EXAMEN DE REPARACION DE CA - [illegible]

02-06-89

① Determinar los puntos de la superficie

$$x^2 - y^2 + 3z^2 + 2xy - 2x - 2y - 2z - 2 = 0$$

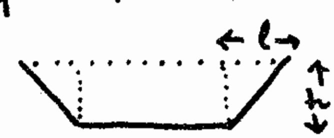
en los cuales el plano tangente es paralelo al plano YZ.

② Pruebe que si $F(x,y)=0 \Rightarrow \dfrac{d^2y}{dx^2} = - \dfrac{F_{xx}F_y^2 - 2F_xF_yF_{xy} + F_{yy}F_x^2}{(F_y)^3}$

Verifique ésta fórmula con un ejemplo.

③ Suponga que z está relacionada con x e y mediante la ecuación $F(x-az,\, y-bz)=0$. Pruebe que $a\dfrac{\partial z}{\partial x} + b\dfrac{\partial z}{\partial y} = 1$

④ La sección trasversal de una canaleta es un trapecio isósceles. Si la canaleta se construye doblando los lados de una franja de metal de 18 cm de ancho, ¿cuáles deberán ser las dimensiones para que el área de la sección trasversal sea máxima?



⑤ Hallar el área de la porción de la superficie $x^2+y^2=2ax$ acotada inferiormente por el plano $z=0$, y superiormente por $x^2+y^2=z^2$.

⑥ Hallar la masa de un cono circular de radio de la base r y altura h, si la densidad en cada punto es proporcional a su distancia al vértice.

⑦ Calcular el área de la porción de la superficie $x^2+y^2=z^2$ situada entre los planos $z=0$, $x+2z=3$.

NOTA: cada pregunta (3) puntos, excepto ① que vale (2) puntos

[illegible]

CALCULO 30 EX. REP. G. G.

① DEMOSTRAR QUE TODO PLANO TANGENTE A LA SUPERFICIE $z^2 = x^2 + y^2$ PASA POR EL PUNTO $(0,0,0)$. (3 PTOS)

② HALLAR EL PARALELEPIPEDO RECTANGULAR DE AREA IGUAL A 24 m^2 Y que TENGA VOLUMEN MAXIMO. (m^3) (3.5 P)

③ SI $z = e^{(y/x)}$, hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ Y COMPROBAR VALOR DE $\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = ?$ (2 PTOS)

④ CALCULAR $\int_0^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^0 \cos(x^2+y^2)\, dy\, dx$. (2 PTOS)

⑤ CALCULAR $\iiint_\Omega \frac{dx\,dy\,dz}{(x+y+z+1)^3}$ donde Ω es un dominio limitado por los planos $x=0, y=0, z=0, x+y+z=1$. (3 PTOS)

⑥ SI $z = x^{xy}$ hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ (2 PTOS)

⑦ Calcular el Volumen del sólido comprendido dentro de la esfera $x^2+y^2+z^2 = 2az$, encima del cono $z^2 = x^2+y^2$ (3.5 ptos)

⑧ Cuales y cuantos vectores existen que sean perpendiculares al plano YZ. (1 PTO)

Cálculo 30. Secciones 08, 09

Exámen Final

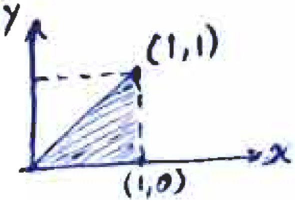
1.- Hallar la ecuacion de la esfera que pasa por los puntos $A(1,3,-2)$ y $B(2,2,2)$; y que se caracteriza además porque su centro está contenido en la recta L.

La recta L está contenida en el plano $\pi: x+y+z=3$, pasa por el punto $P(1,1,1)$ y es perpendicular a la traza del plano π con el plano coordenado xy. (4 ptos.)

2.- De una función $z=f(x,y)$, se sabe que, en el punto $A(1,2)$ la derivada direccional: en la dirección que va desde dicho punto al punto $B(2,3)$, vale $2\sqrt{2}$; mientras que en la dirección que va desde el punto A al $C(1,0)$, vale -3. Se pide, el vector gradiente en el punto A. (4 ptos)

3.- Si $z^3-xz-y=0$, demostrar que: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\dfrac{3z^2+x}{(3z^2-x)^3}$ (4 ptos.)

4.- Evaluar $I=\displaystyle\iint_R \frac{1}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}\,dx\,dy$, donde R es el triángulo siguiente:



(4 ptos)

5.- Hallar el punto mas cercano a $(3,0,0)$ del paraboloide $z=\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}$ (4 ptos.)

1) Si $z = e^{\frac{x}{y}}$, hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ y verificar que: $\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} + y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$.

2) Dada $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$, hallar $\frac{\partial f}{\partial x}(2,-1)$, mediante la definición.

3) Sabiendo que $\cos(3x+4y-2z) = 3x+4y-2z$, hallar $\frac{\partial z}{\partial y}$.

4) Calcular: $\int_{-1}^{0} \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} \operatorname{sen}(x^2+y^2)\, dy\, dx$

5) Hallar los puntos de intersección de la cardiode $r = 2 + 2\cos\theta$ con la circunferencia $r = 1$. Luego, hallar el área de la región dentro de la primera, pero fuera de la segunda.

6) Probar que el plano tangente, en el punto $(1,1,2)$, al paraboloide $3x^2 + 2y^2 = 2z + 1$, y el plano tangente a la esfera $x^2+y^2+z^2-4y-2z+2=0$, en el pto. $(1,1,2)$ son perpendiculares entre sí

7) Calcular $\iiint_R \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dV$, donde R es la región limitada por el plano $\rho\cos\varphi = 1$ y el cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$

8) ¿Es cierto que $f(x,y) = \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} + x + y$ no posee puntos críticos?

① Dada $F(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$, hallar $\dfrac{\partial F}{\partial y}(2,-1)$, mediante la definición.

② Calcular $\displaystyle\int_0^1\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0}\cos(x^2+y^2)\,dy\,dx$.

③ Hallar los puntos de intersección de la circunferencia $r=1$ con la cardiode $r=2+2\,\text{sen}\,\theta$. Luego, hallar el área de la región fuera de la primera, pero dentro de la segunda.

④ Sabiendo que $6x+7y-3z=\cos(6x+7y-3z)$, hallar $\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

⑤ Si $z=e^{\frac{y}{x}}$, hallar $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ y comprobar que:

$$\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=0.$$

⑥ ¿Es cierto que $f(x,y)=3x+3y+x^3+y^3$ no posee puntos críticos?

⑦ Probar que la recta normal, en el punto $(1,1,2)$, a la esfera $x^2+y^2-4y+z^2-2z+2=0$ y la recta normal al paraboloide $2z=3x^2+2y^2-1$, en el punto $(1,1,2)$, son perpendiculares entre sí.

⑧ Calcular $\displaystyle\iiint_W \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dV$, donde W es la región encerrada por el cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$ y el plano (en coordenadas esféricas) $\rho\cos\phi=3$.

1) Calcular, aproximadamente, el valor de:

$$\ln\left(\sqrt[3]{1{,}03} + \sqrt[4]{0{,}98} - 1\right)$$

2) Sabiendo que la ecuación $\operatorname{arctg}(y-3z) = x - 9z$, define a z como función implícita de x e y, hallar el valor de: $9\frac{\partial z}{\partial x} + 3\frac{\partial z}{\partial y}$

3) Sea $z = \operatorname{sen} x + F(u)$, con $u = \operatorname{sen} y - \operatorname{sen} x$, F diferenciable. Hallar el valor de:

$$\frac{\partial z}{\partial y} \cdot \cos x + \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \cos y - (\cos x) \cdot (\cos y)$$

4) Hallar el punto de la superficie $z = x \cdot y - 1$, más próximo al origen.

5) Sea $3 + (x-1)^2 - \sqrt{2}\,(x-1)(y-1) + \frac{1}{2}(y-1)^2 + \cdots$; el comienzo del desarrollo de Taylor, de cierta función F, alrededor de su pto. crítico $(1,1)$. ¿Con sólo esa información, es posible clasificar dicho pto. crítico?

6) De una función f, diferenciable, en (x_0, y_0), se sabe que $f_x(x_0, y_0) = 5$. Hallar los valores que debe tomar $f_y(x_0, y_0)$, para que la derivada direccional máxima de f, en (x_0, y_0), sea igual a 13.

7) Dada la superficie $z = 1 - y^2$, ¿Es cierto que el plano tangente a dicha superficie, en el pto. $(9, 0, 1)$, es perpendicular al eje oz?

① Dada $f(x,y)=bx+4x^2y$, Hallar los valores que debe tomar b, de modo que la derivada direccional maxima, de f, en (1,0), sea igual a 5

② Sea $z = x\,G(y^2-x^2)$, con G diferenrenciable.
Hallar el valor de: $xy\dfrac{\partial z}{\partial x} + x^2\dfrac{\partial z}{\partial y} - yz$

③ Calcular, aproximadamente el valor de $e^{\sqrt{(3{,}97)^2+(3{,}01)^2}-5}$

④ Supongamos que (0,0) es un pto critico de cierta funcion g, cuyo desarrollo de taylor, alrededor del (0,0), comienza asi

$$3-2x^2+3xy+y^2-x^3-x^2y-2xy^2+y^3+$$

Clasificar, si es posible, el Pto critico mencionado

⑤ Sabiendo que la ecuacion $x-4z=tg(y-5z)$ define a z como funcion implicita de x e y, Hallar el valor de: $4\dfrac{\partial z}{\partial x}+5\dfrac{\partial z}{\partial y}$

⑥ Demostrar que las superficies dadas por $x^2+y^2-5z=0$ y $2x^2+2y^2-25=z^2$, son tangentes, entre si, en el Pto $(-3,-4,5)$

⑦ Calcular la distancia mas corta entre las rectas:

$$L_1:\begin{cases}x=2\\ y=7+t\\ z=0\end{cases} \qquad y \qquad L_2:\begin{cases}x=0\\ y=3\\ z=w\end{cases}$$

t parametro w parametro

EXAMEN FINAL CA-30.

15-05-89

① Evalúe $\iint_R \sqrt{x^2-y^2+4}\; d(x,y)$ donde R es el dominio acotado por las hipérbolas $x^2-y^2=1$; $x^2-y^2=4$; $x>0$, y las rectas $y=\pm\frac{1}{2}x$.

② Calcular el área de la parte de la superficie de una esfera de radio $\underline{\underline{a}}$ con centro en el origen, que está dentro de un cilindro cuya base es un lazo de la curva $r=a\cos 3\theta$.

③ Calcular el volumen del sólido comprendido dentro de la esfera $x^2+y^2+z^2=2az$, encima del cono $z^2=x^2+y^2$.

④ Calcular la masa del sólido acotado por $z^2=x^2+y^2$; $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ si la densidad es $\delta(x,y,z)=K\sqrt{x^2+y^2}$.

⑤ Calcular el momento de inercia con respecto al eje OZ, del sólido acotado por $z=x$; $y^2=4-2z$, $x=0$, siendo la densidad constante.

CALCULO 30. EXAMEN DE REPARACION. SECCION C3.

1) Dada $f(x,y) = \ln\left(\frac{y}{x-2}\right)$

a) Hallar y graficar en el plano el dominio de $f(x,y)$ (1pt)

b) Calcular $\lim_{\substack{x \to 2 \\ y \to 0}} f(x,y)$ (1,5pt)

c) Usando la definición, calcular $\frac{\partial f}{\partial x}(3,1)$ (1,5pts)

nota: recordar que $\lim_{p \to 0} \left(\frac{1}{1+p}\right)^{1/p} = e^{-1}$.

2) a) La función $y = f(x)$ está determinada por la ecuación $1 + xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy}) = 0$. Hallar $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ (2pts)

b) Hallar y clasificar los pts críticos de
$f(x,y) = -x + 8y + 2y\sqrt{x} - 3y^2 - 8$ (3pts)

3) a) Evaluar $\iint_R e^{x/y}\, dA$ donde R es la región limitada por las curvas $y^2 = x$, $x = 0$, $y = 1$ (2pts)

b) Evaluar $\iint_R y\, dA$ donde R es el semicírculo superior de diametro a con centro en el pto $C\left(\frac{a}{2}, 0\right)$. (3pts)
(use coordenadas polares)

c) Determinar el volumen del sólido limitado por las superficies $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = 25$, $z = 0$. (2pts)

d) Evaluar $\iiint_D z\, dV$ donde D es el sólido sobre el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y bajo la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ (4pts).

EXAMEN FINAL CA-30
15-05-89

① Evalúe $\iint_R \sqrt{x^2-y^2+4}\, d(x,y)$ donde R es el dominio acotado por las hipérbolas $x^2-y^2=1$; $x^2-y^2=4$; $x>0$, y las rectas $y=\pm\frac{1}{2}x$.

② Calcular el área de la parte de la superficie de una esfera de radio $\underline{a}$ con centro en el origen, que está dentro de un cilindro cuya base es un lazo de la curva $r = a\cos 3\theta$.

③ Calcular el volumen del sólido comprendido dentro de la esfera $x^2+y^2+z^2=2az$, encima del cono $z^2=x^2+y^2$.

④ Calcular la masa del sólido acotado por $z^2=x^2+y^2$, $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ si la densidad es $\delta(x,y,z)=K\sqrt{x^2+y^2}$

⑤ Calcular el momento de inercia con respecto al eje OZ, del sólido acotado por $z=x$; $y^2=4-2z$; $x=0$ siendo la densidad constante.

1) Determinar el valor de:

$$I=\iint_{D_1} y\,dy\,dx \;+\; 8\iiint_{D_2} dz\,dy\,dx \qquad \text{donde}$$

$$D_1=\{(x,y): 1\le x\le e,\ \ 0\le y\le Ln\,x\}$$

$$D_2=\{(x,y,z): 0\le x\le 1,\ \ 0\le y\le 2\sqrt{1-x^2},\ \ 0\le z\le \frac{3}{2}\sqrt{4-4x^2-y^2}\}$$

(5pts)

2) Hallar el volumen del sólido limitado por las superficies:

$z=x+y$, $xy=1$, $xy=2$, $3y=x$, $y=4x$, $z=0$ $(x>0, y>0)$

(5pts)

3) Si la densidad volumétrica varía con el producto de las distancias de los tres planos coordenados, determinar la masa del sólido acotado por: $x=z^2$, $y=x^2$, $x=1$, $y=0$, $z=0$.

(5pts)

4) Calcular la masa de la lámina delimitada exteriormente por $r=3-Cos(\theta)$ e interiormente por $r=5Cos(\theta)$, si la densidad en cualquier punto es $2\,|Sen(\theta)|$.

(5pts)

① Calcular $I = \iiint_{\mathcal{R}} \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\, dV$, donde $\mathcal{R}$ es la región limitada entre las esferas $\rho = 2$ y $\rho = 2e$.

② ¿Cierto o Falso? $\int_0^1 \int_{-1}^{-y} \sqrt{1+x^2}\, dx\, dy = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}$.

③ Hallar el área de la región que está limitada por la circunferencia $r=1$, pero que queda fuera de la región encerrada por la cardiode $r = 1+\operatorname{sen}\theta$.

④ Dadas las superficies: $z^2 = 3r^2$ (en coordenadas cilíndricas) y $\theta = \frac{\pi}{6}$, hallar sus respectivas ecuaciones en coordenadas cartesianas e identificarlas.

⑤ Hallar el volumen del sólido limitado por el paraboloide $z = 3(x^2+y^2)$ y la superficie $z^2 = 3(x^2+y^2)$.

$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}$

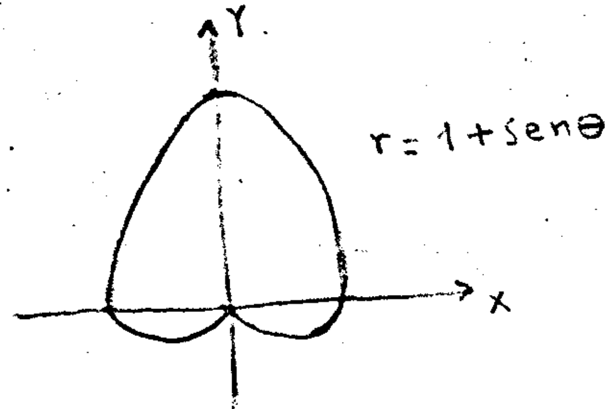
$z = 3r^2$

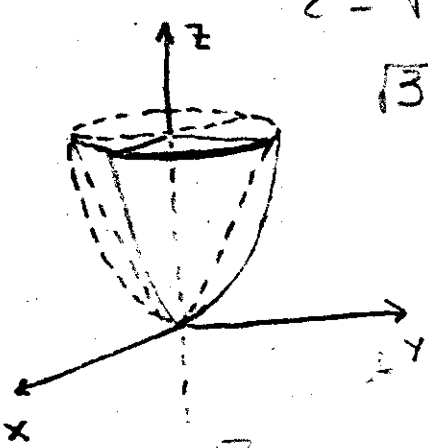
$z = \sqrt{3r^2}$

$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{y}{x}$

$\sqrt{3}\, r = 3r^2$

$y = \frac{\sqrt{3}}{3} x$





$z = 3r^2$

$z = \sqrt{3}\, r$

$3r^2 = r$

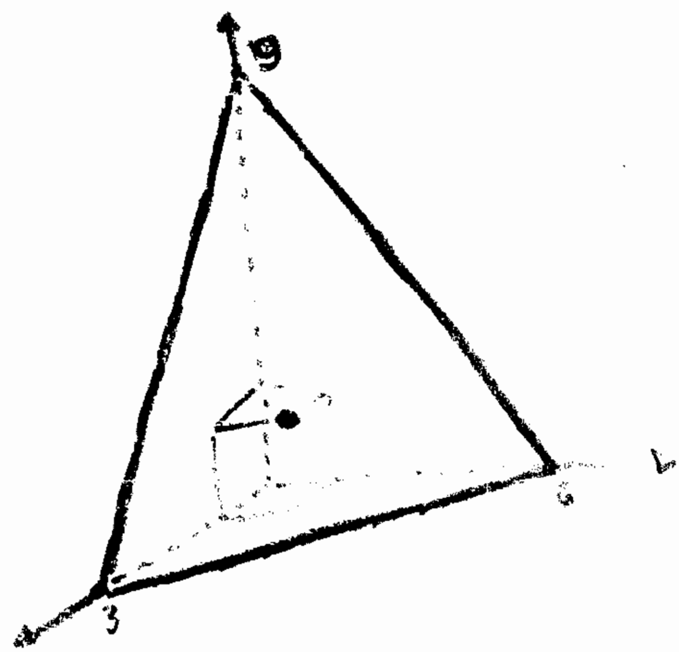
$(3r^2)^2 = 3r^2$

1 → 4
2 → 4
3 → 4
4 → 3
5 → 5

1) Hallar y clasificar los puntos críticos de $F(x,y) = 3x^2 - 2x\sqrt{y} + y - 8x + 8$.

2) Encontrar las dimensiones del paralelepípedo rectangular de volumen máximo, el cual tiene tres de sus caras en los planos coordenados y un vértice en el plano

$6x + 3y + 2z = 18$.



Nota: hacerlo sin usar multiplicadores de Lagrange y, luego, empleándolos.

3) ¿Cierto o Falso?

$$\frac{\cos x}{\cos y} = 1 - \frac{1}{2}(x^2 - y^2) + \cdots$$

$1-e^{y^3}$

$1-e^{y^3}$