Capítulo XII

Integrales múltiples e integración múltiple

§ 1. Integrales dobles y triples

3460. Una placa fina (se prescinde de su espesor) se halla en el plano xOy ocupando el dominio D. La densidad de la placa es función del punto $\gamma = \gamma(P) = \gamma(x, y)$. Hallar la masa de la placa.

3461. Por la misma placa (véase el ejercicio anterior) está distribuida la carga eléctrica de densidad superficial $\sigma = \sigma(P) = \sigma(x, y)$. Formar la expresión para la carga global de la placa.

3462. La misma placa (véase el ejercicio 3460) gira alrededor del eje Ox con la velocidad angular ω. Formar la expresión para la energía cinética de la placa.

3463. El calor específico de la placa (véase el ejercicio 3460) varía de acuerdo con la ley $c = c(P) = c(x, y)$. Hallar la cantidad de calor que recibió la placa al ser calentada desde la temperatura t_1 hasta t_2.

3464. El cuerpo ocupa un cierto dominio Ω en el espacio. Su densidad es función del punto $\gamma = \gamma(P) = \gamma(x, y, z)$. Hallar la masa del cuerpo.

3465. Por el mismo cuerpo (véase el ejercicio 3464) está distribuida, de manera no homogénea, la carga eléctrica cuya densidad es función del punto $\delta = \delta(x, y, z)$. Hallar la carga global del cuerpo.

Evaluar las integrales en los ejercicios 3466—3476.

3466. $\iint\limits_D (x+y+10)\,d\sigma$, donde D es el círculo $x^2+y^2 \leqslant 4$.

3467. $\iint\limits_D (x^2+4y^2+9)\,d\sigma$, donde D es el círculo $x^2+y^2 \leqslant 4$.

3468. $\iint\limits_D (x+y+1)\,d\sigma$, donde D es el rectángulo $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 2$.

3469. $\iint\limits_D (x+xy-x^2-y^2)\,d\sigma$, donde D es el rectángulo $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 2$.

3470. $\iint\limits_D xy(x+y)\,d\sigma$, donde D es el cuadrado $0 \leqslant x \leqslant 2$, $0 \leqslant y \leqslant 2$.

3471. $\iint\limits_D (x+1)^y\,d\sigma$, donde D es el cuadrado $0 \leqslant x \leqslant 2$, $0 \leqslant y \leqslant 2$.

3472. $\iint\limits_D (x^2+y^2-2\sqrt{x^2+y^2}+2)\,d\sigma$, donde D es el cuadrado $0 \leqslant x \leqslant 2$, $0 \leqslant y \leqslant 2$.

3473. $\iint\limits_D (x^2+y^2-4x-4y+10)\,d\sigma$, donde D es el dominio acotado por la elipse $x^2+4y^2-2x-16y+13=0$ (incluyendo la frontera).

3474. $\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2+z^2)\,dv$, donde Ω es la esfera $x^2+y^2+z^2 \leqslant \leqslant R^2$.

3475. $\iiint\limits_\Omega (x+y+z)\,dv$, donde Ω es el cubo $x \geqslant 1$, $y \geqslant 1$, $z \geqslant 1$, $x \leqslant 3$, $y \leqslant 3$, $z \leqslant 3$.

3476. $\iiint\limits_\Omega (x+y-z+10)\,dv$, donde Ω es la esfera $x^2+y^2+ +z^2 \leqslant 3$.

§ 2. Integración múltiple

Integral doble. Dominio rectangular

En los ejercicios 3477—3484 calcular las integrales dobles tomadas sobre los dominios rectangulares de integración D, dados por los datos indicados entre paréntesis.

3477. $\iint\limits_D xy\,dx\,dy \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1,\quad 0 \leqslant y \leqslant 2)$.

3478. $\iint\limits_D e^{x+y}\,dx\,dy \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1,\quad 0 \leqslant y \leqslant 1)$.

3479. $\iint\limits_D \frac{x^2}{1+y^2}\,dx\,dy \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1)$

3480. $\iint\limits_D \frac{dx\,dy}{(x+y+1)^2} \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1).$

3481. $\iint\limits_D \frac{y\,dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1)$

3482. $\iint\limits_D x \operatorname{sen}(x+y)\,dx\,dy \quad \left(0 \leqslant x \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$

3483. $\iint\limits_D x^2ye^{xy}\,dx\,dy \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 2).$

3484. $\iint\limits_D x^2y\cos(xy^2)\,dx\,dy \qquad \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leqslant y \leqslant 2\right).$

Integral doble. Cualquier dominio

En los ejercicios 3485—3497 hallar los límites de la integral iterada de segundo orden $\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy$ siendo dados los dominios finitos de integración D.

3485. Paralelogramo cuyos lados son
$x = 3, \quad x = 5, \quad 3x - 2y + 4 = 0, \quad 3x - 2y + 1 = 0.$

3486. Triángulo cuyos lados son $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 2$.

3487. $x^2 + y^2 \leqslant 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

3488. $x + y \leqslant 1$, $x - y \leqslant 1$, $x \geqslant 0$.

3489. $y \geqslant x^2$, $y \leqslant 4 - x^2$.

3490. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leqslant 1$. 3491. $(x-2)^2 + (y-3)^2 \leqslant 4$.

3492. D está limitado por las parábolas $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$.

3493. Triángulo cuyos lados son $y = x$, $y = 2x$, $x + y = 6$.

3494. Paralelogramo cuyos lados son $y = x$, $y = x + 3$, $y = -2x + 1$, $y = -2x + 5$.

3495. $y - 2x \leqslant 0$, $2y - x \geqslant 0$, $xy \leqslant 2$.

3496. $y^2 \leqslant 8x$, $y \leqslant 2x$, $y \leqslant 4x - 24 \leqslant 0$.

3497. D está limitado por la hipérbola $y^2 - x^2 = 1$ y por la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$ (se tiene en cuenta el dominio que contiene el origen de coordenadas).

En los ejercicios 3498—3503 cambiar el orden de integración.

3498. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{\sqrt{y}} f(x, y)\,dx.$ 3499. $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\,dy.$

3500. $\int\limits_0^r dx \int\limits_x^{\sqrt{2rx-x^2}} f(x, y)\,dy.$ **3501.** $\int\limits_{-2}^2 dx \int\limits_{-\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}} f(x, y)\,dy.$

3502. $\int\limits_1^2 dx \int\limits_x^{2x} f(x, y)\,dy.$ **3503.** $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{2x}^{6-x} f(x, y)\,dy.$

3504. Cambiando el orden de integración escribir la expresión dada en forma de una integral iterada de segundo orden:

1) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x f(x, y)\,dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} f(x, y)\,dy;$

2) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f(x, y)\,dy + \int\limits_1^3 dx \int\limits_0^{\frac{3-x}{2}} f(x, y)\,dy;$

3) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^{2/3}} f(x, y)\,dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{1-\sqrt{4x-x^2-3}} f(x, y)\,dy.$

3505. Representar la integral doble $\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy$, donde D son los dominios indicados en las figs. 62, 63, 64, 65, en forma de

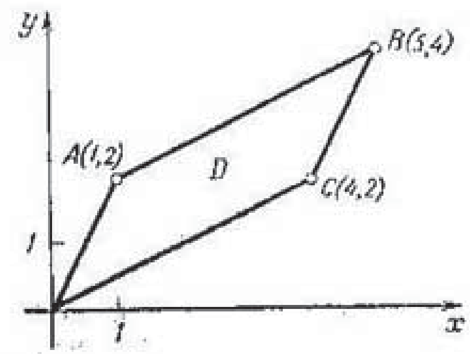

Fig. 62

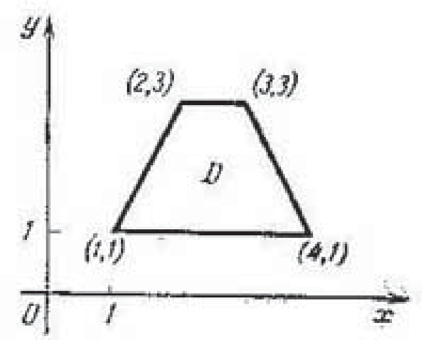

Fig. 63

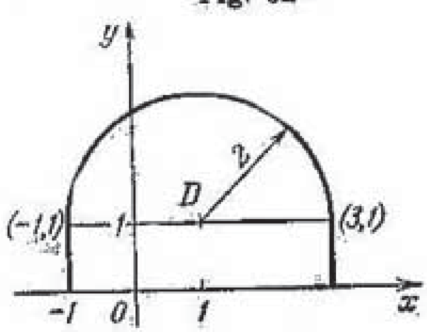

Fig. 64

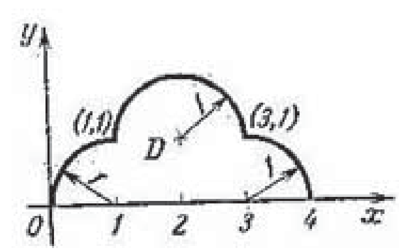

Fig. 65

la suma de las integrales iteradas de segundo orden (con el menor número posible de sumandos). Las figuras de las ilustraciones 64 y 65 representan rectas y arcos de circunferencias.

En los ejercicios 3506—3512 calcular las integrales dadas.

3506. 1) $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{\sqrt{x}} dy$; 2) $\int\limits_2^4 dx \int\limits_x^{2x} \frac{y}{x}\,dy$; 3) $\int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{\ln y} e^x\,dx$.

3507. $\iint\limits_D x^3y^2\,dx\,dy$, D es el círculo $x^2+y^2 \leqslant R^2$.

3508. $\iint\limits_D (x^2+y)\,dx\,dy$, D es un dominio acotado por las parábolas $y=x^2$ e $y^2=x$.

3509. $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}\,dx\,dy$, D es un dominio acotado por las rectas $x=2$, $y=x$ y la hipérbola $xy=1$.

3510. $\iint\limits_D \cos(x+y)\,dx\,dy$, D es un dominio acotado por las rectas $x=0$, $y=\pi$ e $y=x$.

3511. $\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy$, D es la cuarta parte del círculo $x^2+y^2 \leqslant 1$ que se halla en el primer cuadrante.

3512. $\iint\limits_D x^2y^2\sqrt{1-x^3-y^3}\,dx\,dy$, D es un dominio acotado por la línea $x^3+y^3=1$ y los ejes de coordenadas.

3513. Hallar el valor medio de la función $z = 12 - 2x - 3y$ en el dominio acotado por las rectas $12 - 2x - 3y = 0$, $x = 0$, $y = 0$.

3514. Hallar el valor medio de la función $z = 2x + y$ en el triángulo limitado por los ejes de coordenadas y la recta $x + y = 3$.

3515. Hallar el valor medio de la función $z = x + 6y$ en el triángulo limitado por las rectas $y = x$, $y = 5x$ y $x = 1$.

3516. Hallar el valor medio de la función $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ en el círculo $x^2 + y^2 \leqslant R^2$.

Integral triple

En los ejercicios 3517—3524 calcular las integrales.

3517. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^2 dy \int\limits_0^3 dz$. **3518.** $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^b dy \int\limits_0^c (x+y+z)\,dz$.

3519. $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^x dy \int\limits_0^y xyz\,dz.$ **3520.** $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^x dy \int\limits_0^{xy} x^3y^3z\,dz.$

3521. $\int\limits_0^{e-1} dx \int\limits_0^{e-x-1} dy \int\limits_e^{x+y+e} \frac{\ln(z-x-y)}{(x-e)(x+y-e)}\,dz.$

3522. $\iiint\limits_{\Omega} \frac{dx\,dy\,dz}{(x+y+z+1)^3}$, Ω es un dominio limitado por los planos $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$.

3523. $\iiint\limits_{\Omega} xy\,dx\,dy\,dz$, Ω es un dominio limitado por el paraboloide hiperbólico $z=xy$ y los planos $x+y=1$ y $z=0$ $(z \geqslant 0)$.

3524. $\iiint\limits_{\Omega} y\cos(z+x)\,dx\,dy\,dz$, Ω es un dominio limitado por el cilindro $y=\sqrt{x}$ y los planos $y=0$, $z=0$ y $x+z=\pi/2$.

§ 3. Integrales en los sistemas de coordenadas polares, cilíndricas y esféricas

Integral doble

En los ejercicios 3525—3531 pasar a las coordenadas polares ρ y φ $(x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\operatorname{sen}\varphi)$ en la integral doble $\iint\limits_D f(x,\ y)\,dx\,dy$ y apuntar los límites de integración.

3525. D es el círculo: 1) $x^2+y^2 \leqslant R^2$; 2) $x^2+y^2 \leqslant ax$; 3) $x^2+y^2 \leqslant by$.

3526. D es un dominio limitado por las circunferencias $x^2+y^2=4x$, $x^2+y^2=8x$ y las rectas $y=x$, $y=2x$.

3527. D es el dominio que es la parte común de dos círculos $x^2+y^2 \leqslant ax$, $x^2+y^2 \leqslant by$.

3528. D es un dominio limitado por las rectas

$$y=x,\quad y=0\quad \text{y}\quad x=1.$$

3529. D es el menor de los segmentos en que es cortado el círculo $x^2+y^2 \leqslant 4$ por la recta $x+y=2$.

3530. D es la parte interior del lazo derecho de la lemniscata de Bernoulli $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$.

3531. D es un dominio definido por las desigualdades $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $(x^2+y^2)^3 \leqslant 4a^2x^2y^2$.

En los ejercicios 3532—3535 transformar las integrales dobles a las coordenadas polares.

3532. $\int\limits_0^R dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x, y)\, dy.$ **3533.** $\int\limits_{\frac{R}{2}}^{2R} dy \int\limits_0^{\sqrt{2Ry-y^2}} f(x, y)\, dx.$

3534. $\int\limits_0^R dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x^2+y^2)\, dy.$

3535. $\int\limits_0^{\frac{R}{\sqrt{1+R^2}}} dx \int\limits_0^{Rx} f\left(\frac{x}{y}\right) dy + \int\limits_{\frac{R}{\sqrt{1+R^2}}}^{R} dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f\left(\frac{y}{x}\right) dy.$

En los ejercicios 3536—3540 calcular las integrales dobles pasando a las coordenadas polares.

3536. $\int\limits_0^R dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \ln(1+x^2+y^2)\, dy.$

3537. $\iint\limits_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\, dx\, dy$, donde el dominio D viene determinado por las desigualdades $x^2+y^2 \leqslant 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

3538. $\iint\limits_D (h-2x-3y)\, dx\, dy$, donde D es el círculo $x^2+y^2 \leqslant R^2$.

3539. $\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\, dx\, dy$, donde D es el círculo $x^2+y^2 \leqslant Rx$.

3540. $\iint\limits_D \operatorname{arctg} \frac{y}{x}\, dx\, dy$, donde D es una parte del círculo

$$x^2+y^2 \geqslant 1,\ x^2+y^2 \leqslant 9,\ y \geqslant \frac{x}{\sqrt{3}},\ y \leqslant x\sqrt{3}.$$

3541. Partiendo de razonamientos geométricos mostrar que si las coordenadas cartesianas se transforman de acuerdo con las fórmulas $x = a\rho \cos\varphi$, $y = b\rho \operatorname{sen}\varphi$ (a y b son constantes), el elemento de área será el siguiente:

$$d\sigma = ab\rho\, d\rho\, d\varphi.$$

En los ejercicios 3542—3544 transformar las integrales dobles aplicando el resultado del ejercicio anterior y seleccionando a y b de manera conveniente.

3542. $\iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy$, donde el dominio D está limitado por la elipse $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$.

3543. $\iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy$, donde el dominio D está limitado por la línea $\left(x^2+\frac{y^2}{3}\right)^2=x^2y$.

3544. $\iint\limits_D f\left(\sqrt{4-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\right) dx\, dy$, donde D es una parte del anillo elíptico limitada por las elipses $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $\frac{x^2}{4a^2}+\frac{y^2}{4b^2}=1$ y situada en el primer cuadrante.

3545. Calcular la integral $\iint\limits_D xy\, dx\, dy$, donde D es un dominio limitado por la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ y situado en el primer cuadrante.

3546. Calcular la integral $\iint\limits_D \sqrt{xy}\, dx\, dy$, donde D es un dominio limitado por la línea $\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}\right)^4=\frac{xy}{\sqrt{6}}$ y situado en el primer cuadrante.

Integral triple

En los ejercicios 3547 — 3551 pasar a las coordenadas cilíndricas ρ, φ, z ($x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\operatorname{sen}\varphi$, $z=z$) o a las coordenadas esféricas ρ, θ, φ ($x=\rho\cos\varphi\operatorname{sen}\theta$, $y=\rho\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta$, $z=\rho\cos\theta$) en la integral triple $\iiint\limits_\Omega f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$ e indicar los límites de integración.

3547. Ω es un dominio que se halla situado en el primer octante y limitado por el cilindro $x^2+y^2=R^2$ y los planos $z=0$, $z=1$, $y=x$, $y=\sqrt{3}$.

3548. Ω es un dominio limitado por el cilindro $x^2+y^2=2x$, el plano $z=0$ y el paraboloide $z=x^2+y^2$.

3549. Ω es una parte de la esfera $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$ situada en el primer octante.

3550. Ω es una parte de la esfera $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$ situada dentro del cilindro $(x^2+y^2)^2=R^2(x^2-y^2)$ $(x\geqslant 0)$.

3551. Ω es la parte común de dos esferas

$$x^2+y^2+z^2\leqslant R^2 \quad \text{y} \quad x^2+y^2+(z-R)^2\leqslant R^2.$$

En los ejercicios 3552—3558 calcular las integrales pasando a las coordenadas cilíndricas o a las esféricas.

3552. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_0^a dz.$

3553. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int\limits_0^a z\sqrt{x^2+y^2}\,dz.$

3554. $\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} (x^2+y^2)\,dz$

3555. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dz.$

3556. $\iiint\limits_{\Omega} (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$, donde el dominio Ω viene determinado por las desigualdades $z\geqslant 0$, $r^2\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$.

3557. $\iiint\limits_{\Omega} \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}}$, donde Ω es la esfera x^2+y^2+ $+z^2\leqslant 1$.

3558. $\iiint\limits_{\Omega} \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}}$, donde Ω es el cilindro $x^2+y^2\leqslant$ $\leqslant 1$, $-1\leqslant z\leqslant 1$.

§ 4. Aplicaciones de integrales dobles y triples

Volumen del cuerpo. I

En los ejercicios 3559—3596 hallar los volúmenes de los cuerpos limitados por las superficies que se indican, aplicando la integración doble (los parámetros que se indican en los ejercicios se consideran positivos).

3559. Por los planos de coordenadas, los planos $x = 4$ e $y = 4$ y el paraboloide de revolución $z = x^2 + y^2 + 1$.

3560. Por los planos de coordenadas, los planos $x = a$, $y = b$, y el paraboloide elíptico $z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}$.

3561. Por el plano $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ y los planos coordenados (pirámide).

3562. Por los planos $y = 0$, $z = 0$, $3x + y = 6$, $3x + 2y = 12$ y $x + y + z = 6$.

3563. Por el paraboloide de revolución $z = x^2 + y^2$, los planos coordenados y el plano $x + y = 1$.

3564. Por el paraboloide de revolución $z = x^2 + y^2$ y los planos $z = 0$, $y = 1$, $y = 2x$, $y = 6 - x$.

3565. Por los cilindros $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, y los planos $z = 0$, $x + z = 6$.

3566. Por los planos coordenados, el plano $2x + 3y - 12 = 0$ y el cilindro $z = y^2/2$.

3567. Por el cilindro $z = 9 - y^2$, los planos coordenados y el plano $3x + 4y = 12$ $(y \geqslant 0)$.

3568. Por el cilindro $z = 4 - x^2$, los planos coordenados y el plano $2x + y = 4$ $(x \geqslant 0)$.

3569* Por el cilindro $2y^2 = x$, los planos $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 1$ y $z = 0$.

3570. Por el cilindro circular de radio r cuyo eje es el de ordenadas, por los planos coordenados y por el plano $\frac{x}{r} + \frac{y}{a} = 1$.

3571. Por el cilindro elíptico $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, los planos $z = 12 - 3x - 4y$ y $z = 1$.

3572. Por los cilindros $x^2 + y^2 = R^2$ y $x^2 + z^2 = R^2$.

3573. Por los cilindros $z = 4 - y^2$, $y = \frac{x^2}{2}$ y el plano $z = 0$.

3574. Por los cilindros $x^2 + y^2 = R^2$, $z = \frac{x^3}{a^2}$ y el plano $z = 0$ $(x \geqslant 0)$.

3575. Por el paraboloide hiperbólico $z = x^2 - y^2$ y los planos $z = 0$, $x = 3$.

3576. Por el paraboloide hiperbólico $z = xy$, el cilindro $y = \sqrt{x}$ y los planos $x + y = 2$, $y = 0$ y $z = 0$.

3577. Por el paraboloide $z = x^2 + y^2$, el cilindro $y = x^2$ y los planos $y = 1$ y $z = 0$.

3578. Por el cilindro elíptico $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ y los planos $y = \frac{b}{a}x$, $y = 0$ y $z = 0$ $(x \geqslant 0)$.

3579. Por el paraboloide $z = \frac{a^2 - x^2 - 4y^2}{a}$ y el plano $z = 0$.

3580. Por los cilindros $y = e^x$, $x = e^{-x}$, $z = e^2 - y^2$ y el plano $z = 0$.

3581. Por los cilindros $y = \ln x$, $y = \ln^2 x$ y los planos $z = 0$ e $y + z = 1$.

3582*. Por los cilindros $z = \ln x$ y $z = \ln y$ y los planos $z = 0$ y $x + y = 2e$ $(x \geqslant 1)$.

3583. Por los cilindros $y = x + \operatorname{sen} x$, $y = x - \operatorname{sen} x$ y $z = \frac{(x+y)}{4}$ (cilindro parabólico cuyas generatrices son paralelas a la recta $x - y = 0$, $z = 0$) y el plano $z = 0$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi,\ y \geqslant 0)$.

3584. Por la superficie cónica $z^2 = xy$ (véase la fig. 66), el cilindro $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ y el plano $z = 0$.

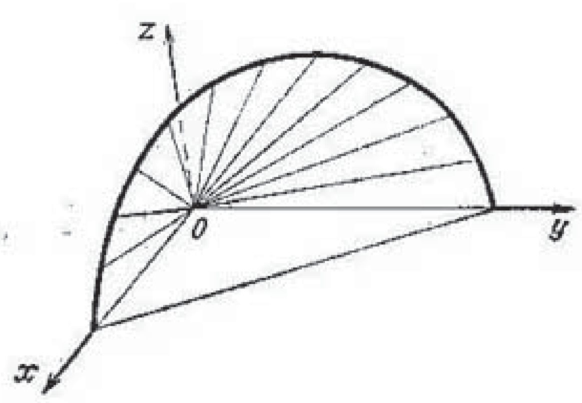

Fig. 66

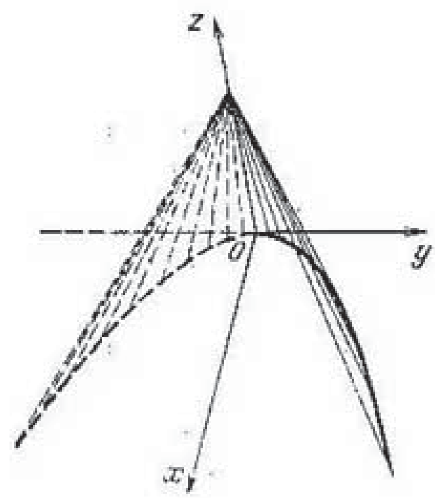

Fig. 67

3585. Por la superficie cónica $4y^2 = x(2 - z)$ (cono parabólico, véase la fig. 67) y los planos $z = 0$ y $x + z = 2$.

3586. Por la superficie $z = \cos x \cdot \cos y$ y los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ y $x + y = \pi/2$.

3587. Por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$, los planos $z = 0$ y $z = x + y + 10$.

3588. Por el cilindro $x^2 + y^2 = 2x$, los planos $2x - z = 0$ y $4x - z = 0$.

3589. Por el cilindro $x^2 + y^2 = R^2$, el paraboloide $Rz = 2R^2 + x^2 + y^2$ y el plano $z = 0$.

3590. Por el cilindro $x^2 + y^2 = 2ax$, el paraboloide $z = \frac{x^2 + y^2}{a}$ y el plano $z = 0$.

3591. Por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y el cilindro $x^2 + y^2 = ax$. (Problema de Viviani).

3592. Por el paraboloide hiperbólico $z = \frac{xy}{a}$, el cilindro $x^2 + y^2 = ax$ y el plano $z = 0$ $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0)$.

3593. Por los cilindros $x^2 + y^2 = x$ y $x^2 + y^2 = 2x$, el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y los planos $x + y = 0$, $x - y = 0$ y $z = 0$.

3594. Por los cilindros $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 2y$ y por los planos $z = x + 2y$ y $z = 0$.

3595. Por la superficie cónica $z^2 = xy$ y el cilindro $(x^2 + y^2)^2 = 2xy$ $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0)$.

3596. Por el helicoide («escalera de caracol») $z = h \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, el cilindro $x^2 + y^2 = R^2$ y los planos $x = 0$, $z = 0$ $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0)$.

Area de la figura plana

En los ejercicios 3597—3608 hallar las áreas de los dominios que se indican efectuando la integración doble.

3597. Del dominio limitado por las rectas $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$.

3598. Del dominio limitado por las rectas $y = x$, $y = 5x$, $x = 1$.

3599. Del dominio limitado por la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

3600. Del dominio comprendido entre la parábola $y^2 = \frac{b^2}{a} x$ y la recta $y = \frac{b}{a} x$.

3601. Del dominio limitado por las parábolas $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, y la recta $x = 4$.

3602*. Del dominio limitado por la línea $(x^2 + y^2)^2 = 2ax^3$.

3603. Del dominio limitado por la línea $(x^2 + y^2)^3 = x^4 + y^4$.

3604. Del dominio limitado por la línea $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$ (lemniscata de Bernoulli).

3605. Del dominio limitado por la línea $x^3 + y^3 = 2xy$ situada en el primer cuadrante (lazo).

3606. Del dominio limitado por la línea $(x + y)^3 = xy$ situada en el primer cuadrante (lazo).

3607. Del dominio limitado por la línea $(x + y)^5 = x^2y^2$ situada en el primer cuadrante (lazo).

3608*. Del dominio limitado por la línea

1) $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{xy}{c^2}$; 2) $\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\right)^2=\frac{x^2+y^2}{25}$.

Volumen del cuerpo. II

En los ejercicios 3609—3625 calcular los volúmenes de los cuerpos limitados por las superficies dadas efectuando la integración triple (los parámetros que se indican en los ejercicios se consideran positivos).

3609. Por los cilindros $z = 4 - y^2$ y $z = y^2 + 2$ y por los planos $x = -1$ y $x = 2$.

3610. Por los paraboloides $z = x^2 + y^2$ y $z = x^2 + 2y^2$ y los planos $y = x$, $y = 2x$ y $x = 1$.

3611. Por los paraboloides $z = x^2 + y^2$ y $z = 2x^2 + 2y^2$, el cilindro $y = x^2$ y el plano $y = x$.

3612. Por los cilindros $z = \ln(x + 2)$ y $z = \ln(6 - x)$ y los planos $x = 0$, $x + y = 2$ y $x - y = 2$.

3613*. Por el paraboloide $(x - 1)^2 + y^2 = z$ y el plano $2x + z = 2$.

3614*. Por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = x + y$.

3615*. Por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y el paraboloide $x^2 + y^2 = 3z$.

3616. Por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ y el paraboloide $x^2 + y^2 = R(R - 2z)$ $(z \geqslant 0)$.

3617. Por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el cono $z^2 = xy$.

3618. Por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4Rz - 3R^2$ y el cono $z^2 = 4(x^2 + y^2)$ (se tiene en cuenta la parte de la esfera situada dentro del cono).

3619*. $(x^2+y^2+z^2)^2 = a^3x$. **3620.** $(x^2+y^2+z^2)^2 = axyz$.

3621. $(x^2+y^2+z^2)^3 = a^2z^4$. **3622.** $(x^2+y^2+z^2)^3 = \frac{a^6z^2}{x^2+y^2}$.

3623. $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = a^2(x^2 + y^2)^2$.

3624. $(x^2 + y^2)^2 + z^4 = a^3z$.

3625. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $z^2 = x^2 + y^2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0)$.

Area de la superficie

3626. Calcular la parte del plano $6x + 3y + 2z = 12$ que está situada en el primer octante.

3627. Calcular el área de la parte de la superficie $z^2 = 2xy$ la cual se halla por encima del rectángulo situado en el plano $z = 0$ y limitado por las rectas $x = 0$, $y = 0$, $x = 3$, $y = 6$.

3628. Hallar el área de la parte del cono $z^2 = x^2 + y^2$ situada por encima del plano Oxy y recortada por el plano $z = \sqrt{2}\left(\frac{x}{2} + 1\right)$.

En los ejercicios 3629—3639 hallar las áreas de las partes indicadas de las superficies dadas.

3629. De la parte $z^2 = x^2 + y^2$ recortada por el cilindro $z^2 = 2py$.

3630. De la parte $y^2 + z^2 = x^2$ situada dentro del cilindro $x^2 + y^2 = R^2$.

3631. De la parte $y^2 + z^2 = x^2$ recortada por el cilindro $x^2 - y^2 = a^2$ y los planos $y = b$, $y = -b$.

3632. De la parte $z^2 = 4x$ recortada por el cilindro $y^2 = 4x$ y el plano $x = 1$.

3633. De la parte $z = xy$ recortada por el cilindro $x^2 + y^2 = R^2$.

3634. De la parte $2z = x^2 + y^2$ recortada por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

3635. De la parte $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ recortada por el cilindro $x^2 + y^2 = R^2$ $(R \leqslant a)$.

3636. De la parte $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ recortada por el cilindro $x^2 + y^2 = Rx$.

3637. De la parte $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ recortada por la superficie $(x^2 + y^2)^2 = R^2(x^2 - y^2)$.

3638. De la parte $z = \frac{x+y}{x^2+y^2}$ recortada por las superficies $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$ que está situada en el primer octante.

3639. De la parte $(x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha)^2 + z^2 = a^2$ situada en el primer octante $(\alpha < \pi/2)$.

3640*. Calcular el área de la superficie terrestre (considerándola esférica y siendo su radio $R \approx 6400$ km) comprendida entre los meridianos $\varphi = 30°$, $\varphi = 60°$ y los paralelos $\theta = 45°$ y $\theta = 60°$.

3641. Calcular el área total de la superficie del cuerpo limitado por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$ y el paraboloide $x^2 + y^2 = 2az$ $(z \geqslant 0)$.

3642. Los ejes de dos cilindros iguales, de radio R, se cortan formando el ángulo recto. Hallar el área de la parte de la superficie de uno de los dos cilindros, la cual se halla dentro del otro cilindro.

Momentos y centro de gravedad

En los ejercicios 3643—3646 hallar los momentos estáticos de las figuras planas homogéneas aplicando la integración doble (la densidad $\gamma = 1$).

3643. Del rectángulo de lados a y b, respecto al lado a.

3644. Del semicírculo respecto al diámetro.

3645. Del círculo respecto a una tangente.

3646. Del hexágono regular respecto a su lado.

3647. Demostrar que el momento estático del triángulo de base a, respecto a esta base depende sólo de la altura del mismo.

En los ejercicios 3648—3652 hallar los centros de gravedad de las figuras planas homogéneas efectuando la integración doble.

3648. De la figura limitada por la mitad superior de la elipse la cual se apoya en el eje mayor.

3649. De la figura limitada por la sinusoide $y = \operatorname{sen} x$, el eje Ox y la recta $x = \pi/4$.

3650. Del sector circular correspondiente al ángulo central α (el radio del círculo es igual a R).

3651. Del segmento circular correspondiente al ángulo central α (el radio del círculo es igual a R).

3652. De la figura limitada por la línea cerrada $y^2 = x^2 - x^4$ $(x \geqslant 0)$.

En los ejercicios 3653—3659 hallar los momentos de inercia de las figuras planas homogéneas (la densidad $\gamma = 1$).

3653. Del círculo de radio R, con respecto a su tangente.

3654. Del cuadrado, de lado a, con respecto a su vértice.

3655. De la elipse con respecto a su centro.

3656. Del rectángulo, de lados a y b, con respecto al punto de intersección de las diagonales.

3657. Del triángulo isósceles, de base a y la altura h, con respecto a su vértice.

3658. Del círculo de radio R con respecto al punto situado sobre su circunferencia.

3659. Del segmento de la parábola cuya cuerda es perpendicular al eje, con respecto al vértice de la parábola (la longitud de la cuerda es igual a a, la flecha, h).

3660. Demostrar que el momento de inercia del anillo circular, con respecto al centro, es dos veces mayor que el momento de inercia con respecto a cualquier eje que pasa por el centro del anillo y se halla situado en su plano.

3661. Demostrar que la suma de los momentos de inercia de la figura plana F, con respecto a cualquier par de ejes perpendiculares entre sí, que se hallan situados en el mismo plano que la figura y que pasan por un punto inmóvil O, es una magnitud constante.

3662*. Demostrar que el momento de inercia de la figura plana, con respecto a un eje es igual a $Md^2 + I_c$, donde M es la masa distribuida por la superficie, d es la distancia que media entre el eje y el centro de gravedad de la figura, I_c es el momento de inercia con respecto al eje que es paralelo al eje dado y que pasa por el centro de gravedad de la figura (teorema de Steiner).

En los ejercicios 3663—3665 hallar los momentos estáticos de los cuerpos homogéneos (la densidad $\gamma = 1$).

3663. Del paralelepípedo recto, de aristas a, b y c, con respecto a sus caras.

3664. Del cono circular recto (el radio de la base es R, la altura H), con respecto al plano que pasa por el vértice siendo paralelo a la base.

3665. Del cuerpo limitado por el elipsoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ y el plano Oxy con respecto a este mismo.

En los ejercicios 3666—3672 hallar los centros de gravedad de los cuerpos homogéneos limitados por los planos dados.

3666. Por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 2$, $y = 4$ y $x + y + z = 8$ (paralelepípedo truncado).

3667. Por el elipsoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ y los planos coordenados (se tiene en cuenta el cuerpo situado en el primer octante).

3668. Por el cilindro $z = \frac{y^2}{2}$ y los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ y $2x + 3y - 12 = 0$.

3669. Por los cilindros $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$ y los planos $z = 0$ y $x + z = 6$.

3670. Por el paraboloide $z = \frac{x^2+y^2}{2a}$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$ $(z \geqslant 0)$.

3671. Por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ y el cono $z \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{x^2 + y^2}$ (sector esférico).

3672. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3z$.

En los ejercicios 3673—3674 hallar los centros de gravedad de las superficies homogéneas.

3673. De la parte de la esfera situada en el primer octante.

3674. De la parte del paraboloide $x^2 + y^2 = 2z$ recortada por el plano $z = 1$.

En los ejercicios 3675—3680 hallar los momentos de inercia de los cuerpos homogéneos cuya masa es igual a M.

3675. Del paralelepípedo recto, de aristas a, b, y c, con respecto a cada una de las mismas y con respecto al centro de gravedad.

3676. De la esfera con respecto a una tangente recta.