Desigualdades

En los ejercicios 1198—1207 demostrar la validez de las desigualdades.

1198. $2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x}$ $(x > 1)$.

1199. $e^x > 1 + x$ $(x \neq 0)$.

1200. $x > \ln(1+x)$ $(x > 0)$.

1201. $\ln x > \frac{2(x-1)}{x+1}$ $(x > 1)$.

1202. $2x \operatorname{arctg} x \geqslant \ln(1+x^2)$.

1203. $1 + x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \geqslant \sqrt{1+x^2}$.

1204. $\ln(1+x) > \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x}$ $(x > 0)$.

1205. $\operatorname{sen} x < x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ $(x > 0)$.

1206. $\operatorname{sen} x + \operatorname{tg} x > 2x$ $\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$.

1207. $\operatorname{ch} x > 1 + \frac{x^2}{2}$ $(x \neq 0)$.

Ejercicios para hallar los valores máximos y mínimos de las funciones

1208. Dividir el número 8 en dos sumandos tales que la suma de sus cubos sea la menor posible.

1209. ¿Qué número positivo sumado a su inverso da lugar a la suma mínima?

1210. Dividir el número 36 en dos factores tales que la suma de sus cuadrados sea la menor posible.

1211. Se debe hacer una caja con tapa, cuyo volumen sea de 72 cm³. Los lados de la base han de estar en relación 1 : 2. ¿Cuáles deben ser las medidas de todos los lados para que la superficie total sea la menor posible?

1212. De una hoja de cartón, de 18×18 cm², deben ser recortados cuadrados iguales de modo que doblando la hoja, siguiendo las

Fig. 29

líneas punteadas (véase la fig. 29), resulte una caja que tenga la mayor capacidad posible. ¿Cuánto debe medir cada lado del cuadrado?

1213. Resolver el problema anterior para el caso de la hoja rectangular de 8×5 cm².

1214. Al volumen de un prisma triangular regular es igual a v. ¿Cuánto debe medir el lado de la base para que su superficie total sea la menor posible?

1215. Una tina abierta tiene la forma de cilindro. Siendo su volumen igual a v, ¿cuál debe ser el radio de la base y la altura para que su superficie total sea la menor posible?

1216. Hallar la relación entre el radio R y la altura H de un cilindro que tiene la menor superficie total posible, conociendo su volumen.

1217. Se debe hacer un embudo cónico que tenga la generatriz igual a 20 cm. ¿Cuál debe ser la altura del embudo para que su volumen sea el mayor posible?

1218. Un sector de ángulo central α está recortado de un círculo. Al enrollarse el sector, ha sido engendrada una superficie cónica. ¿Cuál debe ser la abertura del ángulo α para que el volumen del cono obtenido sea el mayor posible?

1219. El perímetro de un triángulo isósceles es $2p$. ¿Cuánto deben medir sus lados para que el volumen del cuerpo engendrado por la rotación del triángulo en torno a su base sea el mayor posible?

1220. Al perímetro de un triángulo isósceles es $2p$. ¿Cuánto deben medir sus lados para que el volumen del cono engendrado por la rotación del triángulo en torno a su altura bajada sobre la base sea el mayor posible?

1221. Hallar la altura del cilindro que tenga el volumen máximo posible y que sea susceptible de ser inscrito en una esfera de radio R.

1222. Hallar la altura del cono de máximo volumen que sea susceptible de ser inscrito en una esfera de radio R.

1223. Al actuar la fuerza de gravedad sobre una gota de lluvia cuya masa inicial es igual a m_0, la hace caer. La gota va evaporándose uniformemente de modo que la pérdida de la masa es proporcional al tiempo (el coeficiente de proporcionalidad es k). ¿Al cabo de cuántos segundos al comenzar la caída será máxima la energía cinética de la gota y cuál será su valor? (Se prescinde de la resistencia del aire.)

1224. Una palanca de segundo género tiene A por su punto de apoyo. Del punto B ($AB = a$) está suspendida la carga P. El peso de la unidad de la longitud de la palanca es igual a k. ¿Cuál debería ser la longitud de la palanca para que la carga P quede en equilibrio con la fuerza mínima? (El momento de la fuerza compensadora debe equivaler a la suma de los momentos de la carga P y de la palanca.)

1225. La suma que se gasta en el combustible para el hogar de la caldera de un barco es proporcional al cubo de la velocidad. Es sabido que si el barco marcha a 10 km por hora, se gastan 30 rublos (por hora) en el combustible. Los demás gastos, que no dependen de la velocidad son de 480 rublos por hora. ¿A qué velocidad del barco serían mínimos los gastos totales por un km? ¿Cuál sería la suma total de los gastos por hora?

1226. Tres puntos A, B y C se hallan situados de modo que $\angle ABC = 60°$. Un automóvil sale del punto A y en el mismo momento del punto B parte un tren. El auto avanza hacia el punto B a 80 km por hora, el tren se dirige hacia el punto C a 50 km por hora. Teniendo en cuenta que la distancia $AB = 200$ km, ¿en qué momento, al comenzar el movimiento, será mínima la distancia entre el automóvil y el tren?

1227. Dado un cierto punto A en una circunferencia, trazar una cuerda BC paralela a la tangente en el punto A de modo que el área del triángulo ABC sea la mayor posible.

1228. Hallar los lados del rectángulo de máximo perímetro e inscrito en una semicircunferencia de radio R.

1229. Inscribir el rectángulo de mayor área posible en un segmento dado del círculo.

1230. Circunscribir en torno a un cilindro dado el cono que tenga el menor volumen posible (los planos de las bases circulares del cilindro y del cono deben coincidir).

1231. Hallar la altura del cono recto circular, de menor volumen posible, circunscrito en torno a una esfera de radio R.

1232. Hallar el ángulo en el vértice de la sección axial de un cono que tiene la menor superficie lateral posible y que está circunscrito en torno a una esfera dada.

1233. ¿Cuál ha de ser la abertura del ángulo en el vértice de un triángulo isósceles, de área dada, para que el radio de un círculo inscrito en dicho triángulo sea el mayor posible?

1234. Hallar la altura de un cono que tiene el menor volumen posible y que está circunscrito en torno a una semiesfera de radio R (el centro de la base del cono coincide con el de la esfera).

1235. ¿Cuál ha de ser la altura de un cono inscrito en una esfera de radio R para que su superficie lateral sea la mayor posible?

1236. Demostrar que la cantidad de tela necesaria para hacer una tienda de campaña de forma cónica y de capacidad dada, será la menor posible en el caso de que su altura sea $\sqrt{2}$ veces mayor que el radio de la base.

1237. Trazar una recta de modo que pase por un punto dado P (1, 4) y que la suma de las longitudes de los segmentos positivos cortados por dicha recta en los ejes de coordenadas, sea la menor posible.

1238. Hallar los lados del rectángulo, de mayor área posible, inscrito en la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

1239. Hallar la elipse cuya área sea la menor posible y que está circunscrita en torno a un rectángulo dado (el área de la elipse de semiejes a y b es igual a πab).

1240. Sea dada la elipse $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{28}=1$. Trazar una tangente de modo que el área del triángulo engendrado por dicha tangente y los ejes de coordenadas, sea la menor posible. ¿Por qué punto de la elipse debe pasar dicha tangente?

1241. Sean dados dos puntos A (1, 4) y B (3, 0) en la elipse $2x^2+y^2=18$. Hallar el tercer punto C tal que el área del triángulo ABC sea la mayor posible.

1242. Sean dados la parábola $y^2=2px$ y un punto en su eje, a una distancia a del vértice. Indicar la abscisa x del punto de la parábola más próximo al punto referido.

1243. Una banda de hierro, de anchura a, ha de ser encorvada de modo que tome la forma de canalón cilíndrico abierto (la sección del canalón ha de semejarse a un arco de segmento circular). ¿Cuál ha de ser la abertura del ángulo central que se apoya en este arco para que la capacidad del canalón sea la mayor posible?

1244. Un tronco de árbol que mide 20 m, tiene la forma de un cono truncado. Los diámetros de sus bases miden 2 m y 1 m, respectivamente. Se debe cortar una viga de sección trasversal cuadrada cuyo eje coincida con el del tronco y cuyo volumen sea el mayor posible. ¿Qué dimensiones debe tener la viga?

1245. Una serie de experimentos con la magnitud A han dado como resultado n valores distintos $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Con frecuencia se admite como valor de A un valor de x tal que la suma de los cuadrados de sus desviaciones de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sea la menor posible. Hallar x que satisfaga esta condición.

1246. Un torpedero está anclado, a 9 km del punto más próximo de la orilla. Se necesita enviar a un mensajero al campamento situado en la orilla. La distancia entre éste y el punto más próximo referido, es igual a 15 km. Teniendo en cuenta que el mensajero recorre a pie 5 km por hora, y en una barca, remando, 4 km por hora, decir en qué punto de orilla debe desembarcar para llegar al campamento lo más pronto posible.

1247. Un farol debe ser colgado exactamente encima del centro de una plazoleta circular de radio R. ¿A qué altura deberá estar el farol para que ilumine, lo mejor posible, una senda que rodea la plazoleta? (La iluminación de la plazoleta es directamente proporcional al coseno del ángulo de incidencia de los rayos luminosos e inversamente proporcional al cuadrado de distancia que media entre el foco luminoso y la plazoleta en mención.)

1248. En un segmento de longitud l que une dos manantiales de luz de intensidad luminosa I_1 e I_2, hallar el punto peor iluminado.

1249. Un cuadro de altura 1,4 m cuelga de la pared de modo que su borde inferior está 1,8 m por encima del radio de la vista de un observador. ¿A qué distancia de la pared debe colocarse el observador para que su posición sea la más ventajosa para contemplar el cuadro (es decir, para que el ángulo visual sea el mayor posible)?

1250. Una carga de peso P situada en un plano horizontal debe ser desplazada bajo la acción de la fuerza F aplicada a ella. La fuerza de rozamiento es proporcional a la de que aprieta el cuerpo contra el plano y tiene la dirección opuesta a la de la fuerza que desplaza el cuerpo. El coeficiente de proporcionalidad (el coeficiente de rozamiento) es igual a k. ¿Qué valor debe tener el ángulo φ formado entre el horizonte y la fuerza F aplicada para que el valor de ésta resulte el menor posible? Hallar el valor mínimo de la fuerza de desplazamiento.

1251. La velocidad con la que pasa el agua por un tubo cilíndrico es directamente proporcional al llamado radio hidráulico R, que se calcula mediante la fórmula $R=\frac{S}{p}$, donde S es el área de sección del flujo del agua dentro del tubo, p es el perímetro de la sección del tubo hundido en el agua. La proporción (o el grado) en que el agua llena el tubo, se caracteriza por el ángulo central que se apoya sobre la superficie horizontal del agua coriente. ¿Cuál ha de ser esta proporción para que la velocidad del paso del agua sea la mayor posible? (Al resolver el problema, aparece una ecuación transcendente cuyas raíces han de ser halladas gráficamente).

1252. En una página de un libro el texto impreso debe ocupar S cm^2. Los márgenes superior e inferior deben ser iguales a a cm, los de izquierda y de derecha, iguales a b cm. Si tomamos en consideración sólo la economía del papel, ¿qué dimensiones de la página serían las más ventajosas?

1253*. Un embudo cónico, de radio de base R y altura H está lleno de agua. Una esfera pesada está sumergida en el embudo. ¿Cuál ha de ser el radio de la esfera para que el volumen de agua expulsada del embudo por la parte sumergida de la esfera, sea el mayor posible?

1254. Una parábola tiene su vértice situado sobre una circunferencia de radio R, y el eje de la parábola sigue la dirección del diámetro. ¿Cuál ha de ser el parámetro de la parábola para que el área del segmento limitado por la parábola y la cuerda común para ésta y la circunferencia, sea la mayor posile? (El área del segmento parabólico simétrico es igual a dos tercios del producto de su base por la altura.)

1255. Un plano, paralelo a la generatriz, corta un cono cuyo radio de base es R y cuya altura, H. ¿Cuál ha de ser la distancia entre la línea de intersección de dicho plano con el plano de la base cónica y el centro de la base cónica para que el área de sección sea la mayor posible? (Véase también el ejercicio anterior.)

1256. Sea dada la parábola $y^2 = 2px$ y la normal en un punto P. ¿Dónde debe estar situado el punto P para que el segmento de la normal situado dentro de la curva tenga la longitud mínima?

1257. El segmento de la tangente a una elipse comprendido entre los ejes, tiene longitud mínima. Mostrar que la tangente se divide, en el punto de contacto, en dos partes iguales a los semiejes de la elipse, respectivamente.

1258. Demostrar que la distancia entre el centro de la elipse y cualquier normal no es superior a la diferencia de los semiejes. (Es conveniente recurrir a la expresión paramétrica de la elipse.)

1259. En el sistema de coordenadas rectangulares xOy vienen dados el punto (a, b) y la curva $y = f(x)$. Mostrar que la distancia entre el punto constante (a, b) y la variable $(x, f(x))$ puede alcanzar su extremo sólo siguiendo la dirección de la normal a la curva $y = f(x)$.

Se llama función primitiva de la función $f(x)$ a la función $F(x)$ cuya derivada es igual a la dada: $F'(x) = f(x)$.

En los ejercicios 1260—1262 mostrar (derivando y sin derivar) que las funciones dadas son primitivas de una misma función.

1260. $y = \ln ax$ e $y = \ln x$.

1261. $y = 2 \operatorname{sen}^2 x$ e $y = -\cos 2x$.

1262. $y = (e^x + e^{-x})^2$ e $y = (e^x - e^{-x})^2$.

1263*. Mostrar que la función

$$y = \cos^2 x + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right) - \cos x \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$$

es constante (es decir, no depende de x). Hallar su valor.

1264. Mostrar que la función $y = 2 \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcsen} \frac{2x}{1+x^2}$ es constante cuando $x \geqslant 1$. Hallar el valor de esta constante.

1265. Mostrar que la función

$$y = \arccos \frac{a \cos x + b}{a + b \cos x} - 2 \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right),$$

donde $0 < b \leqslant a$ es constante cuando $x \geqslant 0$. Hallar el valor de esta constante.

1266. Comprobar que las funciones $\frac{1}{2} e^{2x}$, $e^x \operatorname{sh} x$ y $e^x \operatorname{ch} x$ difieren en una magnitud constante. Mostrar que cada una de las funciones indicadas es una función primitiva con respecto a la función e^{2x}.

§ 3. Aplicación de la segunda derivada

Extremos

Aplicando el concepto de la segunda derivada, hallar los extremos de las funciones que se indican en los ejercicios 1267—1275.

1267. $y = x^3 - 2ax^2 + a^2x$ $(a > 0)$.

1268. $y = x^2(a - x)^2$. **1269.** $y = x + \frac{a^2}{x}$ $(a > 0)$.

1270. $y = x + \sqrt{1 - x}$. **1271.** $y = x\sqrt{2 - x^2}$.

1272. $y = \operatorname{ch} ax$. **1273.** $y = x^2e^{-x}$.

1274. $y = \frac{x}{\ln x}$. **1275.** $y = x^{\frac{1}{x}}$.

1276. ¿Para qué valor de a la función

$$f(x) = a \operatorname{sen} x + \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3x$$

tiene el extremo para $x = \pi/3$? ¿Será máximo o mínimo?

1277. Hallar los valores de a y b para los cuales la función

$$y = a \ln x + bx^2 + x$$

tiene extremos en los puntos $x_1 = 1$ y $x_2 = 2$. Mostrar que para estos valores de a y b la función dada tiene el mínimo en el punto x_1, y el máximo en el punto x_2.

Convexidad, concavidad, puntos de inflexión

1278. Aclarar si es convexa o cóncava la línea $y = x^5 - 5x^3 - 15x^2 + 30$ en los entornos de los puntos $(1, 11)$ y $(3, 3)$.

1279. Aclarar si es convexa o cóncava la línea $y = \operatorname{arctg} x$ en los entornos de los puntos $(1, \pi/4)$ y $(-1, -\pi/4)$.

1280. Aclarar si es convexa o cóncava la línea $y = x^2 \ln x$ en los entornos de los puntos $(1, 0)$ y $(1/e^2, -2/e^4)$.

1281. Mostrar que la gráfica de la función $y = x \operatorname{arctg} x$ es cóncava en todas partes.

1282. Mostrar que la gráfica de la función $y = \ln(x^2 - 1)$ es convexa en todas partes.

1283. Demostrar que si la gráfica de la función es convexa en todas partes o cóncava en todas partes, la función referida puede tener no más que un valor extremo.

1284. Sea $P(x)$ un polinomio de coeficientes positivos y exponentes pares. Mostrar que la gráfica de la función $y = P(x) + ax + b$ es cóncava en todas partes.

1285. Las líneas $y = \varphi(x)$ e $y = \psi(x)$ son cóncavas sobre el intervalo (a, b). Demostrar que sobre dicho intervalo: a) la línea $y = \varphi(x) + \psi(x)$ es cóncava; b) si $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ son positivas y tienen un punto mínimo común, la línea $y = \varphi(x)\psi(x)$ es cóncava.

1286. Mostrar qué aspecto ofrece la gráfica de la función si se sabe que en el intervalo (a, b):

1) $y > 0,\ y' > 0,\ y'' < 0$; 2) $y > 0,\ y' < 0,\ y'' > 0$;
3) $y < 0,\ y' > 0,\ y'' > 0$; 4) $y > 0,\ y' < 0,\ y'' < 0$.

En los ejercicios 1287—1300 hallar los puntos de inflexión, intervalos de concavidad y de convexidad de las gráficas de las funciones que se indican.

1287. $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 5$. **1288.** $y = (x+1)^4 + e^x$.
1289. $y = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 50$.
1290. $y = x + 36x^2 - 2x^3 - x^4$.
1291. $y = 3x^5 - 5x^4 + 3x - 2$.
1292. $y = (x+2)^6 + 2x + 2$. **1293.** $y = \frac{x^3}{x^2+3a^2}$ $(a > 0)$.
1294. $y = a - \sqrt[3]{x-b}$. **1295.** $y = e^{\operatorname{sen} x}$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$.
1296. $y = \ln(1+x^2)$. **1297.** $y = \frac{a}{x}\ln\frac{x}{a}$ $(a > 0)$.
1298. $y = a - \sqrt[5]{(x-b)^2}$. **1299.** $y = e^{\operatorname{arctg} x}$.
1300. $y = x^4(12\ln x - 7)$.

1301. Mostrar que la línea $y = \frac{x+1}{x^2+1}$ tiene tres puntos de inflexión que están situados en una misma recta.

1302. Mostrar que los puntos de inflexión de la línea $y = x \operatorname{sen} x$ están situados en la línea $y^2(4 + x^2) = 4x^2$.

1303. Mostrar que los puntos de inflexión de la línea $y = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ están situados en la línea $y^2(4 + x^4) = 4$.

1304. Confirmar que las gráficas de las funciones $y = \pm e^{-x}$ e $y = e^{-x}\operatorname{sen} x$ (la curva de oscilaciones amortiguadas) tienen tangentes comunes en los puntos de inflexión de la línea $y = e^{-x}\operatorname{sen} x$.

1305. ¿Para qué valores de a y b el punto (1, 3) es el de inflexión de la línea $y = ax^3 + bx^2$?

1306. Elegir α y β tales que el punto A (2; 2,5) sea el de inflexión de la línea $x^2y + \alpha x + \beta y = 0$. ¿Qué otros puntos de inflexión tiene la línea referida?

1307. ¿Para qué valores de a tiene puntos de inflexión la gráfica de la función $y = e^x + ax^3$?

1308. Demostrar que la abscisa del punto de inflexión en la gráfica de una función no puede coincidir con el punto del extremo de esta misma función.

1309. Demostrar que entre dos puntos de extremo de cualquier función derivada dos veces está situada por lo menos una abscisa del punto de inflexión de la gráfica de la función.

1310. Comprobar lo siguiente, tomando la función $y = x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8$ como ejemplo: entre las abscisas de los puntos de inflexión de la gráfica de la función puede no haber puntos de extremo (comparar con el ejercicio anterior).

1311. Observando y examinando la gráfica de la función (véase la fig. 30) indicar el aspecto de las gráficas de su primera y segunda derivadas.

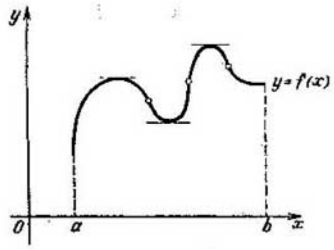

Fig. 30

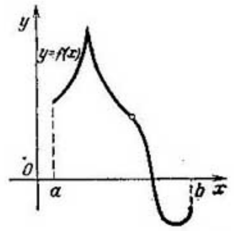

Fig. 31

1312. Hacer lo mismo con respecto a la gráfica de la función presentada en la fig. 31.

1313. Indicar el aspecto de la gráfica de la función examinando la gráfica de su derivada (véase la fig. 32).

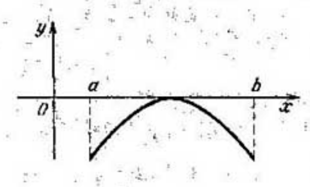

Fig. 32

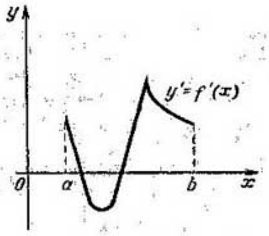

Fig. 33