1374. Demostrar que las funciones

$$f(x) = \sqrt{x^6 + 2x^4 + 7x^2 + 1} \text{ y } \varphi(x) = x^3 + x$$

son equivalentes asintóticamente cuando $x \to \infty$. Valiéndose de esta circunstancia calcular aproximadamente $f(115)$ y $f(120)$. ¿Cuál sería el error si pusiéramos $f(100) = \varphi(100)$?

En los ejercicios 1375—1391 hallar las asíntotas de las líneas dadas.

1375. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$ **1376.** $xy = a.$

1377. $y = \frac{1}{x^2 - 4x + 5}.$ **1378.** $y = c + \frac{a^3}{(x-b)^2}.$

1379. $2y(x+1)^2 = x^3.$ **1380.** $y^3 = a^3 - x^3.$

1381. $y^3 = 6x^2 + x^3.$ **1382.** $y^2(x^2+1) = x^2(x^2-1).$

1383. $xy^2 + x^2y = a^3.$

1384. $y(x^2 - 3bx + 2b^2) = x^3 - 3ax^2 + a^3.$

1385. $(y + x + 1)^2 = x^2 + 1.$ **1386.** $y = x \ln\left(e + \frac{1}{x}\right).$

1387. $y = xe^x.$ **1388.** $y = xe^{\frac{2}{x}} + 1.$

1389. $y = x \operatorname{arcsec} x.$ **1390.** $y = 2x + \operatorname{arctg}\frac{x}{2}.$

1391. $y = \frac{xf(x)+a}{f(x)}$, donde $f(x)$ es un polinomio, $(a \neq 0)$.

1392. Una línea es dada paramétricamente por las ecuaciones $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Demostrar que las asíntotas no paralelas a los ejes de coordenadas pueden existir sólo cuando para los valores de $t = t_0$, existen simultáneamente

$$\lim_{t \to t_0} \varphi(t) = \infty \text{ y } \lim_{t \to t_0} \psi(t) = \infty.$$

Si la ecuación de la asíntota es $y = ax + b$, se tiene

$$a = \lim_{t \to t_0} \frac{\psi(t)}{\varphi(t)}, \quad b = \lim_{t \to t_0} [\psi(t) - a\varphi(t)].$$

¿Cómo se podrían hallar las asíntotas paralelas a los ejes de coordenadas?

1393. Hallar las asíntotas de la línea: $x = \frac{1}{t}$, $y = \frac{t}{t+1}$.

1394. Hallar las asíntotas de la línea: $x = \frac{2e^t}{t-1}$, $y = \frac{te^t}{t-1}$.

1395. Hallar las asíntotas de la línea: $x = \frac{2t}{1-t^2}$, $y = \frac{t^2}{1-t^2}$.

1396. Hallar las asíntotas del folio de Descartes: $x=\frac{3at}{1+t^3}$, $y=\frac{3at^2}{1+t^3}$.

1397. Hallar las asíntotas de la línea: $x=\frac{t-8}{t^2-4}$, $y=\frac{3}{t(t^2-4)}$

Análisis general de las funciones y de las líneas

En los ejercicios 1398—1464 efectuar un análisis exhaustivo de las funciones que se indican y trazar sus gráficas.

1398. $y=\frac{x}{1+x^2}$.

1399. $y=\frac{x}{1-x^2}$.

1400. $y=\frac{x}{x^2-1}$.

1401. $y(x-1)(x-2)(x-3)=1$.

1402. $y=\frac{x^2}{x^2-1}$.

1403. $y=(x^2-1)^3$.

1404. $y=32x^2(x^2-1)^3$.

1405. $y=\frac{1}{x}+4x^2$.

1406. $y=x^2+\frac{1}{x^2}$.

1407. $y=\frac{2x-1}{(x-1)^2}$.

1408. $y=\frac{x^3}{3-x^2}$.

1409. $y=\frac{x^3}{2(x+1)^2}$.

1410. $y(x-1)=x^3$.

1411. $y(x^3-1)=x^4$.

1412. $y=\frac{(x-1)^2}{(x+1)^3}$.

1413. $y=\frac{x^3+2x^2+7x-3}{2x^2}$.

1414. $xy=(x^2-1)(x-2)$.

1415. $(y-x)x^4+8=0$.

1416. $y=\frac{x}{e^x}$.

1417. $y=x^2e^{-x}$.

1418. $y=\frac{e^x}{x}$.

1419. $y=x-\ln(x+1)$.

1420. $y=\ln(x^2+1)$.

1421. $y=x^2e^{-x^2}$.

1422. $y=x^3e^{-x}$.

1423. $y=xe^{-\frac{x^2}{2}}$.

1424. $y=\frac{1}{e^x-1}$.

1425. $y=x+\frac{\ln x}{x}$.

1426. $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

1427. $y=x+\operatorname{sen} x$.

1428. $y=x\operatorname{sen} x$.

1429. $y=\ln\cos x$.

1430. $y=\cos x-\ln\cos x$.

1431. $y=x-2\operatorname{arctg} x$.

1432. $y=e^{\frac{1}{x^2-4x+3}}$ (sin buscar puntos de inflexión).

1433. $y=e^{\operatorname{sen} x}-\operatorname{sen} x$ (sin buscar puntos de inflexión).

1434. $y=\sqrt[3]{x^2}-x$. **1435.** $y^3=x^2(x^2-4)^3$.

1436. $(3y+x)^3=27x$.

1437. $y=\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{x^2}=1$.

1438. $y=(x-1)^{\frac{2}{3}}(x+1)^3$. **1439.** $y^3=6x^2-x^3$.

1440. $(y-x)^2=x^5$. **1441.** $(y-x^2)^2=x^5$

1442. $y^2=x^3+1$. **1443.** $y^2=x^3-x$.

1444. $y^2=x(x-1)^2$. **1445.** $y^2=x^2(x-1)$.

1446. $y^2=\frac{x^3-2}{3x}$. **1447.** $x^2y+xy^2=2$.

1448. $y^2=x^2\frac{a+x}{a-x}$ (estrofoide) $(a>0)$.

1449. $9y^2=4x^3-x^4$. **1450.** $25y^2=x^2(4-x^2)^3$.

1451. $y^2=x^2-x^4$. **1452.** $x^2y^2=4(x-1)$.

1453. $y^2(2a-x)=x^3$ (cisoide) $(a>0)$.

1454. $x^2y^2=(x-1)(x-2)$.

1455. $x^2y^2=(a+x)^3(a-x)$ (concoide) $(a>0)$.

1456. $16y^2=(x^2-4)^2(1-x^2)$. **1457.** $y^2=(1-x^2)^3$.

1458. $y^2x^4=(x^2-1)^3$. **1459.** $y^2=2exe^{-2x}$.

1460. $y=e^{\frac{1}{x}}-x$. **1461.** $y=e^{\operatorname{tg} x}$.

1462. $f(x)=\frac{\operatorname{sen} x}{x}$, $f(0)=1$

1463. $y=1-xe^{-\frac{1}{|x|}-\frac{1}{x}}$ cuando $x\neq 0$, $y=1$ para $x=0$.

1464. $y=x^2-4|x|+3$.

En los ejercicios 1465—1469 analizar las funciones dadas en forma paramétrica y trazar sus gráficas.

1465. $x=t^3+3t+1$, $y=t^3-3t+1$.

1466. $x=t^3-3\pi$, $y=t^3-6\operatorname{arctg} t$.

1467. $x=\frac{3t}{1+t^3}$, $y=\frac{3t^2}{1+t^3}$.

1468. $x=te^t$, $y=te^{-t}$.

1469. $x=2a\cos t-a\cos 2t$, $y=2a\operatorname{sen} t-a\operatorname{sen} 2t$ (cardioide).

En los ejercicios 1470—1477 analizar las líneas cuyas ecuaciones son dadas en el sistema de coordenadas polares (véase la nota en la pág. 31).

1470. $\rho = a \operatorname{sen} 3\varphi$ (rosa de tres pétalos).

1471. $\rho = a \operatorname{tg} \varphi$. **1472.** $\rho = a(1 + \operatorname{tg} \varphi)$.

1473. $\rho = a(1 + \cos \varphi)$ (cardioide).

1474. $\rho = a(1 + b \cos \varphi)$ $(a > 0,\ b > 1)$.

1475. $\rho = \sqrt{\frac{\pi}{\varphi}}$ (lituo).

1476. $\rho = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\varphi}{\pi}$.

1477. $\rho = \sqrt{1 - t^2}$, $\varphi = \operatorname{arcsen} t + \sqrt{1 - t^2}$.

En los ejercicios 1478—1481 analizar y construir las líneas después de haber reducido sus ecuaciones al sistema de coordenadas polares.

1478. $(x^2 + y^2)^3 = 4a^2x^2y^2$. **1479.** $(x^2 + y^2)\, x = a^2 y$.

1480. $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$.

1481. $(x^2 + y^2)(x^2 - y^2)^2 = 4x^2y^2$.

Resolución de ecuaciones

1482. Comprobar que la ecuación $x^3 - x^2 - 8x + 12 = 0$ tiene sólo una raíz simple $x_1 = -3$ y la otra, doble $x_2 = 2$.

1483. Comprobar que la ecuación $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4 = 0$ tiene dos raíces dobles $x_1 = 1$ y $x_2 = -2$.

1484. Mostrar que la ecuación $x \operatorname{arcsen} x = 0$ tiene sólo una raíz real $x = 0$ siendo ésta doble.

1485. Mostrar que las raíces de la ecuación $x \operatorname{sen} x = 0$ tienen la forma $y = k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, correspondiendo al valor $k = 0$ una raíz doble. ¿Cuál es la multiplicidad de las demás raíces?

1486. Mostrar que la ecuación $x^3 - 3x^2 + 6x - 1 = 0$ tiene sólo una raíz real simple perteneciente al intervalo $(0, 1)$. Hallar esta raíz, con exactitud hasta 0,1, aplicando el método de pruebas.

1487. Mostrar que la ecuación $x^4 + 3x^2 - x - 2 = 0$ tiene dos, y sólo dos, raíces reales simples pertenecientes a los intervalos $(-1, 0)$ y $(0, 1)$, respectivamente. Aplicando el método de pruebas, hallar estas raíces con exactitud hasta 0,1.

1488. Mostrar que la ecuación $f(x) = a \neq 0$, donde $f(x)$ es un polinomio de coeficientes positivos, siendo impares los exponentes de todos sus términos, tiene una, y sólo una, raíz real, que puede ser múltiple. Analizar el caso de $a = 0$. Hallar la raíz de la ecuación $x^3 + 3x - 1 = 0$, con exactitud hasta 0,01 y combinando el método de pruebas con el de cuerdas.