2a^2}{3x^2 - 3ax + 2x - 2a}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 4}{-2x^3 - 8x^2 - 8x}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{2x - \frac{x^2 + 2}{x - \frac{x - 2}{x + 1}}}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 2^+} \log_{1/2} \left( \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 4} \right)$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln(x^2 + x) - \ln(2x^2 + 3x)]$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 3} e^{\frac{(x-3)^2 + x - 3}{x^2 - 9}}$$

$$13) \lim_{x \rightarrow a} \frac{ax^2 - a^2x + 5ax - 5a^2}{x^4 - 25x^2 - a^2x^2 + 25a^2}$$

$$15) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{3x - 1}{2x + 3} \right)^2$$

$$17) \lim_{x \rightarrow 2} \left( \sqrt[3]{\frac{x+2}{x-1}} \right)^{\frac{x+1}{2x}}$$

$$19) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x - 2}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^4 - 21x^2 + 27}{2x^3 + 3x^2 - 9x}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{\frac{x}{1-x} - \frac{1-x}{x}}{\frac{x}{1-x} - \frac{1-x}{x}}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt[3]{\frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1}}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 3^+} \left( \frac{x^3 - 3x^2 + x - 3}{x^2 - x - 6} \right)^{\frac{3-x}{x^2 - 6x + 9}}$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 2^+} \arctan \left( \frac{\sqrt{x-2}}{x-2} \right)$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27a^3}{x^2 - 9a^2}$$

$$14) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + \sqrt{3x+4}}{\sqrt{16-x} \cdot \frac{2x-2}{x}}$$

$$16) \lim_{x \rightarrow 1} 4^{\frac{x}{x-1}}$$

$$18) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3 - x^2}{4x^2 - 3x}$$

$$20) \lim_{x \rightarrow z} \frac{z^3 - yz^2 - zx^2 + yx^2}{xy + xz - zy - z^2}$$

$$21) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 7x^2 + 16x + 12}{x^3 + x^2 - 8x - 12}$$

$$23) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1} - 2}$$

$$25) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{x^2 + 2x + 1}}{\sqrt{9x + 9} - 3}$$

$$27) \lim_{x \rightarrow -b} \frac{x^3 + 2bx^2 + 2b^2x + b^3}{x^3 + b^3}$$

$$29) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}{x^3 - 3x - 2}$$

$$31) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a}$$

$$33) \lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49}$$

$$35) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3x+1}}{\sqrt{x-1}}$$

$$37) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1} - 3}$$

$$39) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x\sqrt{x} - a\sqrt{a}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$$

$$41) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + 5x^2 - x + 3}{3x^3 - 4x^2 + 6x - 1}$$

$$43) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x+1)^3(x-4)^2}{x(2x-1)^4}$$

$$45) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1)^2(x+2)^2}{(2x+5)^3}$$

$$47) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{x}{1-x}}{\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1}}$$

$$49) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{2x^3 - 2}}{x^2 + 1}$$

$$51) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt[3]{x^3 - 2x}}$$

$$53) \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_2 \left( \frac{2x^3 - x}{4x^3 - 1} \right)$$

$$55) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[4]{\left( \frac{4x^2 + 9x + 3}{2x^2 + 1} \right)^3}$$

$$57) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{4x^2 - 2x + 3}{x^2 + 1} \right)^{\frac{3x+2}{x^2}}$$

$$59) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x}} \right)^{\frac{2x-1}{x+2}}$$

$$61) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x^2 - 7}{x+1} - \frac{6x^2 + 4}{3x-5} \right)$$

$$63) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{4x^2 + 3x + 1} - 2x \right)$$

$$22) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^3} + 3\sqrt{x} - 3x - 1}{x^2 - 2x + 1}$$

$$24) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{2 + \sqrt[3]{x^2 - 9}}$$

$$26) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8x-8} + 2}{x^2 - x}$$

$$28) \lim_{x \rightarrow -a} \frac{x^2 + ab + ax + bx}{x^2 + ax - ab - bx}$$

$$30) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 + ax^2 + ax - 2a^2x - a^2}{x^3 - a^3}$$

$$32) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-x}}{x}$$

$$34) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - \sqrt{a^3x}}{\sqrt{ax} - a}$$

$$36) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - \sqrt{8x}}{\sqrt{2x} - 2}$$

$$38) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x^2+x+1}}{x}$$

$$40) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4 - 2x + 5}{x^2 + 2x - 1}$$

$$42) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+3}{x^2+5}$$

$$44) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3x+2)^2(2x+3)}{(2x-5)^3}$$

$$46) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(x+4)^5}{(4x-1)^4}$$

$$48) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 2x}{\sqrt{x+2}}$$

$$50) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 - 2x}}{x - \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$52) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x}{\sqrt{x+1}}$$

$$54) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[5]{\frac{2x^3 - x + 1}{x^3 + 1}}$$

$$56) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{5x^4 - 2}{5x^4 + 6} \right)^{\frac{3x^2 + 1}{x^2 + 2}}$$

$$58) \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_3 \sqrt[3]{\frac{3x^2 + 2x}{x^2 - 1}}$$

$$60) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\sqrt{2x^3 - 3x^2 + 4}}{4x^3 + 1} \right)^{\frac{x+2}{x^2}}$$

$$62) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{1+x} - \sqrt{x})$$

$$64) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 3x - \sqrt{x^2 + x - 1} \right)$$

$$65) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{2x^2 + 2x - 3} - \sqrt{2x^2 - 3x + 2} \right)$$

$$66) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{x^2 + ax} - x \right)$$

$$67) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{(x+a)(x+b)} - x \right)$$

$$68) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x - \sqrt{x}} \right)$$

$$68) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{x(x+a)} - \sqrt{x} \right)$$

$$69) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x+1}{2x+1} \right)^{x^2+3}$$

$$70) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x^2 + 3x - 1}{x^2 + 1} \right)^{4-x^2}$$

$$71) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{5x^2 - 1}{2x^2 + 3} \right)^{x+3}$$

$$72) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{5x-1}{2x-1} \right)^{\frac{2x}{3x-1}}$$

$$73) \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1-2x-x^2}$$

$$74) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \arctan \left( \frac{x^2 + 3}{4x - 1} \right) \right]^{\frac{2x+3}{x}}$$

$$75) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \arctan \left( \frac{1-x^2}{2x+5} \right) \right]^{\frac{x + \sqrt{x^2 + 8}}{\sqrt{4x^2 - 5}}}$$

Calcula el límite  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$  en cada una de las siguientes funciones

$$1) f(x) = \sqrt{x+1}$$

$$2) f(x) = x^2 - 3x + 5$$

$$3) f(x) = \frac{2}{x+1}$$

$$4) f(x) = \frac{x+4}{x}$$

$$5) f(x) = \frac{3}{x^2}$$

$$6) f(x) = 5x^2$$

$$7) f(x) = \sqrt[3]{4x}$$

$$8) f(x) = \sqrt[3]{x+2}$$

Estudie la continuidad de las siguientes funciones. Si la función es discontinua en algún punto verifique si es posible redefinir la función en dicho punto para que sea continua.

$$1) f(x) = \frac{3x^2 + 5x - 1}{x^2 + 1}$$

$$2) g(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 5x + 3}{x + 1}$$

$$3) h(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1}$$

$$4) i(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

$$5) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 25}{x - 5} & \text{si } x \neq 5 \\ x^2 + 1 & \text{si } x = 5 \end{cases}$$

$$6) h(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$7) g(x) = \begin{cases} 2^{x+1} & \text{si } x \leq 0 \\ 2 - x^2 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

En cada una de las siguientes funciones

a) Hacer un bosquejo de su gráfica.

b) Hacer el estudio de continuidad. En los puntos donde la función es discontinua clasificar la discontinuidad y determinar si existe continuidad a derecha o continuidad a izquierda. De ser posible, redefina la función en los puntos donde se pueda evitar la discontinuidad.

c) Calcule los límites que se indican en cada caso.

$$1. f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x+1)^2} & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt{4-x^2} & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ -2^{x+2} & \text{si } x > 2 \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow -1} f(x); \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x); \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

$$2. f(x) = \begin{cases} \arctan(x + \pi/2) & \text{si } x \leq -\pi/2 \\ \text{sen}(x) & \text{si } -\pi/2 < x < \pi/2 \\ x - \pi/2 & \text{si } \pi/2 \leq x \leq \pi \\ 2\pi - x & \text{si } \pi < x \leq 2\pi \\ \log_{1/2}(x - 2\pi) & \text{si } x > 2\pi \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2\pi} f(x); \quad \lim_{x \rightarrow 3\pi/2} f(x); \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

$$3. f(x) = \begin{cases} (x + 3)^2 & \text{si } x < -2 \\ -2 & \text{si } x = -2 \\ -x - 1 & \text{si } -2 < x < 0 \\ \frac{1}{x - 1} & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ -x^2 + 4x - 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x); \quad \lim_{x \rightarrow -4} f(x); \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

$$4. f(x) = \begin{cases} \frac{x - 4}{x - 5} & \text{si } x < -5 \\ x & \text{si } x = -5 \\ \log_2(2x + 10) & \text{si } -5 < x \leq -3 \\ -\sqrt{x + 3} & \text{si } -3 < x < -1 \\ 2\sqrt{1 - x^2} + 1 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ e^{1-x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x); \quad \lim_{x \rightarrow -4} f(x); \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x); \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

Determine el valor de  $a$  que hace posible que la función sea continua en el punto  $x = -1$ .

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 5x - 2a & \text{si } x \leq -1 \\ 4x + 3 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

Determine los valores de  $m$  y  $n$  de modo que la función sea continua en los puntos  $x = -1$  y  $x = 2$ .

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x \leq -1 \\ 3x^3 + mx^2 - nx + 48 & \text{si } -1 < x < 2 \\ x^2 + 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$