1314. Indicar el aspecto de la gráfica de la función examinando la gráfica de su derivada (véase la fig. 33).

1315. La línea viene dada en forma paramétrica por las ecuaciones $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Mostrar que a los valores de t para los cuales la expresión $\frac{\varphi'\psi'' - \psi'\varphi''}{\varphi}$ cambia de signo (la prima designa la derivación con respecto a t) y $\varphi'(t) \neq 0$, les corresponden los puntos de inflexión de la línea referida.

1316. Hallar los puntos de inflexión para la línea $x = t^2$, $y = 3t + t^3$.

1317. Hallar los puntos de inflexión para la línea $x = e^t$, $y = \operatorname{sen} t$.

§ 4. Tareas complementarias. Resolución de ecuaciones.

Fórmula de Cauchy y regla de L'hospital

1318. Escribir la fórmula de Cauchy para las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $\varphi(x) = \ln x$ en el intervalo $[a, b]$, $0 < a < b$.

1319. Escribir la fórmula de Cauchy para las funciones $f(x) = e^{2x}$ y $\varphi(x) = 1 + e^x$ en el intervalo $[a, b]$.

1320. Comprobar la validez de la fórmula de Cauchy para las funciones $f(x) = x^3$ y $\varphi(x) = x^2 + 1$ en el intervalo $[1, 2]$.

1321. Comprobar la validez de la fórmula de Cauchy para las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $\varphi(x) = x + \cos x$ en el intervalo $[0, \pi/2]$.

1322. Demostrar que si en el intervalo $[a, b]$ se cumple la expresión $|f'(x)| \geqslant |\varphi'(x)|$, y $\varphi'(x)$ no se reduce a cero, también será válida la expresión $|\Delta f(x)| \geqslant |\Delta\varphi(x)|$, donde $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$, $\Delta\varphi(x) = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)$, y x y $x + \Delta x$ son cualesquiera puntos del intervalo $[a, b]$.

1323. Demostrar que en el intervalo $[x, 1/2]$ $(x \geqslant 0)$ el incremento de la función $y = \ln(1 + x^2)$ es menor que el de la función $y = \operatorname{arctg} x$, y en el intervalo $[1/2, x]$, viceversa, es decir, $\Delta \operatorname{arctg} x < \Delta \ln(1 + x^2)$. Valiéndose de esta última relación mostrar que en el intervalo $[1/2, 1]$

$$\operatorname{arctg} x - \ln(1 + x^2) \geqslant \frac{\pi}{4} - \ln 2.$$

En los ejercicios 1324—1364 hallar los límites.

1324. $\lim\limits_{x \to a} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$.

1325. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln \cos x}{x}$.

1326. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{\operatorname{sen} x}$.

1327. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{\alpha x} - \cos \alpha x}{e^{\beta x} - \cos \beta x}$.

1328. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$.

1329. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{a\sqrt{x}}-1}{\sqrt{\operatorname{sen} bx}}$.

1330. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{sen} x}{x-\operatorname{tg} x}$.

1331. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\pi-2\operatorname{arctg} x}{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$.

1332. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^m-a^m}{x^n-a^n}$.

1333. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-b^x}{c^x-d^x}$.

1334. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}$.

1335. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\operatorname{sen} x\cos x}$.

1336. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-b^x}{x\sqrt{1-x^2}}$.

1337. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x\ln(x-a)}{\ln(e^x-e^a)}$.

1338. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\operatorname{sen} x}$.

1339. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\operatorname{tg} x}-e^x}{\operatorname{tg} x-x}$.

1340. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\dfrac{x^3}{6}-\dfrac{x^2}{2}-x-1}{\cos x+\dfrac{x^2}{2}-1}$.

1341. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^3}-1-x^3}{\operatorname{sen}^6 2x}$.

1342. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)^4-4x+2x^2-\dfrac{4}{3}x^3+x^4}{6\operatorname{sen} x-6x+x^3}$.

1343. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\operatorname{sen} 2x}{\ln\operatorname{sen} x}$.

1344. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\ln\operatorname{sen} x}$.

1345. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(1-x)+\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}}{\operatorname{ctg}\pi x}$.

1346. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^n e^{-x})$.

1347. $\lim\limits_{x\to\infty}[(\pi-2\operatorname{arctg} x)\ln x]$.

1348. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x\operatorname{sen}\dfrac{a}{x}\right]$.

1349. $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right]$.

1350. $\lim\limits_{\varphi\to a}\left[(a^2-\varphi^2)\operatorname{tg}\dfrac{\pi\varphi}{2a}\right]$.

1351. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{\ln x}\right)$.

1352. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg} x-\dfrac{1}{x}\right)$.

1353. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi x}{2}\ln(1-x)}$.

1354. $\lim\limits_{x\to\infty}[\sqrt[3]{(a+x)(b+x)(c+x)}-x]$.

1355. $\lim\limits_{x\to\infty}[x(e^{\frac{1}{x}}-1)]$.

1356. $\lim\limits_{x\to 0}[x^2 e^{\frac{1}{x^2}}]$.

1357. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg} x)^{2x-\pi}$.

1358. $\lim\limits_{x\to 0}x^{\operatorname{sen} x}$.

1359. $\lim\limits_{x\to 0}x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$.

1360. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$.

1361. $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}$. **1362.** $\lim\limits_{x\to a}\left(2-\frac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}}$.

1363. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x$. **1364.** $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\ln(1+x)^{1+x}}{x^2}-\frac{1}{x}\right]$.

1365. Comprobar que $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\operatorname{sen} x}{x+\operatorname{sen} x}$ existe, pero no es susceptible de ser calculado de acuerdo con la regla de L'Hospital.

1366. ¿El valor de qué función (para valores suficientemente grandes de x) es mayor: $a^x x^a$ o x^x?

1367. ¿Los valores de qué función (para valores suficientemente grandes de x) son mayores: $f(x)$ o $\ln f(x)$ cuando $f(x)\to\infty$, para $x\to\infty$.

1368. Sea $x\to 0$. Demostrar que $e-(1+x)^{\frac{1}{x}}$ es una infinitesimal de primer orden respecto a x.

1369. Sea $x\to 0$. Demostrar que $\ln(1+x)-e\ln\ln(e+x)$ es una infinitesimal de segundo orden respecto a x.

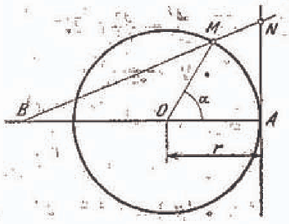

Fig. 34

1370. La tangente trazada en el punto A a una circunferencia de radio r (véase la fig. 34) lleva marcado un segmento AN cuya longitud es igual a la del arco AM. La recta MN corta la prolongación del diámetro AO en el punto B. Comprobar que

$$OB=\frac{r(\alpha\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha)}{\operatorname{sen}\alpha-\alpha},$$

donde α es la medida en radianes del ángulo central correspondiente al arco AM, y mostrar que $\lim\limits_{\alpha\to 0} OB=2r$.

Variación asintótica de las funciones y asíntotas de las líneas

1371. Partiendo directamente de la definición, comprobar que la recta $y=2x+1$ es una asíntota de la línea

$$y=\frac{2x^4+x^3+1}{x^3}.$$

1372. Partiendo directamente de la definición, comprobar que la recta $x+y=0$ es una asíntota de la línea $x^2y+xy^2=1$.

1373. Demostrar que las líneas $y=\sqrt[3]{x^3+3x^2}$ e $y=\frac{x^2}{x-1}$ se aproximan asintóticamente cuando $x\to\pm\infty$.