2361. Hallar el área de la figura limitada por la parábola $y = x^3$ y la recta $y = 7(x + 1)$.

2362. Hallar el área de la figura limitada por la parábola $y = 16 - x^2$ y por la parábola semicúbica $y = -\sqrt[3]{x^2}$.

2363. Hallar el área de la figura limitada por las líneas $y = 4 - x^4$ e $y = \sqrt[3]{x}$.

2364. La fig. 41 muestra el diagrama de indicador (simplificado) de una máquina de vapor. Partiendo de las medidas indicadas en el diseño (en milímetros) calcular el área $ABCDO$, siendo la ecuación

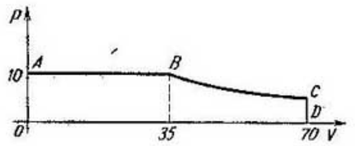

Fig. 41

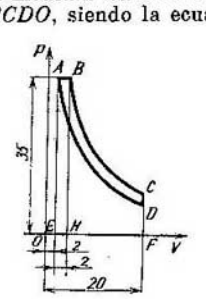

Fig. 42

de la línea BC: $pv^{\gamma} = \text{const}$ (la línea BC se llama *curva adiabática*), $\gamma = 1{,}3$. La línea AB es una recta paralela al eje Ov.

2365. La fig. 42 muestra el diagrama de indicador de un motor Diesel. El segmento AB corresponde al proceso de la combustión de la mezcla; la adiabata BC, a la expansión; el segmento CD, al escape y la adiabata DA, a la compresión. La ecuación de la adiabata BC es: $pv^{1,3} = \text{const}$, la ecuación de la adiabata AD es: $pv^{1,35} = \text{const}$. Partiendo de las medidas indicadas en el diseño (en mm) calcular el área $ABCD$.

§ 3. Integrales impropias

Integrales de límites infinitos

En los ejercicios 2366—2385 calcular las integrales impropias (o demostrar su divergencia).

2366. $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^4}$. **2367.** $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

2368. $\int_{0}^{\infty} e^{-ax}\,dx \quad (a>0)$. 2369. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x\,dx}{x^2+1}$.

2370. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$. 2371. $\int_{2}^{\infty} \frac{\ln x}{x}\,dx$.

2372. $\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)}$. 2373. $\int_{0}^{\infty} \frac{x}{(1+x)^3}\,dx$.

2374. $\int_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$. 2375. $\int_{a^2}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$.

2376. $\int_{0}^{\infty} xe^{-x^2}\,dx$. 2377. $\int_{0}^{\infty} x^3e^{-x^2}\,dx$.

2378. $\int_{0}^{\infty} x \operatorname{sen} x\,dx$. 2379. $\int_{0}^{\infty} e^{-\sqrt{x}}\,dx$.

2380. $\int_{0}^{\infty} e^{-x} \operatorname{sen} x\,dx$. 2381. $\int_{0}^{\infty} e^{-ax} \cos bx\,dx$.

2382. $\int_{0}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\,dx$. 2383. $\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^3}$.

2384. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$. 2385. $\int_{1}^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}\,dx$.

En los ejercicios 2386—2393 analizar la convergencia de las integrales.

2386. $\int_{0}^{\infty} \frac{x}{x^3+1}\,dx$. 2387. $\int_{0}^{\infty} \frac{x^3+1}{x^4}\,dx$. 2388. $\int_{0}^{\infty} \frac{x^{13}}{(x^5+x^3+1)^3}\,dx$.

2389. $\int_{1}^{\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x}\,dx$. 2390. $\int_{0}^{\infty} \sqrt{x}\,e^{-x}\,dx$. 2391. $\int_{0}^{\infty} \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{1+x^4}}\,dx$.

2392. $\int_{e^2}^{\infty} \frac{dx}{x \ln\ln x}$. 2393. $\int_{e}^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^{\frac{3}{2}}}$.

Integrales de las funciones que tienen discontinuidades infinitas

En los ejercicios 2394—2411 calcular las integrales impropias (o demostrar su divergencia).

2394. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. **2395.** $\int\limits_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3}$. **2396.** $\int\limits_1^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{x-1}}$.

2397. $\int\limits_0^1 x \ln x\, dx$. **2398.** $\int\limits_0^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{x \ln^2 x}$. **2399.** $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x \ln x}$.

2400. $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

2401. $\int\limits_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ $(a<b)$.

2402. $\int\limits_a^b \frac{x\,dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ $(a<b)$. **2403.** $\int\limits_3^5 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(x-3)(5-x)}}$.

2404. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1-x^2+2\sqrt{1-x^2}}$. **2405.** $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x^2}}$.

2406. $\int\limits_{-1}^1 \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$. **2407.** $\int\limits_{-1}^1 \frac{x+1}{\sqrt[5]{x^3}}\,dx$. **2408.** $\int\limits_{-1}^1 \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^5}}\,dx$.

2409. $\int\limits_{-1}^1 \frac{\ln(2+\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}}\,dx$. **2410.** $\int\limits_{-1}^0 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}\,dx$.

2411. $\int\limits_0^1 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}\,dx$.

En los ejercicios 2412—2417 analizar la convergencia de las integrales.

2412. $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$. **2413.** $\int\limits_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}$. **2414.** $\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}}-1}$.

2415. $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}\,dx}{e^{\operatorname{sen} x}-1}$. **2416.** $\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^x-\cos x}$. **2417.** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln \operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}\,dx$.

Diversos problemas

2418. La función $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, \infty)$ y $f(x) \to A \neq 0$ para $x \to \infty$. ¿Puede converger la integral $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$?

2419. ¿Para qué valores de k la integral $\int\limits_1^{\infty} x^k \frac{x+\operatorname{sen} x}{x-\operatorname{sen} x}\,dx$ será convergente?

2420. ¿Para qué valores de k convergen las integrales

$$\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{x^k \ln x} \quad \text{y} \quad \int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^k}?$$

2421. ¿Para qué valores de k converge la integral $\int\limits_a^{b} \frac{dx}{(b-x)^k}$ $(b < a)$?

2422. ¿Sería posible hallar tal k para que converja la integral $\int\limits_0^{\infty} x^k\,dx$?

2423. ¿Para qué valores de k y t converge la integral $\int\limits_0^{\infty} \frac{x^k}{1+x^t}\,dx$?

2424. ¿Para qué valores de m converge la integral $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos x}{x^m}\,dx$?

2425. ¿Para qué valores de k converge la integral $\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{\operatorname{sen}^k x}$?

En los ejercicios 2426—2435 calcular las integrales impropias.

2426. $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$. **2427*.** $\int\limits_{-1}^{1} \ln\frac{1+x}{1-x} \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

2428. $\int\limits_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(x-1)\,dx}{\sqrt[3]{(x-1)^4}}$.

2429. $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{(a^2+x^2)^n}$ (n es un entero positivo).

2430. $\int\limits_0^{\infty} x^n e^{-x}\,dx$ (n es un entero positivo).

2431. $\int_0^\infty x^{2n+1}e^{-x^2}\,dx$ (n es un entero positivo).

2432. $\int_0^1 (\ln x)^n\,dx$ (n es un entero positivo).

2433*. $\int_0^1 \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ para m: a) par; b) impar. ($m>0$).

2434*. $\int_0^1 \frac{(1-x)^n}{\sqrt{x}}\,dx$ (n es un entero positivo).

2435. $\int_1^\infty \frac{dx}{(x-\cos\alpha)\sqrt{x^2-1}}$ $(0<\alpha<2\pi)$.

2436*. Demostrar que $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4}=\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{1+x^4}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

2437*. Demostrar que $\int_0^\infty \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx=0$.

2438. Calcular la integral $\int_1^\infty \frac{x^2-2}{x^3\sqrt{x^2-1}}\,dx$.

En los ejercicios 2439—2448 calcular las integrales aplicando las fórmulas

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{ (integral de Poisson)},$$

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2} \text{ (integral de Dirichlet)}.$$

2439. $\int_0^\infty e^{-ax^2}\,dx$ $(a>0)$.

2440. $\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx$. **2441*.** $\int_0^\infty x^2e^{-x^2}\,dx$.

2442. $\int_0^\infty x^{2n}e^{-x^2}\,dx$ (n es un entero positivo).

2443. $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} 2x}{x}\,dx$. **2444.** $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} ax}{x}\,dx$.

2445. $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} ax \cos bx}{x}\,dx \quad (a>0,\ b>0)$.

2446*. $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\,dx$. **2447*.** $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^3 x}{x}\,dx$. **2448*.** $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^4 x}{x^2}\,dx$.

2449*. Pongamos $\varphi(x) = -\int_0^{x} \ln \cos y\,dy$. (Esta *integral* lleva el nombre *de Lobachevski*.) Demostrar la relación

$$\varphi(x) = 2\varphi\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) - 2\varphi\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right) - x\ln 2.$$

Valiéndose de la relación hallada calcular la **magnitud**

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos y\,dy$$

(por primera vez calculada por Euler).

En los ejercicios 2450—2454 calcular las integrales.

2450. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \operatorname{sen} x\,dx$. **2451.** $\int_0^{\pi} x \ln \operatorname{sen} x\,dx$.

2452*. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \operatorname{ctg} x\,dx$. **2453*.** $\int_0^{1} \frac{\operatorname{arcsen} x}{x}\,dx$.

2454. $\int_0^{1} \frac{\ln x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$.