# § 3. Derivadas y diferenciales de las funciones de varias variables

*Derivadas parciales*

**3032.** El volumen de gas $v$ es función de su temperatura y presión: $v = f(p, T)$. El coeficiente medio de la expansión del gas, a la presión constante y al cambio de la temperatura desde $T_1$ hasta $T_2$ se traduce por la expresión $\frac{v_2 - v_1}{v_1 (T_2 - T_1)}$. ¿Qué es lo que podríamos denominar el coeficiente de expansión, a la presión constante y a la temperatura dada $T_0$?

**3033.** La temperatura en un punto $A$ dado de la barra $Ox$ es función de la abscisa $x$ del punto $A$ y el tiempo $t$: $\theta = f(x, t)$. ¿Cuál sería la interpretación física de las derivadas parciales $\frac{\partial \theta}{\partial t}$ y $\frac{\partial \theta}{\partial x}$?

**3034.** El área $S$ del rectángulo se expresa por la fórmula $S = bh$, donde $b$ es la base y $h$, la altura. Hallar $\frac{\partial s}{\partial h}$, $\frac{\partial s}{\partial b}$ y dar interpretación geomértica de los resultados obtenidos.

**3035.** Sean dadas dos funciones: $u = \sqrt{a^2 - x^2}$ ($a$ es constante) y $z = \sqrt{y^2 - x^2}$. Hallar $\frac{du}{dx}$ y $\frac{\partial z}{\partial x}$. Comparar los resultados.

En los ejercicios 3036—3084 hallar las derivadas parciales de las funciones que se dan a continuación respecto a cada una de las variables independientes ($x$, $y$, $z$, $u$, $v$, $t$, $\varphi$ y $\psi$ son variables):

**3036.** $z = x - y$. **3037.** $z = x^3 y - y^3 x$.

**3038.** $\theta = axe^{-t} + bt$ ($a$, $b$ son constantes).

**3039.** $z = \frac{u}{v} + \frac{v}{u}$. **3040.** $z = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$.

**3041.** $z = (5x^2 y - y^3 + 7)^3$. **3042.** $z = x\sqrt{y} + \frac{y}{\sqrt[3]{x}}$.

**3043.** $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$. **3044.** $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$.

**3045.** $z = \frac{1}{\operatorname{arctg} \frac{y}{x}}$. **3046.** $z = x^y$.

**3047.** $z = \ln(x^2 + y^2)$. **3048.** $z = \ln \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}$.

3049. $z = \arcsin \frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. 3050. $z = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{y}$.

3051. $z = e^{-\frac{x}{y}}$. 3052. $z = \ln (x + \ln y)$.

3053. $u = \operatorname{arctg} \frac{v+w}{v-w}$. 3054. $z = \operatorname{sen} \frac{x}{y} \cos \frac{y}{x}$.

3055. $z = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{y}{x}}$. 3056. $z = (1 + xy)^y$.

3057. $z = xy \ln (x + y)$. 3058. $z = x^{xy}$.

3059. $u = xyz$. 3060. $u = xy + yz + zx$.

3061. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

3062. $u = x^3 + yz^2 + 3yx - x + z$

3063. $w = xyz + yzv + zvx + vxy$.

3064. $u = e^{x(x^2+y^2+z^2)}$. 3065. $u = \operatorname{sen} (x^2 + y^2 + z^2)$.

3066. $u = \ln (x + y + z)$.

3067. $u = x^{\frac{y}{z}}$. 3068. $u = x^{y^z}$.

3069. $f(x, y) = x + y - \sqrt{x^2 + y^2}$ en el punto $(3, 4)$.

3070. $z = \ln \left(x + \frac{y}{2x}\right)$ en el punto $(1, 2)$.

3071. $z = (2x + y)^{2x+y}$. 3072. $z = (1 + \log_y x)^3$.

3073. $z = xye^{\operatorname{sen} \pi xy}$.

3074. $z = (x^2 + y^2) \frac{1 - \sqrt{x^2 + y^2}}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}}$.

3075. $z = \operatorname{arctg} \sqrt{x^y}$. 3076. $z = 2\sqrt{\frac{1 - \sqrt{xy}}{1 + \sqrt{xy}}}$.

3077. $z = \ln [xy^2 + yx^2 + \sqrt{1 + (xy^2 + yx^2)^2}]$.

3078. $z = \sqrt{1 - \left(\frac{x+y}{xy}\right)^2} + \arcsin \frac{x+y}{xy}$.

3079. $z = \operatorname{arctg} \left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x}\right) - \frac{1}{2} \frac{\operatorname{arctg} \frac{y}{x} - 1}{\operatorname{arctg} \frac{y}{x} + 1} - \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.

3080. $u = \frac{k}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$. 3081. $u = \operatorname{arctg} (x - y)^z$.

3082. $u = (\operatorname{sen} x)^{yz}$. 3083. $u = \ln \frac{1 - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{1 + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

3084. $w = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 (x^2y^2 + z^2v^2 - xyzv) + \ln \cos (x^2y^2 + z^2v^2 - xyzv)$.

3085. $u=\frac{\cos(\varphi-2\psi)}{\cos(\varphi+2\psi)}$. Hallar $\left(\frac{\partial u}{\partial \psi}\right)_{\substack{\varphi=\frac{\pi}{4}\\ \psi=\pi}}$.

3086. $u=\sqrt{az^3-bt^3}$. Hallar $\frac{\partial u}{\partial z}$ y $\frac{\partial u}{\partial t}$ para $z=b$, $t=a$.

3087. $z=\frac{x\cos y-y\cos x}{1+\operatorname{sen} x+\operatorname{sen} y}$. Hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ para $x=y=0$.

3088. $u=\sqrt{\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{sen}^2 y+\operatorname{sen}^2 z}$. Hallar $\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{\substack{x=0\\ y=0\\ z=\frac{\pi}{4}}}$.

3089. $u=\ln(1+x+y^2+z^3)$. Hallar $u_x+u_y+u_z$ para $x=y=$ $=z=1$.

3090. $f(x, y)=x^3y-y^3x$. Hallar $\left(\frac{\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}}\right)_{\substack{x=1\\ y=2}}$.

3091. ¿Qué ángulo forma la tangente a la línea $\begin{cases} z=\frac{x^2+y^2}{4}, \\ y=4 \end{cases}$ en el punto $(2, 4, 5)$ con la dirección positiva del eje de abscisas?

3092. ¿Qué ángulo forma la tangente a la línea $\begin{cases} z=\sqrt{1+x^2+y^2} \\ x=1 \end{cases}$ en el punto $(1, 1, \sqrt{3})$ con la dirección positiva del eje de ordenadas?

3093. ¿Qué ángulo se forma al cortarse las líneas planas engendradas por la intersección de las superficies $z=x^2+\frac{y^2}{6}$ y $z=\frac{x^2+x^2}{3}$ por el plano $y=2$?

### *Diferenciales. Cálculos aproximados*

En los ejercicios 3094—3097 hallar las diferenciales parciales de las funciones que se dan a continuación, respecto a cada una de las variables independientes.

3094. $z=xy^3-3x^2y^2+2y^4$.

3095. $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

3096. $z=\frac{xy}{x^2+y^2}$.

3097. $u=\ln(x^3+2y^3-z^3)$.

3098. $z=\sqrt[3]{x+y^2}$. Hallar $d_yz$ para $x=2$, $y=5$, $\Delta y=0{,}01$.

3099. $z=\sqrt{\ln xy}$. Hallar $d_xz$ para $x=1$, $y=1{,}2$, $\Delta x=0{,}016$.

**3100.** $u=p-\frac{qr}{p}+\sqrt{p+q+r}$. Hallar $d_pu$ para $p=1$, $q=3$, $r=5$, $\Delta p=0{,}01$.

En los ejercicios 3101—3109 hallar las diferenciales totales de las funciones que se dan a continuación.

**3101.** $z=x^2y^4-x^3y^3+x^4y^2$. **3102.** $z=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$

**3103.** $z=\frac{x+y}{x-y}$. **3104.** $z=\operatorname{arcsen}\frac{x}{y}$.

**3105.** $z=\operatorname{sen}(xy)$. **3106.** $z=\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$.

**3107.** $z=\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$. **3108.** $z=\operatorname{arctg}(xy)$. **3109.** $u=x^{y^2}$.

*Aplicaciones a los cálculos*

**3110.** Hallar el valor de la diferencial total de la función $z=x+y-\sqrt{x^2+y^2}$ para $x=3$, $y=4$, $\Delta x=0{,}1$, $\Delta y=0{,}2$.

**3111.** Hallar el valor de la diferencial total de la función $z=e^{xy}$ para $x=1$, $y=1$, $\Delta x=0{,}15$, $\Delta y=0{,}1$.

**3112.** Hallar el valor de la diferencial total de la función $z=\frac{xy}{x^2-y^2}$ para $x=2$, $y=1$, $\Delta x=0{,}01$, $\Delta y=0{,}03$.

**3113.** Calcular aproximadamente la variación de la función $z=\frac{x+3y}{y-3x}$ al variar $x$ desde $x_1=2$ hasta $x_2=2{,}5$ e $y$ desde $y_1=4$ hasta $y_2=3{,}5$.

**3114.** Calcular aproximadamente $\ln(\sqrt[3]{1{,}03}+\sqrt[4]{0{,}98}-1)$.

**3115.** Calcular aproximadamente $1{,}04^{2{,}02}$.

**3116.** Hallar la longitud del segmento de la recta $x=2$, $y=3$ comprendido entre la superficie $z=x^2+y^2$ y su plano tangente en el punto (1, 1, 2).

**3117.** El cuerpo ha sido pesado en el aire (4,1 ± 0,1 gf) y en el agua (1,8 ± 0,2 gf). Hallar el peso específico del cuerpo e indicar el error del cálculo.

**3118.** El radio de la base del cono mide 10,2 ± 01 cm, la generatriz mide 44,6 ± 0,1 cm. Hallar el volumen del cono e indicar el error del cálculo.

**3119.** Para calcular el área $S$ del triángulo por su lado $a$ y los ángulos $B$, $C$ se usa la fórmula

$$S=\frac{1}{2}a^2\frac{\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C}{\operatorname{sen}(B+C)}.$$

Hallar el error relativo $\delta_S$ para calcular $S$ si los errores relativos al calcular los elementos mencionados son $\delta_a$, $\delta_B$, $\delta_C$, respectivamente.

**3120.** Un lado del triángulo mide 2,4 m y aumenta con la velocidad de 10 cm/s. El segundo lado mide 1,5 m y disminuye con la velocidad de 5 cm/s. El ángulo formado por estos dos lados mide 60° y aumenta con la velocidad de 2° al segundo. ¿Cómo varía el área del triángulo y con qué velocidad?

**3121.** Los radios de las bases de un cono truncado miden $R = 30$ cm, $r = 20$ cm, la altura $h = 40$ cm. ¿Cómo variaría el volumen del cono si aumentásemos $R$ en 3 mm, $r$, en 4 mm, $h$, en 2 mm?

**3122.** Mostrar que para calcular el período $T$ de la oscilación del péndulo, determinado por la fórmula

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

(siendo $l$ su longitud y $g$ la aceleración de la gravedad) el error relativo es igual a la semisuma de los errores relativos cometidos al calcular los valores de $l$ y $g$ (todos los errores son supuestos bastante pequeños).

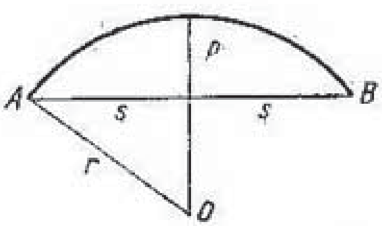


Fig. 59

**3123.** La fig. 59 muestra el arco $AB$ de una circunferencia. Expresar el error al calcular el radio $r$ de dicho arco tomando en consideración la cuerda $2s$ y la flecha $p$ por los errores $ds$ y $dp$. Calcular $dr$ para $2s = 19{,}45$ cm $\pm$ 0,5 mm, $p = 3{,}62$ cm $\pm$ 0,3 mm.

# § 4. Derivación de las funciones

*Función compuesta*

**3124.** $u = e^{x-2y}$, donde $x = \operatorname{sen} t$, $y = t^3$, $\dfrac{du}{dt} = ?$

**3125.** $u = z^2 + y^2 + zy$, $z = \operatorname{sen} t$, $y = e^t$, $\dfrac{du}{dt} = ?$

**3126.** $z = \operatorname{arcsen}(x - y)$, $x = 3t$, $y = 4t^3$; $\dfrac{dz}{dt} = ?$

**3127.** $z = x^2y - y^2x$, donde $x = u\cos v$, $y = u\operatorname{sen} v$; $\frac{\partial z}{\partial u} = ?$ $\frac{\partial z}{\partial v} = ?$

**3128.** $z = x^2 \ln y$, $x = \frac{u}{v}$, $y = 3u - 2v$; $\frac{\partial z}{\partial u} = ?$ $\frac{\partial z}{\partial v} = ?$

**3129.** $u = \ln(e^x + e^y)$; $\frac{\partial u}{\partial x} = ?$ Hallar $\frac{du}{dx}$ si $y = x^3$.

**3130.** $z = \operatorname{arctg}(xy)$; hallar $\frac{dz}{dx}$ si $y = e^x$.

**3131.** $u = \operatorname{arcsen}\frac{x}{z}$, donde $z = \sqrt{x^2+1}$; $\frac{du}{dx} = ?$

**3132.** $z = \operatorname{tg}(3t + 2x^2 - y)$, $x = \frac{1}{t}$, $y = \sqrt{t}$; $\frac{dz}{dt} = ?$

**3133.** $u = \frac{e^{ax}(y-z)}{a^2+1}$, $y = a\operatorname{sen} x$, $z = \cos x$; $\frac{du}{dx} = ?$

**3134.** $z = \frac{xy\operatorname{arctg}(xy+x+y)}{x+y}$; $dz = ?$

**3135.** $z = (x^2+y^2)\,e^{\frac{x^2+y^2}{xy}}$; $\frac{\partial z}{\partial x} = ?$ $\frac{\partial z}{\partial y} = ?$ $dz = ?$

**3136.** $z = f(x^2 - y^2, e^{xy})$; $\frac{\partial z}{\partial x} = ?$ $\frac{\partial z}{\partial y} = ?$

**3137.** Mostrar que la función $z = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$, donde $x = u + v$, $y = u - v$, satisface la relación $\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{u-v}{v^2+u^2}$.

**3138.** Mostrar que la función $z = \varphi(x^2+y^2)$, donde $\varphi(u)$ es una función derivable, satisface la relación $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

**3139.** $u = \operatorname{sen} x + F(\operatorname{sen} y - \operatorname{sen} x)$; mostrar que $\frac{\partial u}{\partial y}\cos x + \frac{\partial u}{\partial x}\cos y = \cos x \cos y$, cualquiera que sea la función derivable $F$.

**3140.** $z = \frac{y}{f(x^2-y^2)}$; mostrar que $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$ cualquiera que sea la función derivable $f$.

**3141.** Mostrar que la función derivable homogénea de orden cero $z = F\left(\frac{y}{x}\right)$ (véase el ejercicio 2961) satisface la relación $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

**3142.** Mostrar que la función homogénea de $k$-ésimo orden $u = x^kF\left(\frac{z}{x}; \frac{y}{x}\right)$, donde $F$ es una función derivable, satisface la relación $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = ku$.

**3143.** Comprobar la proposición del ejercicio 3142 para la función $u = x^5 \operatorname{sen} \frac{z^2+y^2}{x^2}$.

**3144.** Sea dada la función derivable $f(x, y)$. Demostrar que si sustituimos las variables $x$, $y$ por las funciones lineales homogéneas de $X$, $Y$, la función obtenida $F(X, Y)$ estará unida con la función dada por la relación

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = X\frac{\partial F}{\partial X} + Y\frac{\partial F}{\partial Y}.$$

*Funciones dadas implícita y paramétricamente*

En los ejercicios 3145—3155 hallar la derivada $\frac{dy}{dx}$ de las funciones dadas implícitamente.

**3145.** $x^3y - y^3x = a^4$.

**3146.** $x^2y^2 - x^4 - y^4 = a^4$.

**3147.** $xe^y + ye^x - e^{xy} = 0$.

**3148.** $(x^2+y^2)^2 - a^2(x^2-y^2) = 0$.

**3149.** $\operatorname{sen}(xy) - e^{xy} - x^2y = 0$.

**3150.** $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

**3151.** $xy - \ln y = a$.

**3152.** $\operatorname{arctg}\frac{x+y}{a} - \frac{y}{a} = 0$.

**3153.** $yx^2 = e^y$.

**3154.** $ye^x + e^y = 0$.

**3155.** $y^x = x^y$.

**3156.** $F(x, y) = F(y, x)$. Mostrar que la derivada de $y$ respecto a $x$ puede ir expresada mediante una fracción cuyo numerador se obtiene del denominador permutando las letras $y$ y $x$.

**3157.** $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 4 = 0$. Hallar $\frac{dy}{dx}$ para $x = 6$, $y = 2$ y $x = 6$, $y = 8$. Dar interpretación geométrica de los resultados obtenidos.

**3158.** $x^4y + xy^4 - ax^2y^2 = a^5$. Hallar $\frac{dy}{dx}$ para $x = y = a$.

**3159.** Demostrar que de $x^2y^2 + x^2 + y^2 - 1 = 0$ se deduce:

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}} = 0.$$

**3160.** Demostrar que de $a + b(x+y) + cxy = m(x-y)$ se deduce:

$$\frac{dx}{a+2bx+cx^2} = \frac{dy}{a+2by+cy^2}.$$

**3161.** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$; $\frac{\partial z}{\partial x} = ?$ $\frac{\partial z}{\partial y} = ?$

**3162.** $x^2-2y^2+z^2-4x+2z-5=0;\qquad \frac{\partial z}{\partial x}=?\quad \frac{\partial z}{\partial y}=?$

**3163.** $z^3+3xyz=a^3;\qquad \frac{\partial z}{\partial x}=?\quad \frac{\partial z}{\partial y}=?$

**3164.** $e^z-xyz=0;\qquad \frac{\partial z}{\partial x}=?\quad \frac{\partial z}{\partial y}=?$

**3165.** Mostrar que cualquiera que sea la función derivable $\varphi$, de la relación $\varphi(cx-az,\ cy-bz)=0$ se deduce:

$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}-c.$$

**3166.** $F(x,\ y,\ z)=0$. Demostrar que

$$\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}=1;\qquad \frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial y}=-1.$$

**3167.** Hallar la diferencial total de la función $z$, definida por la ecuación $\cos^2 x+\cos^2 y+\cos^2 z=1$.

**3168.** La función $z$ viene dada paramétricamente: $x=u+v$, $y=u-v$, $z=uv$. Expresar $z$ como función explícita de $x$ e $y$.

**3169.** $x=u+v$, $y=u^2+v^2$, $z=u^3+v^3$. Expresar $z$ como función explícita de $x$ e $y$.

**3170.** $x=u\cos v$, $y=u\operatorname{sen} v$, $z=kv$. Expresar $z$ como función explícita de $x$ e $y$.

En los ejercicios 3171—3175 expresar $dz$ a través de $x$, $y$, $z$, $dx$ y $dy$ de las funciones dadas en forma paramétrica.

**3171.** $x=\frac{u^2+v^2}{2},\qquad y=\frac{u^2-v^2}{2},\ z=uv.$

**3172.** $x=\sqrt{a}(\operatorname{sen} u+\cos v),\qquad y=\sqrt{a}(\cos u-\operatorname{sen} v),\qquad z=1+\operatorname{sen}(u-v).$

**3173.** $x=u+v,\ y=u-v,\ z=u^2v^2.$

**3174.** $x=u\cos v,\ y=u\operatorname{sen} v,\ z=u^2.$

**3175.** $x=v\cos u-u\cos u+\operatorname{sen} u,\qquad y=v\operatorname{sen} u-u\operatorname{sen} u-\cos u,$ $z=(u-v)^2.$

**3176.** $x=e^u\cos v,\ y=e^u\operatorname{sen} v,\ z=uv$. Expresar $dz$ mediante $u$, $v$, $dx$ y $dy$.

**3177.** Las relaciones $u=f(x,\ y)$, $v=F(x,\ y)$, donde $f$ y $F$ son funciones derivables de $x$ e $y$, determinan $x$ e $y$ como funciones derivables de $u$ y $v$. Demostrar que

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)=1.$$

3178. $u$ y $v$ son funciones de $x$, $y$, $z$ que satisfacen las relaciones $uv = 3x - 2y + z$, $v^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Mostrar que

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

3179. Sean $y = f(x, t)$, $F(x, y, t) = 0$. Comprobar que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial t}}.$$

3180. Sean $f(x, y, z) = 0$. Comprobar que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial z}}{\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z}}.$$

# § 5. Derivación sucesiva

3181. $x = x^3 + xy^2 - 5xy^3 + y^5$. Mostrar que $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$.

3182. $z = x^y$. Mostrar que $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$.

3183. $z = e^x(\cos y + x \operatorname{sen} y)$. Mostrar que $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$.

3184. $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$. Mostrar que $\frac{\partial^3 z}{\partial y^2\,\partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}$.

En los ejercicios 3185 — 3192 hallar $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$ y $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ de las funciones que se dan a continuación.

3185. $z = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+y^2)^3}$.

3186. $z = \ln(x + \sqrt{x^2+y^2})$.

3187. $z = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$.

3188. $z = \operatorname{sen}^2(ax+by)$.

3189. $z = e^{xy^y}$.

3190. $z = \frac{x-y}{x+y}$.

3191. $z = y^{\ln x}$.

3192. $z = \operatorname{arcsen}(xy)$.

3193. $u = \sqrt{x^2+y^2+z^2-2xz}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} = ?$

3194. $z = e^{xy^2}$; $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y} = ?$

3195. $z = \ln(x^2+y^2)$; $\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2} = ?$

**3196.** $z = \operatorname{sen} xy$; $\qquad \dfrac{\partial^3 z}{\partial x\, \partial y^2} = ?$

**3197.** $w = e^{xyz}$; $\qquad \dfrac{\partial^3 w}{\partial x\, \partial y\, \partial z} = ?$

**3198.** $v = x^m y^n z^p$; $\qquad \dfrac{\partial^6 v}{\partial x\, \partial y^3\, \partial z^2} = ?$

**3199.** $z = \ln(e^x + e^y)$; mostrar que $\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = 1$ y que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}\right)^2 = 0.$$

**3200.** $u = e^x(x\cos y - y \operatorname{sen} y)$. Mostrar que $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

**3201.** $u = \ln \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$; mostrar que $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

**3202.** $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; mostrar que $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$.

**3203.** $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$; mostrar que

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = \frac{2}{r}, \qquad \frac{\partial^2 (\ln r)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\ln r)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (\ln r)}{\partial z^2} = \frac{1}{r^2}.$$

**3204.** ¿ Para qué valor de la constante $a$ la función $v = x^3 + axy^2$ satisface la ecuación $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$?

**3205.** $z = \dfrac{y}{y^2 - a^2x^2}$; mostrar que $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

**3206.** $v = \dfrac{1}{x-y} + \dfrac{1}{y-z} + \dfrac{1}{z-y}$; mostrar que

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + 2\left(\frac{\partial^2 v}{vx\, \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial z\, \partial x}\right) = 0.$$

**3207.** $z = f(x, y)$, $\xi = x + y$, $\eta = x - y$. Comprobar que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\, \partial \eta}.$$

**3208.** $v = x\ln(x+r) - r$, donde $r^2 = x^2 + y^2$. Mostrar que

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{1}{x+r}.$$

**3209.** Hallar la expresión para la segunda derivada $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$ de la función $y$ dada implícitamente por la ecuación $f(x, y) = 0$.

**3210.** $y = \varphi(x - at) + \psi(x + at)$. Mostrar que $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ cualesquiera que sean las funciones $\varphi$ y $\psi$ derivables dos veces.

**3211.** $u=\varphi(x)+\psi(y)+(x-y)\psi'(y)$. Comprobar que

$$(x-y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}$$

($\varphi$ y $\varphi$ son las funciones derivables dos veces).

**3212.** $z=y\varphi(x^2-y^2)$ .Comprobar que $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}$ ($\varphi$ es la función derivable).

**3213.** $r=x\varphi(x+y)+y\psi(x+y)$. Mostrar que

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}=0$$

($\varphi$ y $\psi$ son funciones derivables dos veces).

**3214.** $u=\frac{1}{y}[\varphi(ax+y)+\psi(ax-y)]$. Mostrar que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{a^2}{y^2}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(y^2\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

**3215.** $u=\frac{1}{x}[\varphi(x-y)+\psi(x+y)]$. Mostrar que

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\frac{\partial u}{\partial x}\right)=x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

**3216.** $u=xe^y+ye^x$. Mostrar que

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}=x\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y^2}+y\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y}.$$

**3217.** $u=e^{xyz}$. Mostrar que

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z}=xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+2x\frac{\partial u}{\partial x}+u.$$

**3218.** $u=\ln\frac{x^2-y^2}{xy}$. Mostrar que

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y}-\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y^2}-\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}=2\left(\frac{1}{y^3}-\frac{1}{x^3}\right).$$

En los ejercicios 3219—3224 hallar las diferenciales de segundo orden de las funciones que se dan a continuación.

**3219.** $z=xy^2-x^2y$. **3220.** $z=\ln(x-y)$.

**3221.** $z=\frac{1}{2(x^2+y^2)}$. **3222.** $z=x\operatorname{sen}^2 y$.

**3223.** $z=e^{xy}$. **3224.** $u=xyz$.

**3225.** $z=\operatorname{sen}(2x+y)$. Hallar $d^3z$ en los puntos $(0,\pi)$; $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.