Capítulo VIII

Aplicaciones de la integral

§ 1. Algunos problemas de geometría y de estática

Area de la figura

2455. Calcular el área de la figura limitada por las líneas cuyas ecuaciones son $y^2 = 2x + 1$ y $x - y - 1 = 0$.

2456. Hallar el área de la figura comprendida entre la parábola $y = -x^2 + 4x - 3$ y las tangentes a ésta en los puntos $(0; -3)$ y $(3; 0)$.

2457. Calcular el área de la figura limitada por la parábola $y^2 = 2px$ y la normal a ésta inclinada hacia el eje de abscisas formándose entre ellos el ángulo de 135°.

2458. Calcular el área de la figura limitada por las parábolas $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$.

2459. Calcular el área de la figura limitada por las parábolas $y^2 + 8x = 16$ y $y^2 - 24x = 48$.

2460. Calcular el área de la figura limitada por las parábolas $y = x^2$ e $y = x^3/3$.

2461. La circunferencia $x^2 + y^2 = 8$ está dividida por la parábola $y = x^2/2$ en dos partes. Hallar las áreas de las dos figuras.

2462. Hallar las áreas de las figuras en las cuales la parábola $y^2 = 6x$ divide la circunferencia $x^2 + y^2 = 16$.

2463. De un círculo de radio a está cortada una elipse cuyo mayor eje coincide con uno de los diámetros del círculo y el menor es igual a $2b$. Demostrar que el área de la parte restante es igual al área de la elipse cuyos semiejes son a y $a - b$.

2464. Hallar el área de la figura limitada por el arco de una hipérbola y su cuerda trazada desde el foco perpendicularmente al eje real.

2465. La circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ está dividida por la hipérbola $x^2 - 2y^2 = a^2/4$ en tres partes. Calcular sus áreas.

2466. Calcular las áreas de las figuras curvilíneas formadas por la intersección de la elipse $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ y la hipérbola $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$.

2467. Calcular el área de la figura comprendida entre la línea $y = \frac{1}{1+x^2}$ y la parábola $y = \frac{x^2}{2}$.

2468. Calcular el área de la figura comprendida entre la línea $y = x(x-1)^2$ y el eje de abscisas.

2469. Calcular el área de la figura limitada por el eje de ordenadas y la línea $x = y^2(y-1)$.

2470. Hallar el área de una parte de la figura limitada por las líneas $y^m = x^n$ e $y^n = x^m$, donde m y n son enteros positivos. La parte buscada se halla en el primer cuadrante. Analizar la cuestión sobre el área total de la figura según los números m y n sean pares o impares.

2471. a) Calcular el área del trapecio mixtilíneo limitado por el eje de abscisas y la línea $y = x - x^2\sqrt{x}$.

b) Calcular el área de la figura limitada por dos ramas de la línea $(y-x)^2 = x^3$ y por la recta $x = 4$.

2472. Calcular el área de la figura limitada por la línea $(y - x - 2)^2 = 9x$ y los ejes de coordenadas.

2473. Hallar el área del lazo de la línea $y^2 = x(x-1)^2$.

2474. Hallar el área de la figura limitada por la línea cerrada $y^2 = (1-x^2)^3$.

2475. Hallar el área de la figura limitada por la línea cerrada $y^2 = x^2 - x^4$.

2476. Hallar el área de la figura limitada por la línea cerrada $x^4 - ax^3 + a^2y^2 = 0$.

2477. Hallar el área de la figura limitada por la línea $x^2y^2 = 4(x-1)$ y la recta que pasa por sus puntos de inflexión.

2478. Calcular el área de la figura limitada por las líneas $y = e^x$, $y = e^{-x}$ y la recta $x = 1$.

2479. Calcular el área del trapecio mixtilíneo limitado por la línea $y = (x^2 + 2x)e^{-x}$ y el eje de abscisas.

2480. Calcular el área del trapecio mixtilíneo limitado por la línea $y = e^{-x}(x^2 + 3x + 1) + e^2$, por el eje Ox y por dos rectas paralelas al eje Oy trazadas de manera que pasan por los puntos extremos de la función y.

2481. Hallar el área de la figura limitada por las líneas $y = 2x^2e^x$ e $y = -x^3e^x$.

2482. a) Calcular el área del trapecio mixtilíneo de base $[a, b]$, limitado por la línea $y = \ln x$.

b) Calcular el área de la figura limitada por la línea $y = \ln x$, por el eje de ordenadas y las rectas $y = \ln a$, $y = \ln b$.

2483. Calcular el área de la figura limitada por las líneas $y = \ln x$ e $y = \ln^2 x$.

2484. Calcular el área de la figura limitada por las líneas

$$y = \frac{\ln x}{4x}, \qquad y = x \ln x.$$

2485. Calcular el área de uno de los triángulos curvilíneos limitados por el eje de abscisas y las líneas $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \cos x$.

2486. Calcular el área del triángulo curvilíneo limitado por el eje de ordenadas y las líneas $y = \operatorname{tg} x$ e $y = \frac{2}{3} \cos x$.

2487. Hallar el área de la figura limitada por la línea $y = \operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x$ y por el segmento del eje de abscisas que une dos puntos sucesivos de la intersección de la línea citada con el eje de abscisas.

2488. Calcular el área de la figura limitada por el eje de abscisas y las líneas $y = \operatorname{arcsen} x$ e $y = \arccos x$.

2489. Hallar el área de la figura limitada por la línea cerrada $(y - \operatorname{arcsen} x)^2 = x - x^2$.

2490. Hallar el área de la figura limitada por un arco de la cicloide $x = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a(1 - \cos t)$ y el eje de abscisas.

2491. Calcular el área de la figura limitada por la astroide $x = a \cos^3 t$, $y = a \operatorname{sen}^3 t$.

2492. Hallar el área de la figura limitada por la cardioide $x = 2a \cos t - a \cos 2t$, $y = 2a \operatorname{sen} t - a \operatorname{sen} 2t$.

2493. Hallar el área de la figura limitada por: 1) la epicicloide

$$x = (R+r) \cos t - r \cos \frac{R+r}{r} t, \quad y = (R+r) \operatorname{sen} t - r \operatorname{sen} \frac{R+r}{r} t;$$

2) la hipocicloide

$$x = (R-r) \cos t + r \cos \frac{R-r}{r} t, \quad y = (R-r) \operatorname{sen} t - r \operatorname{sen} \frac{R-r}{r} t$$

siendo $R = nr$ (n es un entero). Aquí R es el radio de la circunferencia inmóvil y r es el de la otra móvil; el centro de la circunferencia inmóvil coincide con el origen de coordenadas; t es el ángulo de rotación del radio trazado desde el centro de la circunferencia inmóvil al punto de contacto.

2494. Hallar el área del lazo de la línea:

1) $x = 3t^2$; $y = 3t - t^3$; 2) $x = t^2 - 1$, $y = t^3 - t$.

2495. a) Calcular el área que describe el radio polar de la espiral de Arquímedes $\rho = a\varphi$ dando una revolución, si $\varphi = 0$ corresponde al comienzo del movimiento.

b) Calcular el área de la figura limitada por la segunda y la tercera espira de la espiral y por un segmento del eje polar.

2496. Hallar el área de la figura limitada por la línea $\rho = a \operatorname{sen} 2\varphi$ (rosa de dos pétalos).

2497. Hallar el área de la figura limitada por la línea $\rho = a \cos 5\varphi$.

2498. Hallar el área de la figura limitada por el caracol de Pascal $\rho = 2a (2 + \cos \varphi)$.

2499. Hallar el área de la figura limitada por la línea $\rho = a \operatorname{tg} \varphi$ $(a > 0)$ y la recta $\varphi = \pi/4$.

2500. Hallar el área de la parte común de las figuras limitadas por las líneas $\rho = 3 + \cos 4\varphi$ y $\rho = 2 - \cos 4\varphi$.

2501. Hallar el área de la parte de la figura limitada por la línea $\rho = 2 + \cos 2\varphi$, que se halla fuera de la línea $\rho = 2 + \operatorname{sen} \varphi$.

2502. Hallar el área de la figura limitada por la línea $\rho^2 = a^2 \cos n\varphi$ (n es un entero positivo).

2503. Mostrar que el área de la figura limitada por cualesquiera dos radios polares de la espiral hiperbólica $\rho\varphi = a$ y su arco, es proporcional a la diferencia de estos radios.

2504. Mostrar que el área de la figura limitada por cualesquiera radios polares de la espiral logarítmica $\rho = ae^{m\varphi}$ y su arco, es proporcional a la diferencia de los cuadrados de estos radios.

2505*. Hallar el área de la figura comprendida entre la parte externa e interna de la línea

$$\rho = a \operatorname{sen}^3 \frac{\varphi}{3}.$$

2506. Calcular el área de la figura limitada por la línea

$$\rho = \sqrt{1-t^2}, \quad \varphi = \arcsen t + \sqrt{1-t^2}.$$

En los ejercicios 2507—2511 conviene haber pasado a las coordenadas polares y luego efectuar los cálculos.

2507. Hallar el área de la figura limitada por la lemniscata de Bernoulli $(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2)$.

2508. Hallar el área de la parte de la figura limitada por la lemniscata de Bernoulli (véase el ejercicio anterior) que se halla dentro de la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2/2$.

2509. Hallar el área de la figura limitada por la línea $(x^2 + y^2)^2 - a^2x^2 - b^2y^2 = 0$.

2510. Hallar el área de la figura limitada por la línea

$$(x^2 + y^2)^3 = 4a^2xy (x^2 - y^2).$$

2511. Calcular el área de la figura limitada por la línea $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$.

2512. Calcular el área de la figura comprendida entre la línea $y = \frac{1}{1+x^2}$ y su asíntota.

2513. Hallar el área de la figura comprendida entre la línea $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$ y su asíntota.

2514. Hallar el área de la figura comprendida entre la cisoide $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$ y su asíntota.

2515. Hallar el área de la figura comprendida entre la línea $xy^2 = 8 - 4x$ y su asíntota.

2516*. 1) Calcular el área de la figura limitada por la línea $y = x^2e^{-x^2}$ y su asíntota.

2) Calcular el área de la figura limitada por la línea $y^2 = xe^{-2x}$.

2517. Hallar el área de la figura comprendida entre la tractriz $x = a\left(\cos t + \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2}\right)$, $y = a \operatorname{sen} t$ y el eje de abscisas.

2518. Hallar el área del lazo y la de la figura comprendida entre la línea $\rho = \frac{\cos 2\varphi}{\cos \varphi}$ y su asíntota.

Longitud de la línea *

2519. Calcular la longitud del arco de la catenaria $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ (desde $x_1 = 0$ hasta $x_2 = b$).

2520. Hallar la longitud del arco de la parábola $y^2 = 2px$ desde el vértice hasta el punto $M(x, y)$. (Como la variable independiente ha de ser tomada y.)

2521. Hallar la longitud del arco de la línea $y = \ln x$ (desde $x_1 = \sqrt{3}$ hasta $x_2 = \sqrt{8}$).

2522. Hallar la longitud del arco de la línea $y = \ln(1 - x^2)$ $\left(\text{desde } x_1 = 0 \text{ hasta } x_2 = \frac{1}{2}\right)$.

2523. Hallar la longitud del arco de la línea $y = \ln \frac{e^x+1}{e^x-1}$ (desde $x_1 = a$ hasta $x_2 = b$).

2524. Calcular la longitud del arco de la parábola semicúbica $y^2 = \frac{2}{3}(x-1)^3$ comprendida dentro de la parábola $y^2 = \frac{x}{3}$.

2525. Calcular la longitud del arco de la parábola semicúbica $5y^3 = x^2$ comprendida dentro de la circunferencia $x^2 + y^2 = 6$.

2526. Calcular la longitud del lazo de la línea $9ay^2 = x(x - 3a)^2$.

---

* En los ejercicios en que se calculan las longitudes de los arcos, en caso necesario, los paréntesis llevan indicaciones sobre el intervalo de variación de la variable independiente el cual corresponde al arco rectificable.

2527. Hallar el perímetro de uno de los triángulos curvilíneos limitados por el eje de abscisas y por las líneas $y = \ln \cos x$ e $y = \ln \operatorname{sen} x$.

2528. Hallar la longitud del arco de la línea $x = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}$ comprendido entre su punto más inferior y el vértice (el punto de la línea que tiene la curvatura extrema).

2529. Hallar la longitud de la línea $y = \sqrt{x - x^2} + \operatorname{arcsen} \sqrt{x}$.

2530. Hallar la longitud de la línea $(y - \operatorname{arcsen} x)^2 = 1 - x^2$.

2531. Hallar un punto de la cicloide $x = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a(1 - \cos t)$ el cual divida la longitud de su primer arco en razón de $1:3$.

2532. Sean dados la astroide $x = R \cos^3 t$, $y = R \operatorname{sen}^3 t$ y los puntos en ella $A(R, 0)$, $B(0, R)$. En el arco $\overset{\frown}{AB}$ hallar el punto M tal que la longitud del arco $\overset{\frown}{AM}$ constituya la cuarta parte de la longitud del arco $\overset{\frown}{AB}$.

2533*. Hallar la longitud de la línea $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$.

2534. Hallar la longitud de la línea $x = a \cos^5 t$, $y = a \operatorname{sen}^5 t$.

2535. Hallar la longitud del arco de la tractriz

$$x = a\left(\cos t + \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2}\right), \qquad y = a \operatorname{sen} t$$

desde su punto $(0, a)$ hasta su punto (x, y).

2536. Hallar la longitud del arco de la evolvente de la circunferencia

$$x = R(\cos t + t \operatorname{sen} t), \qquad y = R(\operatorname{sen} t - t \cos t)$$

(desde $t_1 = 0$ hasta $t_2 = \pi$).

2537. Calcular la longitud del arco de la línea

$$x = (t^2 - 2) \operatorname{sen} t + 2t \cos t,$$
$$y = (2 - t^2) \cos t + 2t \operatorname{sen} t$$

(desde $t_1 = 0$, hasta $t_2 = \pi$).

2538. Hallar la longitud del lazo de la línea $x = t^2$, $y = t - \frac{t^3}{3}$.

2539. Dos circunferencias de radios iguales a b, ruedan, sin resbalar, con velocidad angular igual, sobre una circunferencia de radio a, por dentro y por fuera de ésta. En el momento $t = 0$ tocan el punto M de la circunferencia inmóvil con sus puntos M_1 y M_2. Mostrar que la relación de las distancias recorridas por los puntos M_1 y M_2 en cualquier lapso de tiempo, es constante e igual a $\frac{a+b}{a-b}$ (véase el ejercicio 2493).

2540. Demostrar que la longitud del arco de la línea

$$x = f''(t)\cos t + f'(t)\,\mathrm{sen}\,t,$$
$$y = -f''(t)\,\mathrm{sen}\,t + f'(t)\cos t$$

correspondiente al intervalo (t_1, t_2), es igual a $[f(t) + f''(t)]\Big|_{t_1}^{t_2}$.

2541. Aplicar el resultado del ejercicio anterior para calcular la longitud del arco de la línea $x = e^t(\cos t + \mathrm{sen}\,t)$, $y = e^t(\cos t - \mathrm{sen}\,t)$ (desde $t_1 = 0$ hasta $t_2 = t$).

2542. Demostrar que los arcos de las líneas

$$x = f(t) - \varphi'(t), \qquad y = \varphi(t) + f'(t)$$

y

$$x = f'(t)\,\mathrm{sen}\,t - \varphi'(t)\cos t,$$
$$y = f'(t)\cos t + \varphi'(t)\,\mathrm{sen}\,t$$

correspondientes a un mismo intervalo de variación del parámetro t tienen longitudes iguales.

2543. Hallar la longitud del arco de la espiral de Arquímedes $\rho = a\varphi$ desde el principio hasta el final de la primera espira.

2544. Demostrar que el arco de la parábola $y = \frac{1}{2p}x^2$ correspondiente al intervalo $0 \leqslant x \leqslant a$, tiene la misma longitud que el arco de la espiral $\rho = p\varphi$, correspondiente al intervalo $0 \leqslant \rho \leqslant a$.

2545. Calcular la longitud del arco de la espiral hiperbólica $\rho\varphi = 1$ (desde $\varphi_1 = 3/4$ hasta $\varphi_2 = 4/3$).

2546. Hallar la longitud de la cardioide $\rho = a(1 + \cos\varphi)$.

2547. Hallar la longitud de la línea $\rho = a\,\mathrm{sen}^3\frac{\varphi}{3}$ (véase el ejercicio 2505).

2548. Demostrar que la longitud de la línea $\rho = a\,\mathrm{sen}^m\frac{\varphi}{m}$ (m es un entero) es conmensurable con a cuando m es un número par y conmensurable con la longitud de la circunferencia de radio a cuando m es impar.

2549. ¿Para qué valores del exponente k ($k \neq 0$) la longitud de la línea $y = ax^k$ viene expresada en funciones elementales? (Conviene partir del teorema de Chebishev sobre los casos de integrabilidad del binomio diferencial.)

2550. Hallar la longitud de la línea dada por la ecuación

$$y = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{x} \sqrt{\cos x}\,dx.$$

2551. Calcular la longitud del arco de la línea

$$x = \int_1^t \frac{\cos z}{z}\,dz, \qquad y = \int_1^t \frac{\operatorname{sen} z}{z}\,dz$$

desde el origen de coordenadas hasta el punto más próximo que tenga la tangente vertical.

2552. Demostrar que la longitud del arco de la sinusoide $y = \operatorname{sen} x$ correspondiente al período del seno, es igual a la longitud de la elipse cuyos semiejes son iguales a $\sqrt{2}$ y 1.

2553. Mostrar que la longitud del arco de la cicloide «acortada» o «alargada» $x = mt - n \operatorname{sen} t$, $y = m - n \cos t$ (m y n son números positivos) en el intervalo desde $t_1 = 0$ hasta $t_2 = 2\pi$ es igual a la de la elipse cuyos semiejes son $a = m + n$, $b = |m - n|$.

2554*. Demostrar que la longitud de la elipse de semiejes a y b satisface las desigualdades $\pi(a + b) < L < \pi\sqrt{2}\cdot\sqrt{a^2 + b^2}$ (problema de I. Bernoulli).

Volumen del cuerpo

2555. Calcular el volumen del cuerpo limitado por la superficie engendrada por la revolución de la parábola $y^2 = 4x$ alrededor de su eje (paraboloide de revolución) y por el plano perpendicular a su eje que dista una unidad del vértice de la parábola.

2556. Una elipse cuyo eje mayor es de $2a$ y el menor, de $2b$ gira alrededor: 1) del eje mayor; 2) del eje menor. Hallar el volumen de los elipsoides de revolución engendrados. En caso particular calcular el volumen de la esfera.

2557. Un segmento parabólico simétrico cuya base es igual a a y la altura, h, gira alrededor de su base. Calcular el volumen del cuerpo de revolución engendrado («limón» de Cavalieri).

2558. Una figura limitada por la hipérbola $x^2 - y^2 = a^2$ y la recta $x = a + h$ ($h > 0$), gira alrededor del eje de abscisas. Hallar el volumen del cuerpo de revolución.

2559. Un trapecio mixtilíneo limitado por la línea $y = xe^x$ y las rectas $x = 1$, $y = 0$, gira alrededor del eje de abscisas. Hallar el volumen del cuerpo engendrado.

2560. La catenaria $y = \operatorname{ch} x$ gira alrededor del eje de abscisas siendo engendrada una superficie llamada *catenoide*. Hallar el volumen del cuerpo limitado por la catenoide y dos planos que distan a y b unidades desde el origen y que son perpendiculares al eje de abscisas.

2561. Una figura limitada por los arcos de las parábolas $y = x^2$ e $y^2 = x$, gira alrededor del eje de abscisas. Calcular el volumen del cuerpo engendrado.

2562. Hallar el volumen del cuerpo engendrado por la revolución alrededor del eje de abscisas del trapecio que se halla situado encima del eje Ox y que viene limitado por la línea $(x-4)\,y^2 = x\,(x-3)$.

2563. Hallar el volumen del cuerpo engendrado por la revolución alrededor del eje Ox del trapecio mixtilíneo limitado por la línea $y = \operatorname{arcsen} x$ y cuya base es $[0, 1]$.

2564. Calcular el volumen del cuerpo engendrado por la revolución alrededor del eje de ordenadas de la figura limitada por la parábola $y = 2x - x^2$ y el eje de abscisas.

2565. Calcular el volumen del cuerpo engendrado por el trapecio mixtilíneo que gira alrededor del eje de ordenadas y que está limitado por el arco de la sinusoide $y = \operatorname{sen} x$ correspondiente al semiperíodo.

2566. La lemniscata $(x^2 + y^2)^2 = a^2\,(x^2 - y^2)$ gira alrededor del eje de abscisas. Hallar el volumen del cuerpo limitado por la superficie engendrada.

2567. Calcular el volumen del cuerpo engendrado por la figura que gira alrededor del eje de abscisasas y está limitada por la línea: 1) $x^4 + y^4 = a^2x^2$; 2) $x^4 + y^4 = x^3$.

2568. Un arco de la cicloide $x = a\,(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a\,(1 - \cos t)$ gira alrededor de su base. Calcular el volumen del cuerpo limitado por la superficie engendrada.

2569. La figura limitada por un arco de la cicloide (véase el ejercicio anterior) y por la base de ésta, gira alrededor de la recta perpendicular al centro de la base (eje de simetría). Hallar el volumen del cuerpo engendrado.

2570. Hallar el volumen del cuerpo engendrado por la revolución de la astroide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ alrededor de su eje de simetría.

2571. La figura limitada por el arco de la línea $x = \frac{c^2}{a}\cos^3 t$, $y = \frac{c^2}{b}\operatorname{sen}^3 t$ (evoluta de la elipse) situada en el primer cuadrante, y por los ejes de coordenadas, gira alrededor del eje de abscisas. Hallar el volumen del cuerpo engendrado.

2572. Calcular el volumen del cuerpo limitado por la superficie del huso infinito engendrado por la revolución de la línea $y = \frac{1}{1+x^2}$ alrededor de su asíntota.

2573. La línea $y^2 = 2xe^{-2x}$ gira alrededor de su asíntota. Hallar el volumen del cuerpo limitado por la superficie engendrada.

2574*. 1) La figura limitada por la línea $y = e^{-x^2}$ y la asíntota de ésta gira alrededor del eje de ordenadas. Calcular el volumen del cuerpo engendrado.

2) La misma figura gira alrededor del eje de abscisas. Hallar el volumen del cuerpo engendrado.

2575*. Calcular el volumen del cuerpo limitado por la superficie engendrada al girar la línea $y = x^2e^{-x^2}$ alrededor de su asíntota.

2576*. La figura limitada por la línea $y = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ y el eje de abscisas, gira alrededor del eje de abscisas. Calcular el volumen del cuerpo engendrado.

2577*. Hallar el volumen del cuerpo limitado por la superficie engendrada al girar la cisoide $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$ $(a > 0)$ alrededor de su asíntota.

2578. Hallar el volumen del cuerpo limitado por la superficie engendrada al girar la tractriz $x = a\left(\cos t + \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2}\right)$, $y = a \operatorname{sen} t$ alrededor de su asíntota.

2579*. Calcular el volumen del cuerpo limitado por el elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

2580. 1) Calcular el volumen del cuerpo limitado por el paraboloide elíptico $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2}$ y el plano $z = 1$.

2) Hallar el volumen del cuerpo limitado por el hiperboloide de una hoja $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - z^2 = 1$ y por los planos $z = -1$ y $z = 2$.

2581. Calcular los volúmenes de los cuerpos limitados por el paraboloide $z = x^2 + 2y^2$ y el elipsoide $x^2 + 2y^2 + z^2 = 6$.

2582. Hallar los volúmenes de los cuerpos engendrados al cortarse el hiperboloide de dos hojas $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1$ y el elipsoide $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$.

2583. Hallar el volumen del cuerpo limitado por la superficie cónica $(z-2)^2 = \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2}$ y el plano $z = 0$.

2584. Calcular el volumen del cuerpo limitado por el paraboloide $2z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$ y el cono $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = z^2$.

2585*. Hallar el volumen del cuerpo cortado de un cilindro circular por el plano que pasa por el diámetro de la base («segmento cilíndrico», véase la fig. 43). En particular, poner $R = 10$ cm y $H = 6$ cm.

2586. Un cilindro parabólico está cortado por dos planos uno de los cuales es perpendicular a la generatriz. Como resultado se obtiene un cuerpo mostrado en la fig. 44. La base común de los segmentos parabólicos es $a = 10$ cm, la altura del mismo segmento que

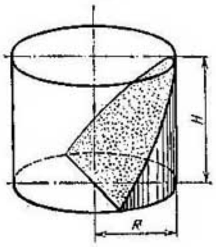

Fig. 43

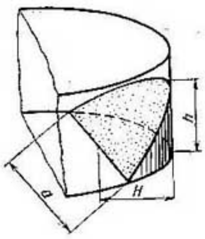

Fig. 44

está en la base, es $H = 8$ cm, la altura del cuerpo h es de 6 cm. Calcular el volumen del cuerpo.

2587. Un cilindro cuya base es una elipse está cortado por un plano inclinado que pasa por el eje menor de la elipse. Calcular el

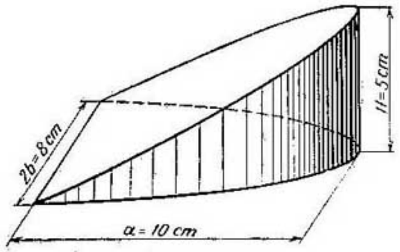

Fig. 45

volumen del cuerpo engendrado. La fig. 45 presenta las dimensiones lineales.

2588*. En todas las cuerdas de un círculo de radio R paralelas a una misma dirección están construidos segmentos parabólicos simétricos de altura constante H. Los planos de éstos son perpendiculares al plano de la circunferencia. Hallar el volumen del cuerpo engendrado de esta manera.

2589. Un cono circular recto de radio R y de altura H está cortado en dos partes por un plano que pasa por el centro de la base paralelamente a la generatriz (véase la fig. 46). Hallar los volúmenes de las dos partes del cono. (Las secciones del cono por los planos paralelos a la generatriz son segmentos parabólicos.)

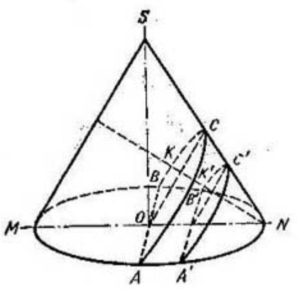

Fig. 46

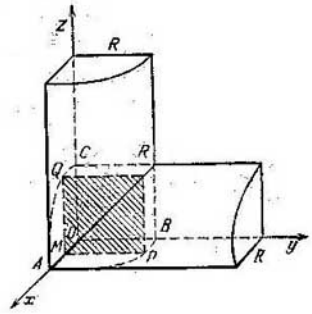

Fig. 47

2590. El centro de un cuadrado de dimensiones variables se desplaza a lo largo del diámetro de un círculo de radio a. Al mismo tiempo el plano en que se halla el cuadrado sigue siendo perpendicular al del círculo y dos vértices opuestos del cuadrado se desplazan sobre la circunferencia. Hallar el volumen del cuerpo engendrado por este cuadrado que se halla en movimiento.

2591. Un círculo de radio variable se desplaza de tal modo que uno de los puntos de su circunferencia sigue en el eje de abscisas, mientras que su centro avanza sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$, y el plano del mismo es perpendicular al eje de abscisas. Hallar el volumen del cuerpo engendrado.

2592. Los ejes de dos cilindros iguales se cortan formando el ángulo recto. Hallar el volumen del cuerpo que forma parte común del

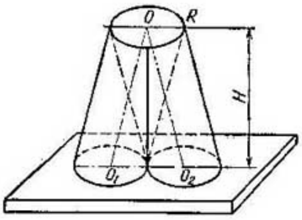

Fig. 48

cilindro (la fig. 47 presenta 1/8 del cuerpo). (Examinar las secciones engendradas por los planos paralelos a los ejes de los dos cilindros).

2593. Dos cilindros inclinados tienen la misma altura H, la base superior común de radio R y sus bases inferiores se tocan (véase la fig. 48). Hallar el volumen de la parte común de los cilindros.

Area de la superficie de revolución

2594. Hallar el área de la superficie engendrada por la revolución de la parábola $y^2 = 4ax$ alrededor del eje de abscisas desde el vértice hasta el punto cuya abscisa es $x = 3a$.

2595. Calcular el área de la superficie engendrada por la revolución de la parábola cúbica $3y - x^3 = 0$ alrededor del eje de abscisas (desde $x_1 = 0$ hasta $x_2 = a$).

2596. Calcular el área de la catenoide, superficie engendrada por la revolución de la catenaria $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ alrededor del eje de abscisas (desde $x_1 = 0$ hasta $x_2 = a$).

2597. Al girar la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ alrededor de su eje mayor es engendrada la superficie llamada elipsoide alargado de revolución, mientras cuando gira alrededor de su eje menor es engendrada la superficie llamada elipsoide acortado de revolución. Hallar las áreas de las superficies de los elipsoides alargado y acortado.

2598. Calcular el área de la superficie fusiforme engendrada por la revolución de un arco de la sinusoide $y = \operatorname{sen} x$ alrededor del eje de abscisas.

2599. El arco del tangensoide $y = \operatorname{tg} x$ desde su punto (0, 0) hasta su punto ($\pi/4$, 1) gira alrededor del eje de abscisas. Calcular el área de la superficie engendrada.

2600. Hallar el área de la superficie engendrada por la revolución alrededor del eje de abscisas del lazo de la línea $9ay^2 = x(3a - x)^2$.

2601. El arco de la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ que se halla en el primer cuadrante gira alrededor de la cuerda que lo subtiende. Calcular el área de la superficie engendrada.

2602. Hallar el área de la superficie engendrada por la revolución alrededor del eje de abscisas del arco de la línea $x = e^t \operatorname{sen} t$, $y = e^t \cos t$ desde $t_1 = 0$ hasta $t_2 = \pi/2$.

2603. Hallar el área de la superficie engendrada por la revolución de la astroide $x = a \cos^3 t$, $y = a \operatorname{sen}^3 t$ alrededor del eje de abscisas.

2604. El arco de la cicloide gira alrededor de su eje de simetría. Hallar el área de la superficie engendrada (véase el ejercicio 2568).

2605. Hallar el área de la superficie engendrada por la revolución de la cardioide $\rho = a(1 + \cos\varphi)$ alrededor de su eje polar.

2606. La circunferencia $\rho = 2r \operatorname{sen}\varphi$ gira alrededor del eje polar. Hallar el área de la superficie engendrada.

2607. La lemniscata $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$ gira alrededor del eje polar. Hallar el área de la superficie engendrada.

2608. El arco infinito de la línea $y = e^{-x}$ correspondiente a los valores positivos de x, gira alrededor del eje de abscisas. Calcular el área de la superficie engendrada.

2609. La tractriz $x = a\left(\cos t + \ln \operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)$, $y = a \operatorname{sen} t$ gira alrededor del eje de abscisas. Hallar el área de la superficie infinita engendrada.

Momentos y centro de gravedad)*

2610. Calcular el momento estático de un rectángulo de base a y la altura h con respecto a su base.

2611. Calcular el momento estático de un triángulo rectángulo isósceles cuyos catetos son iguales a a, con respecto a cada uno de sus lados.

2612. Demostrar que se verifica la siguiente fórmula:

$$\int_a^b (ax+b)\, f(x)\, dx = (a\xi + b)\int_a^b f(x)\, dx,$$

donde ξ es la abscisa del centro de gravedad del trapecio mixtilíneo de base $[a, b]$ limitado por la línea $y = f(x)$.

2613. Hallar el centro de gravedad de un segmento parabólico de base a y la altura h.

2614. Un rectángulo de lados a y b está dividido en dos partes por el arco de una parábola cuyo vértice coincide con uno de los vértices del rectángulo y que pasa por el vértice opuesto de éste (véase la fig. 49). Hallar el centro de gravedad de las dos partes S_1 y S_2 del rectángulo.

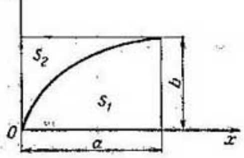

Fig. 49

2615. Hallar las coordenadas del centro de gravedad de la semicircunferencia $y = \sqrt{r^2 - x^2}$.

* En todos los ejercicios de esta parte (2610—2662) la densidad se toma igual a 1.

2616. Hallar las coordenadas del centro de gravedad del semicírculo limitado por el eje de abscisas y la semicircunferencia $y = \sqrt{r^2 - x^2}$.

2617. Hallar el centro de gravedad del arco de la circunferencia de radio R, el cual subtiende el ángulo central α.

2618. Hallar las coordenadas del centro de gravedad de la figura limitada por los ejes de coordenadas y la parábola $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$.

2619. Hallar las coordenadas del centro de gravedad de la figura limitada por los ejes de coordenadas y el arco de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ que se halla en el primer cuadrante.

2620. Hallar el momento estático del arco de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ el cual se halla en el primer cuadrante, con respecto al eje de abscisas.

2621. Hallar las coordenadas del centro de gravedad de la figura limitada por el arco de la sinusoide $y = \operatorname{sen} x$ y el segmento del eje de abscisas (desde $x_1 = 0$ hasta $x_2 = \pi$).

En los ejercicios 2622—2624 hallar el momento estático de la figura limitada por las líneas dadas, con respecto al eje de abscisas.

2622. $y = \frac{2}{1+x^2}$ e $y = x^2$,

2623. $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \frac{1}{2}$ (para un segmento).

2624. $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$.

2625. Hallar las coordenadas del centro de gravedad de la figura limitada por la línea cerrada $y^2 = ax^3 - x^4$.

2626. Hallar las coordenadas del centro de gravedad del arco de la catenaria $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ comprendida entre los puntos cuyas abscisas son $x_1 = -a$ y $x_2 = a$.

2627. Demostrar que el momento estático de un arco cualquiera de la parábola, con respecto al eje de la misma, es proporcional a la diferencia de los radios de curvatura en los puntos extremos del arco. El coeficiente de proporcionalidad es igual a $p/3$, donde p es el parámetro de la parábola.

2628. Hallar las coordenadas del centro de gravedad del primer arco de la cicloide $x = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

2629. Hallar las coordenadas del centro de gravedad de la figura limitada por el primer arco de una cicloide y el eje de abscisas.

2630. Hallar las coordenadas del centro de gravedad del arco de la astroide $x = a \cos^3 t$, $y = a \operatorname{sen}^3 t$ el cual se halla en el primer cuadrante.

2631. Hallar las coordenadas del centro de gravedad de la figura limitada por los ejes de coordenadas y el arco de una astroide el cual se halla en el primer cuadrante.

2632. Demostrar que la asbcisa y la ordenada del centro de gravedad del sector limitado por dos radios polares y por la línea cuya ecuación se da en las cooredenadas polares $\rho = \rho(\varphi)$, vienen expresadas del modo siguiente:

$$x = \frac{2}{3}\,\frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^3 \cos\varphi\, d\varphi}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2\, d\varphi}, \qquad y = \frac{2}{3}\,\frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^3 \operatorname{sen}\varphi\, d\varphi}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2\, d\varphi}.$$

2633. Hallar las coordenadas cartesianas del centro de gravedad del sector limitado por una semiespira de la espiral de Arquímedes $\rho = a\varphi$ (desde $\varphi_1 = 0$ hasta $\varphi_2 = \pi$).

2634. Hallar el centro de gravedad de un sector circular de radio R cuyo ángulo central es igual a 2α.

2635. Hallar las coordenadas cartesianas del centro de gravedad de la figura limitada por la cardioide $\rho = a(1 + \cos\varphi)$.

2636. Hallar las coordenadas cartesianas del centro de gravedad de la figura limitada por el lazo derecho de la lemniscata de Bernoulli $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

2637. Mostrar que las coordenadas cartesianas del centro de gravedad del arco de la línea cuya ecuación es dada en las coordenadas polares $\rho = \rho(\varphi)$, vienen expresadas del modo siguiente:

$$y = \frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho \cos\varphi \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\varphi}{\int_{\varphi_1}^{\varphi 2} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\varphi}, \qquad y = \frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho \operatorname{son}\varphi \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\varphi}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\varphi}.$$

2638. Hallar las coordenadas cartesianas del centro de gravedad del arco de la espiral logarítmica $\rho = ae^{\varphi}$ (desde $\varphi_1 = \pi/2$ hasta $\varphi_2 = \pi$).

2639. Hallar las coordenadas cartesianas del centro de gravedad del arco de la cardioide $\rho = a(1 + \cos\varphi)$ (desde $\varphi_1 = 0$ hasta $\varphi_2 = \pi$).

2640. ¿A qué distancia del centro geométrico se halla el centro de gravedad de la semiesfera de radio R?

2641. Hallar el centro de gravedad de la superficie de la semiesfera.

2642. Sea dado un cono circular recto cuyo radio de base es R y la altura H. Hallar la distancia que media entre la base del cono y el centro de gravedad de su superficie lateral, de su superficie total y de su volumen.

2643. ¿Qué distancia media entre la base y el centro de gravedad de un cuerpo, de altura h, limitado por un paraboloide de revolución y un plano perpendicular a su eje?

2644. Hallar el momento de inercia del segmento $AB = l$ con respecto al eje que se halla en el mismo plano. El extremo A del segmento dista a unidades del eje, el extremo B del segmento dista b unidades del eje.

2645. Hallar el momento de inercia de una circunferencia de radio R con respecto a su diámetro.

2646. Hallar el momento de inercia del arco de la línea $y = e^x$ $\left(0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\right)$, con respecto al eje de abscisas.

2647. Calcular el momento de inercia, con respecto a los dos ejes de las coordenadas, de un arco de la cicloide $x = a\,(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a\,(1 - \cos t)$.

2648. Hallar el momento de inercia de un rectángulo de lados a y b con respecto a su lado a.

2649. Hallar el momento de inercia de un triángulo de base a y la altura h con respecto a:

1) la base;

2) la recta que siendo paralela a la base pasa por el vértice;

3) la recta que siendo paralela a la base, pasa por el centro de gravedad del triángulo.

2650. Hallar el momento de inercia de un semicírculo de radio R, con respecto a su diámetro.

2651. Hallar el momento de inercia de un círculo de radio R, con respecto a su centro.

2652. Hallar el momento de inercia de una elipse de semiejes a y b, con respecto a los dos ejes de la misma.

2653. Hallar el momento de inercia de un cilindro cuyo radio de base es igual a R y la altura H, con respecto a su eje.

2654. Hallar el momento de inercia de un cono cuyo radio de base es igual a R, la altura H, con respecto a su eje.

2655. Hallar el momento de inercia de una esfera de radio R, con respecto a su diámetro.

2656. Una elipse gira alrededor de uno de sus ejes. Hallar el momento de inercia del cuerpo engendrado (elipsoide de revolución), con respecto al eje de su revolución.

2657. Hallar el momento de inercia, con respecto al eje de revolución, de un paraboloide de revolución cuyo radio de base es R y la altura, H.

2658. Calcular el momento de inercia, con respecto al eje Oz, del cuerpo limitado por el hiperboloide de una hoja $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{x}-z^2=1$ y los planos $z=0$ y $z=1$.

2659. El trapecio mixtilíneo limitado por las líneas $y=e^x$, $y=0$, $x=0$ y $x=1$ gira alrededor

1) del eje Ox, 2) del eje Oy.

Calcular el momento de inercia del cuerpo engendrado, con respecto al eje de revolución.

2660. Hallar el momento de inercia de la superficie lateral de un cilindro cuyo radio de base es R y la altura, H, con respecto a su eje.

2661. Hallar el momento de inercia de la superficie lateral de un cono cuyo radio de base es R y la altura, H, con respecto a su eje.

2662. Hallar el momento de inercia de la superficie de una esfera de radio R, con respecto a su diámetro.

Teoremas de Guldin

2663. Un hexágono regular, de lado a, gira alrededor de uno de sus lados. Hallar el volumen del cuerpo engendrado.

2664. Una elipse cuyos ejes son $AA_1=2a$ y $BB_1=2b$ gira alrededor de una recta paralela al eje AA_1, que dista $3b$ del mismo. Hallar el volumen del cuerpo engendrado.

2665. Una astroide gira alrededor de una recta que atraviesa dos picos contiguos. Hallar el volumen y la superficie del cuerpo engendrado (véase el ejercicio 2630).

2666. La figura engendrada por los primeros arcos de las cicloides

$$x=a(t-\operatorname{sen} t),\qquad y=a(1-\cos t)$$

y

$$x=a(t-\operatorname{sen} t),\qquad y=-a(1-\cos t)$$

gira alrededor del eje de ordenadas. Hallar el volumen y la superficie del cuerpo engendrado.

2667. Un cuadrado gira alrededor de una recta que se halla en el mismo plano pasando por uno de sus vértices. ¿Cuál ha de ser la posición de la recta respecto al cuadrado para que el volumen del cuerpo de revolución engendrado sea máximo? La misma pregunta respecto al triángulo.

§ 2. Algunos problemas de física

2668. La velocidad del cuerpo es dada por la fórmula $v=\sqrt{1+t}$ m/s. Hallar la distancia recorrida por el cuerpo en los primeros 10 s al comenzar el movimiento.

2669. Cuando se efectúa el movimiento armónico oscilatorio a lo largo del eje de abscisas, cerca del origen de coordenadas, la velocidad $\frac{dx}{dt}$ viene dada por la fórmula

$$\frac{dx}{dt}=\frac{2\pi}{T}\cos\left(\frac{2\pi t}{T}+\varphi_0\right)$$

donde t es el tiempo; T, período de oscilación; φ_0, fase inicial. Hallar la posición del punto en el momento t_2 si es sabido que en el momento t_1 se halló en el punto $x=x_1$.

La fórmula $f=k\frac{mM}{r^2}$, donde m y M son las masas de los puntos, r, la distancia que media entre éstos, y k, coeficiente de proporcionalidad igual a $6{,}67\cdot10^{-11}\frac{\text{m}^3}{\text{kg}\cdot\text{s}^2}$ (ley de Newton) establece la fuerza f de interacción de las masas de dos puntos. Tomando esto en consideración resolver los problemas de los ejercicios 2670—2678. (La densidad se supone constante.)

2670. La barra AB, de longitud l y de masa M, ejerce la atracción sobre el punto C de masa m el cual se halla en la prolongación de la barra. Entre el punto C y el extremo más próximo B de la barra media la distancia a. Hallar la fuerza de interacción de la barra y el punto. ¿Qué masa puntual debe ser colocada en A para que ésta actúe sobre C con la misma fuerza que la barra AB? Considerar el caso de un punto que se halla en la prolongación de la barra y primero dista r_1 de la barra misma. Después, desplazándose a lo largo de la recta, que constituye la prolongación de la barra, el citado punto va acercándose a la misma, resultando entre ambos la distancia r_2. ¿Qué trabajo realiza la fuerza de atracción en este caso?

2671. ¿Cuál es la fuerza con que el semianillo de radio r y de masa M ejerce su acción sobre el punto material de masa m, que se halla en su centro?

2672. ¿Cuál es la fuerza con que el anillo de alambre, de masa M y de radio R, ejerce su acción sobre el punto material C de masa m que se halla en la recta que pasa por el centro del anillo perpendicular a su plano? La distancia entre el citado punto y el centro del anillo es igual a a. ¿Qué trabajo realizaría la fuerza de atracción al desplazarse el punto desde el infinito hasta el centro del anillo?

2673. Aplicando el resultado del ejercicio anterior calcular la fuerza con que un disco plano, de radio R y de masa M, ejerce su acción sobre el punto material de masa m que se halla en su eje, distando a del centro.

2674. Aplicando el resultado del ejercicio anterior calcular la fuerza con que un plano infinito en el cual la masa, de densidad superficial σ, está distribuida uniformemente, ejerce su acción sobre el punto material de masa m. La distancia entre el punto y el plano es a.

2675. Existe un cono recto circular truncado cuyos radios de base son R y r, la altura, h, la densidad, γ. En su vértice está colocado un punto material de masa m. ¿Cuál es la fuerza de la acción que es ejercida por el cono sobre dicho punto?

2676. ¿Cuál es la atracción que ejerce la línea quebrada material $y = |x| + 1$ sobre el punto material, de masa m, que se halla en el origen de coordenadas? (La densidad lineal es igual a γ.)

2677. Demostrar que la línea material quebrada $y = a|x| + 1$ $(a \geqslant 0)$ ejerce la atracción sobre un punto material que se halla en el origen de coordenadas. Dicha atracción no depende de a, es decir, de la abertura del ángulo entre los lados de la línea quebrada.

2678*. Dos barras iguales, siendo cada una de longitud l y de masa M, pertenecen a una misma recta, midiando entre ellas la distancia l. Calcular su atracción mutua.

2679. Bajo la acción de la gravedad una gota de masa inicial M efectúa la caída. Al mismo tiempo va evaporándose uniformemente perdiendo, por segundo, una masa igual a m. ¿Cuál es el trabajo realizado por la gravedad desde que comenzó la caída hasta que la gota quedó completamente evaporada? (Se prescinde de la resistencia del aire.)

2680. ¿Cuál es el trabajo que se debe realizar para amontonar la arena en forma de cono truncado, de altura H, cuyos radios de base sean R y r $(r < R)$? El peso específico es igual a d (la arena se hace desplazar levantándola del suelo, en el que se apoya la base mayor del cono).

2681. Las dimensiones de la pirámide de Cheops son aproximadamente las siguientes: la altura es de 140 m, la arista de la base (del cuadrado), 200 m. El peso específico de la piedra empleada en la construcción es igual aproximadamente a 2,5 gf/cm³. Calcular el trabajo realizado durante la construcción para superar la gravedad.

2682. Calcular el trabajo que ha de ser realizado para sacar el agua de un recipiente cilíndrico, de altura $H = 5$ m cuya base es un círculo de radio $R = 3$m.

2683. Calcular el trabajo que ha de ser realizado para sacar un líquido, de peso específico d, de un recipiente. Este representa, por su forma, un cono de vértice invertido, cuya altura es H y el radio de la base, R. ¿De qué manera cambia el resultado si el cono tiene su vértice en posición normal?

2684. Calcular el trabajo que ha de ser realizado para sacar el agua de un recipiente semiesférico de radio $R = 0{,}6$ m.

2685. La caldera tiene la forma de paraboloide de revolución (véase la fig. 50). El radio de la base es $R = 2$ m, la profundidad de

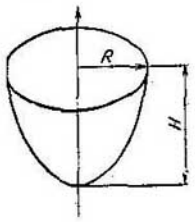

Fig. 50

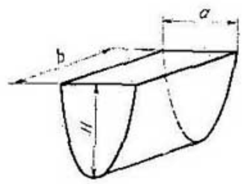

Fig. 51

la caldera, $H = 4$ m. La llena un líquido cuyo peso específico es $d = 0,8$ gf/cm³. Calcular el trabajo que ha de ser realizado para sacar el líquido.

2686. Hallar el trabajo que ha de ser realizado para sacar el agua de una cisterna que tiene las siguientes dimensiones (véase la fig. 51): $a = 0,75$ m, $b = 1,2$ m, $H = 1$ m. La superficie lateral de la cisterna representa un cilindro parabólico.

La energía cinética del cuerpo que gira alrededor de un eje inmóvil, es igual a $\frac{1}{2} J\omega^2$, donde ω es la velocidad angular, J es el momento de inercia respecto al eje de revolución. Resolver los problemas de los ejercicios 2687—2692, tomando en consideración lo sobredicho.

2687. La barra AB (véase la fig. 52) gira en el plano horizontal alrededor del eje OO' con la velocidad angular $\omega = 10\pi s^{-1}$. La sec-

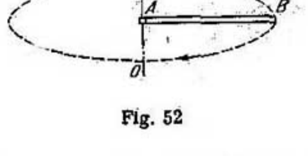

Fig. 52

ción transversal de la barra es $S = 4$ cm²; la longitud, $l = 20$ cm; la densidad del material de la barra, $\gamma = 7,8$ g/cm³. Hallar la energía cinética de la barra.

2688. Una lámina rectangular cuyos lados miden $a = 50$ cm y $b = 40$ cm, y el grosor es $d = 0,3$ cm, gira alrededor del lado a teniendo la velocidad angular ω constante e igual a $3\pi s^{-1}$. Hallar la energía cinética de la lámina. La densidad del material de la lámina $\gamma = 8$ g/cm^3.

2689. Una lámina triangular cuya base es $a = 40$ cm y la altura, $h = 30$ cm, gira alrededor de su base teniendo la velocidad angular ω constante e igual a $\omega = 5\pi$ s^{-1}. Hallar la energía cinética de la lámina tomando en consideración que su grosor $d = 0,2$ cm y la densidad del material de la misma $\gamma = 2,2$ g/cm^3.

2690. Una lámina en forma del segmento parabólico (véase la fig. 53) gira alrededor del eje de la parábola teniendo la velocidad angular constante e igual a $\omega = 4\pi$ s^{-1}. La base del segmento es $a = 20$ cm; la altura, $h = 30$ cm; el grosor de la lámina, $d = 0,3$ cm, la densidad del material $\gamma = 7,8$ g/cm^3. Hallar la energía cinética de la lámina.

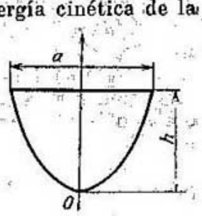

Fig. 53

2691. Un cilindro circular cuyo radio de base es R y la altura H, gira alrededor de su propio eje teniendo la velocidad angular constante e igual a ω. La densidad del material de la lámina es γ. Hallar la energía cinética del cilindro.

2692. Cierto alambre fino, de masa M, ha sido combado adoptando la forma de semicircunferencia de radio R. Va girando alrededor del eje que pasa por los extremos de la semicircunferencia dando n vueltas por minuto. Calcular su energía cinética.

Calcular la energía cinética para el caso en que el eje de revolución es la tangente en el punto medio de la semicircunferencia.

2693. Una lámina en forma de triángulo está sumergida, en posición vertical, en el agua de modo que su base se halla sobre la superficie del agua. La base de la lámina es a, la altura, h.

a) Calcular la fuerza de la presión que ejerce el agua sobre cada uno de los lados de la lámina.

b) ¿En cuánto aumentará la presión si invertimos la lámina de modo que su vértice quede en la superficie y la base sea paralela a la superficie del agua?

2694. Una lámina cuadrada está sumergida, en posición vertical, en el agua de modo que uno de los vértices del cuadrado se halla sobre la superficie del agua, estando en contacto con ella, y una de las diagonales es paralela a la superficie. El lado del cuadrado es igual a a. ¿Cuál es la fuerza de la presión que ejerce el agua sobre cada uno de los lados de la lámina?

2695. Calcular la fuerza de la presión que ejerce el agua sobre la presa que tiene la forma de un trapecio isósceles cuya base superior es $a = 6{,}4$ m; la inferior, $b = 4{,}2$ m, y la altura, $H = 3$ m.

2696. La mitad de una lámina en forma de elipse está sumergida en el líquido, en posición vertical, de modo que uno de sus ejes (cuya longitud es igual a $2b$) se halla sobre la superficie, estando en contacto con ella. ¿Cuál es la fuerza de la presión que ejerce el líquido sobre cada uno de los lados de la lámina? La longitud de la parte sumergida del semieje de la elipse es igual a a; el peso específico del líquido, d.

2697. Una lámina rectangular cuyos lados son a y b ($a > b$) está sumergida en el líquido formándose entre ésta y la superficie del líquido el ángulo α. El lado mayor es paralelo a la superficie y se halla a la profundidad h. Calcular la presión que ejerce el líquido sobre cada uno de los lados de la lámina teniendo en cuenta que el peso específico del líquido es d.

2698. El agua y el aceite (en proporciones iguales) llenan un recipiente rectangular, siendo el peso del aceite dos veces menor que el del agua. Mostrar que la presión sobre cada una de las paredes del recipiente disminuye en una quinta parte si se toma sólo el aceite en vez de la mezcla. (Es necesario tener en cuenta que todo el aceite se halla encima.)

Resolviendo los problemas de los ejercicios 2699—2700 hace falta apoyarse en el principio de Arquímedes que dice lo siguiente: la fuerza de empuje ascensional que ejerce su acción sobre el sólido sumergido en un fluido es igual al peso del fluido desalojado.

2699. Un flotador de madera y de forma cilíndrica cuya superficie de base es $S = 4000$ cm^2 y la altura, $H = 50$ cm, flota sobre la superficie del agua. El peso específico de la madera es $d = 0{,}8$ gf/cm^3. a) ¿Qué trabajo ha de ser realizado para sacar el flotador del agua? b) Calcular el trabajo que hace falta realizar para sumergir el flotador de modo que lo cubra el agua?

2700. Una esfera de radio R y de peso específico 1 está sumergida en el agua de modo que está en contacto con la superficie. ¿Qué trabajo ha de ser realizado para sacar la esfera del agua?

Los problemas de los ejercicios 2701—2706 tratan el fenómeno de la salida de fluidos de un orificio pequeño. La velocidad con que el líquido sale del orificio la determina la ley de Torricelli: $v = \sqrt{2gh}$, donde h es la altura de la columna del líquido sobre el orificio y g es la aceleración de la gravedad*).

* La forma en que la ley de Torricelli se da aquí, es aplicable sólo al líquido ideal. Es a este líquido ideal al que se dan respuestas a los problemas. (En la práctica hacen uso de la fórmula $v = \mu\sqrt{2gh}$, donde μ es el coeficiente que depende de la viscosidad del líquido y la naturaleza del orificio del que sale el líquido. En el caso más sencillo del agua $\mu = 0{,}6$.)

2701. Un recipiente cilíndrico cuya superficie de la base es de 100 cm, y la altura 30 cm, tiene practicado un orificio. Calcular la superficie de éste si se sabe que el agua que llena el recipiente invierte 2 min en salir de él.

2702. El agua llena un embudo cónico de altura $H = 20$ cm. El radio de la parte superior es $R = 12$ cm. De la parte inferior, que tiene el orificio de radio $r = 0,3$ cm, comienza a salir el agua. a) ¿Cuánto tiempo se invierte para que el nivel del agua baje en 5 cm? b) ¿Cuándo quedará vacío el embudo?

2703. La caldera ofrece la forma de semiesfera de radio $R = 43$ cm. En su fondo se ha producido una abertura de superficie $S = 0,2$ cm². ¿Cuánto tiempo debe invertir el agua, que llena la caldera, para salir de ésta?

2704. La caldera ofrece la forma de cilindro elíptico de eje horizontal (véase la fig. 54). Los semiejes de la sección elíptica (que es

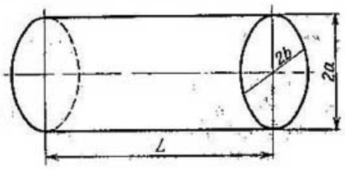

Fig. 54

perpendicular al eje del cilindro) son iguales a b (horizontal) y a (vertical). La generatriz del cilindro es igual a L. El agua llena hasta la mitad la caldera que tiene practicada en su fondo un orificio de superficie S. ¿Cuánto tiempo debe invertir el agua en salir de la caldera a través de este orificio?

2705. Un recipiente prismático, lleno de agua, tiene practicado en su pared vertical una hendidura rectangular vertical cuya altura es igual a h y la anchura, b. Entre el borde superior de la hendidura, paralelo a la superficie del agua, y esta última media la distancia H. ¿Cuánta cantidad del agua sale del recipiente por segundo si el nivel del agua se mantiene a la misma altura? Considerar el caso en que $H = 0$ (problema sobre el desagüe).

2706. Un recipiente lleno de agua hasta los bordes, ofrece la forma de paralelepípedo cuya base tiene el área igual a 100 cm². En su pared vertical hay una hendidura, de altura igual a 20 cm y la anchura igual a 0,1 cm (véase la fig. 55). ¿Cuánto tiempo se invierte para que el nivel del agua en el recipiente disminuya en a) 5 cm, b) 10 cm, c) 19 cm, d) 20 cm? (Aplicar el resultado del ejercicio anterior.)

La ecuación del gas perfecto es la siguiente: $pv = RT$, en la cual p es la presión, v, el volumen, T, la temperatura absoluta y R, la constante del volumen dado del gas. Resolver los problemas de los ejercicios 2707—2709 considerando los gases como perfectos.

2707. Un cilindro cuya base es de área igual a 10 cm², y la altura, igual a 30 cm, contiene el aire atmosférico. ¿Qué trabajo ha de ser realizado para que el émbolo penetre dentro del cilindro 20 cm, o sea,

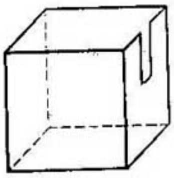

Fig. 55

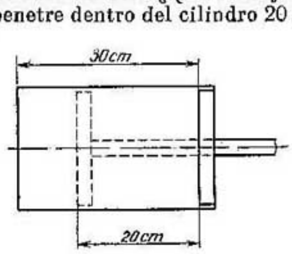

Fig. 56

debe ser introducido en el cilindro de modo que entre el fondo de éste y el émbolo medie 10 cm (véase la fig. 56)? La presión atmosférica es igual a 1,033 kgf/cm². El proceso se efectúa de manera isotérmica, es decir, a temperatura constante. (Para obtener el valor del trabajo en kgm hace falta tomar la presión en kgf/m² y el volumen en m³.)

2708. Un recipiente cilíndrico cuya sección transversal es igual a 100 cm², contiene el aire bajo presión atmosférica. Dentro está colocado un émbolo, mediando entre éste y el fondo del recipiente la distancia inicial igual a 0,1 m. El cilindro se encuentra en el vacío debido a lo cual se produce la expansión del aire contenido dentro, el cual desaloja el émbolo. 1) Calcular el trabajo realizado por el aire dentro del cilindro cuando hace ascender el émbolo a la altura de a) 0,2 m, b) 0,5 m, c) 1 m. 2) ¿Puede el trabajo aumentar sin límites al dilatarse el gas infinitamente? (Igual que en el ejercicio anterior, el proceso se efectúa de manera isotérmica.)

2709. El recipiente cilíndrico cuyo volumen $v_0 = 0,1$ m³ contiene el aire atmosférico el cual es sometido a la compresión al introducir, de manera muy rápida, un émbolo dentro (consideramos que el proceso se efectúa sin ser recibida ni cedida ninguna cantidad del calor, o sea, es adiabático). ¿Qué trabajo ha de ser realizado para comprimir el aire contenido en el recipiente reduciéndolo al volumen $v = 0,03$ m³? (La presión atmosférica es igual a 1,033 kgf/cm².) La presión del gas y el volumen que ocupa en el proceso adiabático forman la relación $pv^{\gamma} = p_0v_0^{\gamma}$ (ecuación de Poisson). Para los gases diatómicos (también para el aire) $\gamma \approx 1,40$.

Según la ley de Newton, la velocidad con que un cuerpo se enfría es proporcional a la diferencia entre la temperatura a que se halla y la temperatura del medio que lo rodea. Partiendo de este principio, resolver los problemas de los ejercicios 2710—2711.

2710. Un cuerpo cuya temperatura es igual a 25°, está sumergido en el termostato (su temperatura se mantiene igual a 0°). ¿Cuánto tiempo debe ser invertido para que el cuerpo se enfríe hasta 10° si en 20 min se enfría hasta 20°?

2711. Un cuerpo cuya temperatura es igual a 30°, se enfría hasta 22,5° al permanecer 30 min en el termostato que se halla a la temperatura 0°. ¿Cuál sería la temperatura del cuerpo al cabo de 3 horas al comenzar el experimento?

Según la ley de Coulomb, la fuerza de interacción de dos cargas eléctricas es igual a $\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}$ newtons, donde q_1 y q_2 son los valores de las cargas en culombios, r, la distancia que media entre las cargas, en m, la constante dieléctrica $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}$ F/m $(4\pi\varepsilon_0 = 1{,}11 \times \times 10^{-10})$, ε, la permitividad del medio respecto al vacío (para el aire $\varepsilon \approx 1$). (Sistema racionalizado MKSA.) Partiendo de esta ley, resolver los problemas de los ejercicios 2712—2714.

2712. Una recta infinita está cargada uniformemente de electricidad positiva (la densidad lineal de carga eléctrica es σ). ¿Cuál es la fuerza con que obra dicha recta sobre una carga unitaria que se halla en el punto A mediando entre ambos la distancia a? La permitividad del medio es igual a 1.

2713. Entre dos cargas eléctricas $q_1 = 6{,}67\cdot10^{-9}\cdot$C y $q_2 = = 10\cdot10^{-9}$C media la distancia igual a 10 cm. El aire sirve de medio que las separa. Al principio, las dos cargas han estado fijas, luego, se ha liberado la carga q_2, que comienza a desplazarse, bajo la acción de la repulsión, alejándose de la carga q_1. ¿Qué trabajo es realizado por la repulsión cuando la carga a) se ha alejado mediando entre ambas la distancia igual a 30 cm, b) se aleja al infinito?

2714. Entre dos cargas eléctricas $q_1 = 33{,}3\cdot10^{-9}$ culombios y $q_2 = 40\cdot10^{-9}$ culombios media la distancia igual a 20 cm. ¿Qué distancia mediará entre las cargas si acercamos la segunda hacia la primera realizando el trabajo igual a $18\cdot10^{-5}$ julios? (El medio que las separa es el aire).

2715. La tensión en los bornes del circuito eléctrico es $V = 120$ V. Uniformemente en el circuito se introduce una resistencia a 0,1 ohmio por segundo. Además, el circuito está conectado con la resistencia fija $r = 10$ ohmios. ¿Cuántos culombios de electricidad pasarán por el circuito durante dos minutos?

2716. Al principio, la tensión en los bornes del circuito era igual a 120 V, decreciendo después poco a poco en 0,01 V por segundo. Simultáneamente, en el mismo circuito se introduce una resistencia a 0,1 ohmio por segundo, lo cual representa también una velocidad constante. Además de ello, el circuito tiene la resistencia fija igual a 12 ohmios. ¿Cuántos culombios de electricidad pasarán por el circuito en 3 min?

2717. Al cambiar la temperatura, la resistencia de los conductores de metal varía (a temperaturas ordinarias) según la ley $R = R_0(1 + 0{,}004\vartheta)$, en la cual R_0 es la resistencia a 0° C y ϑ es la temperatura en grados Celsio. (Esta ley es válida para la mayoría de los metales puros.) La resistencia del conductor es igual a 10 ohmios a 0° C, éste se va calentando uniformemente desde $\vartheta_1 = 20°$ hasta $\vartheta_2 = 200°$ durante 10 min. Al mismo tiempo, pasa por el conductor la corriente cuya tensión es igual a 120 V. ¿Cuántos culombios de electricidad pasará por el conductor durante este mismo espacio del tiempo?

2718. La ley de la variación de la tensión de la corriente sinusoidal cuya frecuencia es ω, se expresa con la fórmula siguiente: $E = E_0 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$, en la cual E_0 es la tensión máxima; φ, la fase; t, el tiempo. Hallar el valor medio del cuadrado de la tensión en 1 período. Mostrar que la corriente alterna desprende en 1 período, siendo la resistencia fija, la misma cantidad de calor que la continua cuya tensión es igual a $\sqrt{(E^2)_{\text{med}}}$. (Debido a ello, la expresión $\sqrt{(E^2)_{\text{med}}}$ se la llama la tensión efectiva de la corriente alterna.)

2719. La tensión de la corriente sinusoidal se expresa con la fórmula

$$E = E_0 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T} t\right),$$

y la corriente, con la fórmula

$$I = I_0 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t}{T} - \varphi_0\right)$$

en la cual E_0 e I_0 son constantes (los valores máximos de la tensión y de la corriente); T, el período; φ_0, la así llamada diferencia de fase. Calcular el trabajo realizado por la corriente durante el espacio del tiempo desde $t_1 = 0$ hasta $t_2 = T$ y mostrar que este trabajo alcanza su valor máximo cuando la diferencia de fase φ_0 es igual a cero.

2720. Hallar el tiempo durante el cual el aparato eléctrico calienta 1 kg de agua desde 20 hasta 100° C, si la tensión de la corriente es igual a 120 V, la resistencia de la espiral, 14,4 ohmios, la temperatura del aire en la habitación, 20° C, y si también es sabido que 1 kg de agua se enfría desde 40 hasta 30° C en 10 min. (Según la ley de Joule — Lenz, $Q = I^2Rt$, donde Q es la cantidad de calor en julios, I, la corriente en amperios, R, la resistencia en ohmios, t, el tiempo en segundos; el calor específico del agua es 4190 $\frac{\text{julios}}{\text{kg·grados}}$. Además de ello, aplicar la ley de Newton sobre el enfriamiento, véase el ejercicio 2710.)

2721. El aire que ocupa un recipiente cuya cabida es de 3 l, contiene 20% del oxígeno. El recipiente, que tiene dos tubos, recibe a través de uno de ellos, el oxígeno puro, mientras que a través del otro, sale la misma cantidad del aire. ¿Cuánta cantidad del oxígeno va a contener el recipiente después de que hayan pasado por él 10 l del gas?

2722. El aire contiene a% (= 8%) CO_2. Se le hace pasar por un recipiente cilíndrico que contiene masa absorbente cuya capa fina absorbe la cantidad del gas proporcional a su concentración y su grosor. a) Si el aire que ha atravesado la capa de H cm (= 10 cm) de grosor, contiene b% (= 2%) de CO_2, ¿de qué grosor H_1 debe ser la capa absorbente para que el aire después de atravesar el absorbedor, contenga sólo c% (= 1%) del ácido carbónico? b) ¿Cuánta cantidad (en %) queda en el aire que ha atravesado la capa absorbente si su grosor es igual a 30 cm?

2723. Cuando la luz atraviesa una capa de agua igual a 3 m, se pierde la mitad de su cantidad inicial. ¿Cuánta cantidad de la luz llega a la profundidad de 30 m? La cantidad de la luz que es absorbida al atravesar una capa fina de agua, es proporcional al grosor de la capa y a la cantidad de la luz que incide sobre su superficie.

2724. Si la cantidad inicial del fermento, igual a 1 g, al cabo de una hora llega a ser igual a 1,2 g, ¿a qué será igual al cabo de 5 horas al comenzar la fermentación si se considera que la velocidad del incremento del fermento es proporcional a su cantidad disponible?

2725. ¿Cuál era la cantidad inicial del fermento si al cabo de dos horas de haber comenzado la fermentación la cantidad disponible del fermento era igual a 2 g, mientras que al cabo de tres horas era igual a 3 g? (Véase el ejercicio anterior.)

2726. 2 kg de la sal se echan en 30 l del agua. Al cabo de 5 min 1 kg de la sal queda disuelto. ¿Cuánto tiempo tarda en disolverse el 99% de la cantidad inicial de la sal? (La velocidad de la disolución es proporcional a la cantidad de la sal no disuelta y a la diferencia entre la concentración de la disolución saturada, igual a 1 kg por 3 l, y la concentración de la disolución en el momento dado.)