En los ejercicios 1470—1477 analizar las líneas cuyas ecuaciones son dadas en el sistema de coordenadas polares (véase la nota en la pág. 31).

1470. $\rho = a \operatorname{sen} 3\varphi$ (rosa de tres pétalos).

1471. $\rho = a \operatorname{tg} \varphi$. **1472.** $\rho = a(1 + \operatorname{tg} \varphi)$.

1473. $\rho = a(1 + \cos \varphi)$ (cardioide).

1474. $\rho = a(1 + b \cos \varphi)$ $(a > 0, b > 1)$.

1475. $\rho = \sqrt{\frac{\pi}{\varphi}}$ (lituo).

1476. $\rho = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\varphi}{\pi}$.

1477. $\rho = \sqrt{1-t^2}$, $\varphi = \operatorname{arcsen} t + \sqrt{1-t^2}$.

En los ejercicios 1478—1481 analizar y construir las líneas después de haber reducido sus ecuaciones al sistema de coordenadas polares.

1478. $(x^2 + y^2)^3 = 4a^2x^2y^2$. **1479.** $(x^2 + y^2)\,x = a^2y$.

1480. $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$.

1481. $(x^2 + y^2)(x^2 - y^2)^2 = 4x^2y^2$.

Resolución de ecuaciones

1482. Comprobar que la ecuación $x^3 - x^2 - 8x + 12 = 0$ tiene sólo una raíz simple $x_1 = -3$ y la otra, doble $x_2 = 2$.

1483. Comprobar que la ecuación $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4 = 0$ tiene dos raíces dobles $x_1 = 1$ y $x_2 = -2$.

1484. Mostrar que la ecuación $x \operatorname{arcsen} x = 0$ tiene sólo una raíz real $x = 0$ siendo ésta doble.

1485. Mostrar que las raíces de la ecuación $x \operatorname{sen} x = 0$ tienen la forma $y = k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, correspondiendo al valor $k = 0$ una raíz doble. ¿Cuál es la multiplicidad de las demás raíces?

1486. Mostrar que la ecuación $x^3 - 3x^2 + 6x - 1 = 0$ tiene sólo una raíz real simple perteneciente al intervalo (0, 1). Hallar esta raíz, con exactitud hasta 0,1, aplicando el método de pruebas.

1487. Mostrar que la ecuación $x^4 + 3x^2 - x - 2 = 0$ tiene dos, y sólo dos, raíces reales simples pertenecientes a los intervalos (—1, 0) y (0, 1), respectivamente. Aplicando el método de pruebas, hallar estas raíces con exactitud hasta 0,1.

1488. Mostrar que la ecuación $f(x) = a \neq 0$, donde $f(x)$ es un polinomio de coeficientes positivos, siendo impares los exponentes de todos sus términos, tiene una, y sólo una, raíz real, que puede ser múltiple. Analizar el caso de $a = 0$. Hallar la raíz de la ecuación $x^3 + 3x - 1 = 0$, con exactitud hasta 0,01 y combinando el método de pruebas con el de cuerdas.

1489. Demostrar el siguiente teorema: para que la ecuación $x^3 + px + q = 0$ tenga tres raíces reales simples, es necesario y suficiente que los coeficientes p y q satisfagan la desigualdad $4p^3 + 27q^2 < 0$. Hallar todas las raíces de la ecuación $x^3 - 9x + 2 = 0$, con exactitud hasta 0,01 y combinando el método de pruebas con el de cuerdas.

1490. Mostrar que la ecuación $x^4 + 2x^2 - 6x + 2 = 0$ tiene dos, y sólo dos, raíces reales simples pertenecientes a los intervalos $(0, 1)$ y $(1, 2)$, respectivamente. Hallar estas raíces con exactitud hasta 0,01 combinando el método de cuerdas con el de tangentes.

1491. Mostrar que la ecuación $x^5 + 5x + 1 = 0$ tiene una raíz real simple perteneciente al intervalo $(-1, 0)$. Hallar esta raíz con exactitud hasta 0,01 combinando el método de cuerdas con el de tangentes.

En los ejercicios 1492—1497 deben hallarse los valores aproximados de las raíces de las ecuaciones combinando los tres métodos: el de pruebas, el de cuerdas y el de tangentes. (En caso necesario conviene usar tablas de los valores de las funciones que figuren en las ecuaciones).

1492. Mostrar que la ecuación $xe^x = 2$ tiene solamente una raíz real perteneciente al intervalo $(0, 1)$. Hallar esta raíz con exactitud hasta 0,01.

1493. Mostrar que la ecuación $x \ln x = a$ no tiene raíces reales cuando $a < -1/e$, tiene una raíz real doble cuando $a = -1/e$, dos raíces reales simples cuando $-1/e < a < 0$ y una raíz real simple cuando $a \geqslant 0$. Hallar la raíz de la ecuación $x \ln x = 0,8$ con exactitud hasta 0,01.

1494. Mostrar que la llamada ecuación de Kepler $x = \varepsilon \operatorname{sen} x + a$, donde $0 < \varepsilon < 1$ tiene una raíz real simple. Hallar esta raíz con exactitud hasta 0,001 para $\varepsilon = 0,538$ y $a = 1$.

1495. Mostrar que la ecuación $a^x = ax$ para $a > 1$ siempre tiene dos, y sólo dos, raíces reales y positivas, siendo una igual a 1 y otra, menor, mayor o igual a 1, lo cual depende de si a es mayor, menor o igual a e. Hallar la segunda raíz de esta ecuación con exactitud hasta 0,001 cuando $a = 3$.

1496. Mostrar que la ecuación $x^2 \operatorname{arctg} x = a$, donde $a \neq 0$, tiene una raíz real. Hallar esta raíz con exactitud hasta 0,001 cuando $a = 1$.

1497. ¿Cuál ha de ser la base a de un sistema de logaritmos en el que existen números iguales a sus logaritmos? ¿Cuántos números de este tipo puede haber? Hallar este número (con exactitud hasta 0,01) para $a = 1/2$.

§ 5. Fórmula de Taylor y su aplicación

Fórmula de Taylor para los polinomios

1498. Desarrollar el polinomio $x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x + 4$ en potencias del binomio $x - 4$.

1499. Desarrollar el polinomio $x^3 + 3x^2 - 2x + 4$ en potencias del binomio $x + 1$.

1500. Desarrollar el polinomio $x^{10} - 3x^5 + 1$ en potencias del binomio $x - 1$.

1501. Desarrollar la función $f(x) = (x^2 - 3x + 1)^3$ en potencias de x, aplicando la fórmula de Taylor.

1502. $f(x)$ es un polinomio de cuarto grado. Sabiendo que $f(2) = -1$, $f'(2) = 0$, $f''(2) = 2$, $f'''(2) = -12$, $f^{IV}(2) = 24$, calcular $f(-1)$, $f'(0)$, $f''(1)$.

Fórmula de Taylor

1503. Escribir la fórmula de Taylor de n-ésimo orden para la función $y = \frac{1}{x}$ cuando $x_0 = -1$.

1504. Escribir la fórmula de Taylor (la de Maclaurin) de n-ésimo orden para la función $y = xe^x$ para $x_0 = 0$.

1505. Escribir la fórmula de Taylor de n-ésimo orden para la función $y = \sqrt{x}$ cuando $x_0 = 4$.

1506. Escribir la fórmula de Taylor de $2n$-ésimo orden para la función $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ cuando $x_0 = 0$.

1507. Escribir la fórmula de Taylor de n-ésimo orden para la función $y = x^3 \ln x$ cuando $x_0 = 1$.

1508. Escribir la fórmula de Taylor de $2n$-ésimo orden para la función $y = \operatorname{sen}^2 x$ cuando $x_0 = 0$.

1509. Escribir la fórmula de Taylor del 3er orden para la función $y = \frac{x}{x-1}$ cuando $x_0 = 2$ y construir las gráficas de la función dada y de su polinomio de Taylor de tercer grado.

1510. Escribir la fórmula de Taylor de 2° orden para la función $y = \operatorname{tg} x$ cuando $x_0 = 0$ y construir la gráfica de la función dada y de su polinomio de Taylor de segundo grado.

1511. Escribir la fórmula de Taylor de 3er orden para la función $y = \operatorname{arcsen} x$ cuando $x_0 = 0$ y construir la gráfica de la función dada y de su polinomio de Taylor de tercer grado.

1512. Escribir la fórmula de Taylor de 3er orden para la función $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ cuando $x_0 = 1$ y construir la gráfica de la función dada y de su polinomio de Taylor de tercer grado.

1513*. Demostrar que el número θ en el término complementario de la fórmula de Taylor de primer orden

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a + \theta h)$$

tiende a 1/3 para $h \to 0$, si $f'''(x)$ es continua para $x = a$ y $f'''(a) \neq 0$.

Algunas aplicaciones de la fórmula de Taylor

En los ejercicios 1514—1519 analizar el comportamiento de las funciones dadas en los puntos que se indican.

1514. $y = 2x^6 - x^3 + 3$ en el punto $x = 0$.

1515. $y = x^{11} + 3x^6 + 1$ en el punto $x = 0$.

1516. $y = 2\cos x + x^2$ en el punto $x = 0$.

1517. $y = 6\ln x - 2x^3 + 9x^2 - 18x$ en el punto $x = 1$.

1518. $y = 6 \operatorname{sen} x + x^2$ en el punto $x = 0$.

1519. $y = 24e^x - 24x - 12x^2 - 4x^3 - x^4 - 20$ en el punto $x = 0$.

1520. $f(x) = x^{10} - 3x^6 + x^2 + 2$. Hallar los tres primeros términos del desarrollo por la fórmula de Taylor para $x_0 = 1$. Calcular aproximadamente $f(1{,}03)$.

1521. $f(x) = x^8 - 2x^7 + 5x^6 - x + 3$. Hallar los tres primeros términos del desarrollo por la fórmula de Taylor para $x_0 = 2$. Calcular aproximadamente $f(2{,}02)$ y $f(1{,}97)$.

1522. $f(x) = x^{80} - x^{40} + x^{20}$. Hallar los tres primeros términos del desarrollo de $f(x)$ en potencias de $x - 1$ y calcular aproximadamente $f(1{,}005)$.

1523. $f(x) = x^5 - 5x^3 + x$. Hallar los tres primeros términos del desarrollo en potencias de $x - 2$. Calcular aproximadamente $f(2{,}1)$. Calcular $f(2{,}1)$ exactamente y hallar los errores absoluto y relativo.

1524. Comprobar que calculando los valores de la función e^x para $0 < x \leqslant 1/2$ con arreglo a la fórmula aproximada

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

se comete un error menor que 0,01. Valiéndose de ello, hallar $\sqrt{e}$ con tres cifras exactas.

1525. Valiéndose de la fórmula aproximada $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2}$ hallar $\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$ y calcular el error.