§ 3. Ecuaciones de segundo orden y de órdenes superiores

Casos particulares de las ecuaciones de segundo orden

En los ejercicios 4155—4182 hallar las soluciones generales de las ecuaciones que se indican.

4155. $y'' = x + \operatorname{sen} x$. **4156.** $y'' = \operatorname{arctg} x$.
4157. $y'' = \ln x$. **4158.** $xy'' = y'$.

4159. $y'' = y' + x$. **4160.** $y'' = \frac{y'}{x} + x$.

4161. $(1 + x^2)\,y'' + (y')^2 + 1 = 0$.

4162. $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$.

4163. $(y'')^2 = y'$. **4164.** $2xy'y'' = (y')^2 + 1$.
4165. $y'' - 2 \operatorname{ctg} x \cdot y' = \operatorname{sen}^3 x$.
4166. $1 + (y')^2 = 2yy''$.
4167. $(y')^2 + 2yy'' = 0$. **4168.** $a^2y'' - y = 0$.

4169. $y'' = \frac{1}{4\sqrt{y}}$. **4170.** $y'' + \frac{2}{1-y}(y')^2 = 0$.

4171. $yy'' + (y')^2 = 1$. **4172.** $yy'' = (y')^2$.
4173. $2yy'' - 3(y')^2 = 4y^2$.
4174. $y(1 - \ln y)\,y'' + (1 + \ln y)(y')^2 = 0$.
4175. $y'' = 2yy'$.

4176. $\cos y \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + \operatorname{sen} y \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{dy}{dx}$.

4177. $yy'' - (y')^2 = y^2y'$.
4178. $yy'' - yy' \ln y = (y')^2$.

4179. $y'' = y'\left(\frac{y'}{y} - 2\sqrt{\frac{y'}{y} - 4}\right)$.

4180. $(x + a)\,y'' + x(y')^2 = y'$.

4181*. $yy'y'' = (y')^3 + (y'')^2$.

4182. $xy'' - \frac{1}{4}(y'')^2 - y' = 0$.

En los ejercicios 4183—4188 resolver las ecuaciones mediante una sustitución conveniente: $yy' = p$, $(y')^2 = p$, $xy' = p$, $\frac{y'}{y} = p$, etc.

4183. $xyy'' + x(y')^2 = 3yy'$. **4184.** $xy'' = y'(e^y - 1)$.

4185. $yy'' + (y')^2 = x$. **4186.** $y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{y}{x^2} = 0$.

4187. $x^2y\frac{d^2y}{dx^2} - \left(x\frac{dy}{dx} - y\right)^2 = 0$.

4188. $yy'' = y'(2\sqrt{yy'} - y')$.

En los ejercicios 4189—4199 hallar las soluciones particulares de las ecuaciones para las condiciones iniciales que se indican.

4189. $y''(x^2+1)=2xy'$; $\quad y|_{x=0}=1, \quad y'|_{x=0}=3.$

4190. $xy''+x(y')^2-y'=0$; $\quad y|_{x=2}=2, \quad y'|_{x=2}=1.$

4191. $y''=\frac{y'}{x}+\frac{x^2}{y'}$; $\quad y|_{x=0}=0, \quad y'|_{x=2}=4.$

4192. $2y''=3y^2$; $\quad y|_{x=-2}=1, \quad y'|_{x=-2}=-1.$

4193. $yy''=(y')^2-(y')^3$; $\quad y|_{x=1}=1, \quad y'|_{x=1}=-1.$

4194. $y^3y''=-1$; $\quad y|_{x=1}=1, \quad y'|_{x=1}=0.$

4195. $y^4-y^3y''=1$; $\quad y|_{x=0}=\sqrt{2}, \quad y'|_{x=0}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$

4196. $y''=e^{2y}$; $\quad y|_{x=0}=0, \quad y'|_{x=0}=1.$

4197. $2(y')^2=y''(y-1)$; $\quad y|_{x=1}=2, \quad y'|_{x=1}=-1.$

4198*. $x^4y''=(y-xy')^3$; $\quad y|_{x=1}=1, \quad y'|_{x=1}=1.$

4199. $y''=xy'+y+1$; $\quad y|_{x=0}=1, \quad y'|_{x=0}=0.$

4200*. ¿Cuál es la línea cuya propiedad consiste en que el radio de curvatura en cualquier punto es proporcional a la longitud de la normal? Considerar el coeficiente de proporcionalidad igual a $k=-1, +1, -2, +2$.

4201. Hallar la línea para la cual la proyección del radio de curvatura sobre el eje Oy sea una constante igual a a.

4202. Hallar la línea que pase por el origen de coordenades y para la cual el área del triángulo MTP (véase la fig. 70) engendrado por la tangente en un punto M de la línea buscada, por la ordenada MP de este punto y por el eje de abscisas, y el área del triángulo mixtilíneo OMP, están en razón constante e igual al número k $\left(k>\frac{1}{2}\right)$.

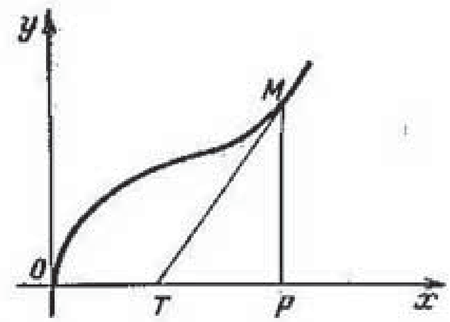

Fig. 70

4203. Hallar la línea para la cual la longitud del arco medida desde un cierto punto, es proporcional al coeficiente angular de la tangente al punto extremo del arco.

4204. Un punto de masa m es lanzado hacia arriba verticalmente, con la velocidad inicial v_0. La fuerza de resistencia del aire es igual a kv^2. Si consideramos la vertical como el eje Oy, para el movimiento dirigido hacia arriba tendremos:

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=-mg-kv^2,$$

y para la caída tendremos:

$$m\frac{d^2y}{dt} = -mg + kv^2,$$

donde $v = \frac{dy}{dt}$. Hallar la velocidad del cuerpo en el momento en que efectúa la caída.

4205. Un hilo flexible y no extensible es suspendido por sus dos extremos. ¿Cuál sería la forma que adoptase, en estado de equilibrio, el hilo bajo la acción de una carga distribuida uniformemente a lo largo de la proyección del hilo sobre el plano horizontal? Se prescinde del peso del hilo.

4206. Hallar la ley del movimiento rectilíneo efectuado por un punto material de masa m si se sabe que el trabajo realizado por la fuerza que tiene la misma dirección que el movimiento y que depende del trayecto, es proporcional al tiempo transcurrido desde que comenzó. El coeficiente de proporcionalidad es igual a k.

4207*. Un rayo de luz, procedente del aire (índice de refracción m_0) incide sobre un líquido cuyo índice de refracción es variable. El ángulo de incidencia formado entre la vertical y la dirección del rayo es α_0. El índice de refracción del líquido depende linealmente de la profundidad y es constante en el plano paralelo al horizonte, mientras que a la superficie del líquido es igual a m_1, a la profundidad h, igual a m_2. Hallar la forma del rayo de luz en el líquido. (El índice de refracción del medio es inversamente proporcional a la velocidad de la propagación de luz.)

Casos particulares de las ecuaciones de órdenes superiores

En los ejercicios 4208—4217 hallar las soluciones generales de las ecuaciones:

4208. $y''' = \frac{1}{x}$. **4209.** $y''' = \cos 2x$.

4210. $y^{\mathrm{X}} = e^{ax}$. **4211.** $x^2 y''' = (y'')^2$.

4212. $xy^{\mathrm{V}} = y^{\mathrm{IV}}$. **4213.** $y''' = (y'')^3$.

4214. $y'y''' = 3(y'')^2$. **4215.** $yy''' - y'y'' = 0$.

4216. $y'''[1 + (y')^2] = 3y'(y'')^2$.

4217. $(y'')^2 - y'y''' = \left(\frac{y'}{x}\right)^2$.

Soluciones aproximadas

4218. Al estudiar las oscilaciones de un sistema material de un grado de libertad, se presenta la ecuación diferencial de la siguiente forma $y'' = f_1(x) + f_2(y) + f_3(y')$. Resolver esta ecuación gráficamente, si

1) $f_1(x) = 0$, $f_2(y) = -\sqrt{y}$, $f_3(y') = 0{,}5y'$ e $y|_{x=0} = y'|_{x=0} = 0$;

2) $f_1(x) = -x$, $f_2(y) = 0$, $f_3(y') = -0{,}1y' - 0{,}1y'^3$ e $y|_{x=0} = y'|_{x=0} = 1$.

4219. $y'' = yy' - x^2$; $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = 1$.

1) Resolver esta ecuación gráficamente.

2) Hallar varios primeros términos de desarrollo de la solución en serie de potencias.

4220. Hallar los seis primeros términos de desarrollo en serie de la solución de la ecuación diferencial $y'' = \frac{y'}{y} - \frac{1}{x}$ que satisface las condiciones iniciales $y|_{x=1} = 1$, $y'|_{x=1} = 0$.

4221. Hallar la solución particular de la ecuación $y'' = x \operatorname{sen} y'$, buscándola en forma de serie de potencias, que satisface las condiciones iniciales $y|_{x=1} = 0$, $y'|_{x=1} = \frac{\pi}{2}$. (Limitarse a seis primeros términos.)

4222. Hallar la solución particular $y = f(x)$ de la ecuación $y'' = xyy'$, buscándola en forma de serie de potencias. La solución satisface las condiciones iniciales $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$. Si se limita a los cinco primeros términos de desarrollo, ¿son bastantes para calcular $f(-0{,}5)$ con exactitud hasta 0,001?

4223. Hallar los siete primeros términos de desarrollo en serie de la solución de la ecuación diferencial $yy'' + y' + y = 0$, que satisface las condiciones iniciales $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = 0$. ¿De qué orden infinitesimal es la diferencia $y - (2 - x - e^{-x})$ para $x \to 0$?

4224. Hallar los 12 primeros términos de desarrollo en serie de la solución de la ecuación diferencial $y'' + yy' - 2 = 0$, que satisface las condiciones iniciales $y|_{x=0} = 0$, $y'|_{x=0} = 0$. Calcular la integral $\int_0^1 y\,dx$ con exactitud hasta 0,001. Calcular $y'|_{x=0,5}$ con exactitud hasta 0,00001.

4225*. Un circuito eléctrico está compuesto de la inductancia $L = 0{,}4$ henrios y un baño eléctrico, los cuales están conectados sucesivamente. El baño contiene 1 litro del agua acidulada con un poco de ácido sulfúrico. La corriente eléctrica descompone el agua debido a lo cual cambian la concentración y, como consecuencia, la resistencia de la disolución en el baño. La tensión en los bornes se mantiene constante (20 V). La cantidad de sustancia desprendida durante la electrólisis es proporcional a la corriente, al tiempo y al equivalente electroquímico de la sustancia (ley de Faraday). El equivalente electroquímico del agua es igual a 0,000187 g/C. Al comienzo del experimento la resistencia de la disolución fue igual a $R_0 = 2\Omega$, la corriente inicial, 10 A. Hallar la depedencia (en forma de una serie de potencias) entre el volumen del agua en el recipiente y entre el tiempo.

4226*. Un circuito eléctrico está compuesto de la inductancia $L = 0{,}4$ henrios y un baño eléctrico, los cuales están conectados sucesivamente. La resistencia inicial del líquido en el baño fue igual a 2 ohmios. Un litro del agua en el baño lleva disueltos 10 g de cloruro de hidrógeno. La corriente eléctrica descompone el ácido, cambiando la concentración de la disolución (compárese con el ejercicio anterior en que cambia no la cantidad de sustancia disuelta, sino el volumen del disolvente). La tensión en los bornes es igual a 20 V, el equivalente electroquímico k del cloruro de hidrógeno es igual a 0,000381 g/C, la corriente inicial, 10 A. Hallar la dependencia (en forma de una serie de potencias) entre la cantidad del ácido clorhídrico en la disolución y el tiempo.

§ 4. Ecuaciones lineales

4227. Las funciones x^3 y x^4 satisfacen cierta ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden. Comprobar que constituyen el sistema fundamental y formar la ecuación.

4228. Lo mismo, con respecto a las funciones e^x y x^2e^x.

4229. Las funciones x, x^3, e^x forman el sistema fundamental de soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea de tercer orden. Formar esta ecuación.

4230. Las funciones x^2 y x^3 forman el sistema fundamental de soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden. Hallar la solución de esta ecuación que satisfaga las condiciones iniciales $y\,|_{x=1} = 1$, $y'\,|_{x=0} = 0$.

4231. Las funciones $\cos^2 x$ y $\operatorname{sen}^2 x$ satisfacen cierta ecuación lineal homogénea de segundo orden:

a) comprobar que forman el sistema fundamental de soluciones;

b) formar la ecuación;

c) mostrar que las funciones 1 y $\cos 2x$ son otro sistema fundamental de esta misma ecuación.

4232*. Si y_1 es la solución particular de la ecuación

$$y'' + y'P(x) + yQ(x) = 0,$$

entonces,

$$y_2 = Cy_1 \int e^{-\int P(x)dx} \frac{dx}{y_1^2}$$

(C es una constante) también es la solución. Mostrar esto aplicando tres métodos:

1) probando directamente, 2) sustituyendo $y = y_1z$, 3) valiéndose de la fórmula de Ostrogradski.

4233. Hallar la solución general de la ecuación $(1 - x^2) y'' - 2xy' + 2y = 0$, conociendo su solución particular $y_1 = x$ y valiéndose de la fórmula del ejercicio 4232.

4234. Resolver la ecuación $y'' + \frac{2}{x} y' + y = 0$ conociendo su solución particular $y_1 = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$.

4235. La ecuación $(2x - x^2) y'' + (x^2 - 2) y' + 2 (1 - x) y = 0$ tiene la siguiente solución: $y = e^x$. Hallar la solución de la ecuación que satisfaga las condiciones iniciales $y|_{x=1} = 0$, $y'|_{x=1} = 1$.

4236*. Hallar la condición necesaria y suficiente para que la ecuación $y'' + y'P(x) - yQ(x) = 0$ tenga dos soluciones linealmente independientes y_1 e y_2 que satisfacen la condición $y_1 y_2 = 1$.

4237*. Hallar la solución general de la ecuación

$$(1 - x^2) y'' - xy' + 9y = 0,$$

si su solución particular es un polinomio de tercer grado.

En los ejercicios 4238—4240 es fácil dar con una solución particular (sin tener en cuenta la solución trivial $y = 0$) para la ecuación dada. Hallar las soluciones generales de estas ecuaciones.

4238. $y'' - \operatorname{tg} x \cdot y' + 2y = 0$. 4239. $y'' - y' + \frac{y}{x} = 0$.

4240. $y'' - \frac{2x}{x^2+1} y' + \frac{2y}{x^2+1} = 0$.

4241. Hallar la solución general de la ecuación

$$x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = 0,$$

conociendo las soluciones particulares $y_1 = x$, $y_2 = x^2$.

En los ejercicios 4242—4244 hallar las soluciones generales de las ecuaciones no homogéneas.

4242. $x^2 y'' - xy' + y = 4x^3$.

4243. $y'' - \frac{x}{x-1} y' + \frac{1}{x-1} y = x - 1$.

4244. $(3x + 2x^2) y'' - 6 (1 + x) y' + 6y = 6$.

4245. La ecuación $(1 + x^2) y'' + 2xy' - 2y = 4x^2 + 2$ es susceptible de tener la siguiente solución particular: $y = x^2$. Hallar la solución de esta ecuación que satisfaga las condiciones $y|_{x=-1} = 0$, $y'|_{x=-1} = 0$.

4246. Hallar los seis primeros términos de desarrollo en serie de potencias de la solución de la ecuación diferencial $y'' - (1 + x^2) y = 0$ que satisfaga las condiciones iniciales $y|_{x=0} = -2$, $y'|_{x=0} = 2$.

4247. Hallar los nueve primeros términos de desarrollo en serie de potencias de la solución de la ecuación diferencial $y'' = x^2 y - y'$ que satisfaga las condiciones iniciales $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = 0$.

4248. Escribir en forma de serie de potencias la solución particular de la ecuación $y'' - xy' + y - 1 = 0$, $y|_{x=0} = 0$, $y'|_{x=0} = 0$.

4249. Escribir en forma de serie de potencias la solución general de la ecuación $y'' = ye^x$. (Limitarse a los seis primeros términos.)

4250. Escribir en forma de serie de potencias la solución general de la ecuación $y'' + xy' - x^2y = 0$. (Limitarse a los seis primeros términos).

Ecuaciones con coeficientes constantes

En los ejercicios 4251—4261 hallar las soluciones generales de las ecuaciones.

4251. $y'' + y' - 2y = 0$. **4252.** $y'' - 9y = 0$.

4253. $y'' - 4y' = 0$. **4254.** $y'' - 2y' - y = 0$.

4255. $3y'' - 2y' - 8y = 0$. **4256.** $y'' + y = 0$.

4257. $y'' + 6y' + 13y = 0$. **4258.** $4y'' - 8y' + 5y = 0$.

4259. $y'' - 2y' + y = 0$. **4260.** $4\frac{d^2x}{dt^2} - 20\frac{dx}{dt} + 25x = 0$.

4261. $2y'' + y' + 2\operatorname{sen}^2 15^\circ \cos^2 15^\circ y = 0$.

En los ejercicios 4262—4264 hallar las soluciones de las ecuaciones que satisfagan las condiciones iniciales que se indican.

4262. $y'' - 4y' + 3y = 0$; $y|_{x=0} = 6$, $y'|_{x=0} = 10$.

4263. $y'' + 4y' + 29y = 0$; $y|_{x=0} = 0$, $y'|_{x=0} = 15$.

4264. $4y'' + 4y' + y = 0$; $y|_{x=0} = 2$, $y'|_{x=0} = 0$.

4265. Sea dada la solución paricular de cierta ecuación lineal homogénea de segundo orden, con coeficientes constantes $y_1 = e^{mx}$. El discriminante de la correspondiente ecuación característica es igual a cero. Hallar la solución particular de esta ecuación diferencial, la cual, junto con su derivada, se reduce a 1 para $x = 0$.

4266. Hallar la curva integral de la ecuación $y'' + 9y = 0$ que pase por el punto $M(\pi, -1)$ y que toque la recta $y + 1 = x - \pi$ en este mismo punto.

4267. Hallar la curva integral de la ecuación $y'' + ky = 0$, que pase por el punto $M(x_0, y_0)$ y que toque la recta $y - y_0 = a(x - x_0)$ en este mismo punto.

En los ejercicios 4268—4282 formar las soluciones generales de las ecuaciones no homogéneas buscando sus soluciones particulares mediante la selección conveniente o bien aplicando el método de variación de las constantes arbitrarias.

4268. $2y'' + y' - y = 2e^x$. **4269.** $y'' + a^2y = e^x$.

4270. $y'' - 7y' + 6y = \operatorname{sen} x$. **4271.** $y'' + 2y' + 5y = -\frac{17}{2}\cos 2x$.

4272. $y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3$.

4273. $y'' - 2y' + 2y = 2x$. **4274.** $y'' + 4y' - 5y = 1$.

4275. $y'' - 3y' + 2y = f(x)$, si $f(x)$ es igual a:

1) $10e^{-x}$; 2) $3e^{2x}$; 3) $2\operatorname{sen} x$; 4) $2x^3 - 30$; 5) $2e^x \cos\frac{x}{2}$;

6) $x - e^{-2x} + 1$; 7) $e^{x}(3 - 4x)$; 8) $3x + 5\,\text{sen}\,2x$;
9) $2e^{x} - e^{-2x}$; 10) $\text{sen}\,x\,\text{sen}\,2x$; 11) $\text{sh}\,x$.

4276. $2y'' + 5y' = f(x)$, si $f(x)$ es igual a:
1) $5x^2 - 2x - 1$; 2) e^{x}; 3) $29\cos x$; 4) $\cos^2 x$;
5) $0{,}1e^{-2{,}5x} - 25\,\text{sen}\,2{,}5\,x$; 6) $29x\,\text{sen}\,x$; 7) $100x\cdot e^{-x}\cos x$;
8) $3\cdot\text{ch}\,\frac{5}{2}x$.

4277. $y'' - 4y' + 4y = f(x)$, si $f(x)$ es igual a:
1) 1; 2) e^{-x}; 3) $3e^{2x}$; 4) $2(\text{sen}\,2x + x)$; 5) $\text{sen}\,x\cos 2x$;
6) $\text{sen}^3 x$; 7) $8(x^2 + e^{2x} + \text{sen}\,2x)$; 8) $\text{sh}\,2x$;
9) $\text{sh}\,x + \text{sen}\,x$; 10) $e^{x} - \text{sh}\,(x - 1)$.

4278. $y'' + y = f(x)$, si $f(x)$ es igual a:
1) $2x^3 - x + 2$; 2) $-8\cos 3x$; 3) $\cos x$; 4) $\text{sen}\,x - 2e^{-x}$;
5) $\cos x\cos 2x$; 6) $24\,\text{sen}^4 x$; 7) $\text{ch}\,x$.

4279. $5y'' - 6y' + 5y = f(x)$, si $f(x)$ es igual a:
1) $5e^{\frac{3}{5}x}$; 2) $\text{sen}\,\frac{4}{5}x$; 3) $e^{2x} + 2x^3 - x + 2$; 4) $e^{\frac{3}{5}}\cdot\cos x$;
5) $e^{\frac{3}{5}}\cdot\text{sen}\,\frac{4}{5}x$; 6) $13\,e^{x}\cdot\text{ch}\,x$.

4280. $y'' + y + \text{ctg}^2 x = 0$. **4281.** $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^{x}}{x^2+1}$.

4282. $y'' - y' = f(x)$, si $f(x)$ es igual a:
1) $\dfrac{e^{x}}{1+e^{x}}$; 2) $e^{2x}\sqrt{1 - e^{2x}}$; 3) $e^{2x}\cos e^{x}$.

En los ejercicios 4283—4287 hallar las soluciones particulares de las ecuaciones que satisfagan las condiciones iniciales que se indican.

4283. $4y' + 16y' + 15y = 4e^{-\frac{3}{2}x}$; $y|_{x=0} = 3$, $y|_{x=0} = -5{,}5$.

4284. $y'' - 2y' + 10y = 10x^2 + 18x + 6$; $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = 3{,}2$.

4285. $y'' - y' = 2(1 - x)$; $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = 1$.

4286. $y'' - 2y' = e^{x}(x^2 + x - 3)$; $y|_{x=0} = 2$, $y'|_{x=0} = 2$.

4287. $y'' + y + \text{sen}\,2x = 0$; $y|_{x=\pi} = y'|_{x=\pi} = 1$.

4288*. Mostrar que la solución particular $\bar{y}$ de la ecuación $a_0y'' + a_1y' + a_2y = Ae^{px}$ (a_0, a_1, a_2 son los coeficientes constantes, p y A son los números reales o complejos) tiene la forma $\bar{y} = \dfrac{A}{\varphi(p)}e^{px}$, si p no es la raíz de la ecuación característica $\varphi(r) \equiv a_0r^2 + a_1r + a_2 = 0$; $\bar{y} = \dfrac{Ax}{\varphi'(p)}e^{px}$, si p es la raíz simple de la ecuación característica; $\bar{y} = \dfrac{Ax^2}{\varphi''(p)}e^{px}$, si p es la raíz doble de la ecuación característica.

En los ejercicios 4289—4292 hallar las soluciones generales de las ecuaciones de Euler.

4289. $x^2y'' - 9xy' + 21y = 0$. **4290.** $x^2y'' + xy' + y = x$.

4291. $y'' - \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = \frac{2}{x}$.

4292. $x^2y'' - 2xy' + 2y + x - 2x^3 = 0$.

4293. Si el eje del árbol de una turbina está colocado horizontalmente y si el centro de gravedad de un disco que lleva el árbol, no

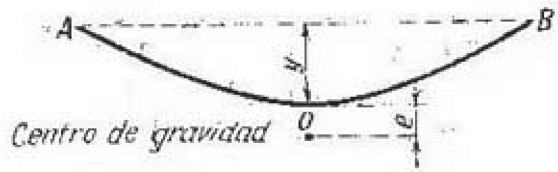

Fig. 71

está en el eje, la flexión y del eje del árbol (véase la fig. 71), al girar éste, satisface la ecuación

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{1}{m\alpha} - \omega^2\right) y = g\cos\omega t + \omega^2 e,$$

donde m es la masa del disco, α es el número constante que depende del tipo de sujeción que se emplee en los extremos A y B; ω es la velocidad angular de la revolución, e es la excentricidad del centro de gravedad del disco. Hallar la integral general de esta ecuación.

4294. Un punto material de masa de 1 g efectúa el movimiento de repulsión a lo largo de una recta, desde un centro. La fuerza de repulsión es proporcional a la distancia que media entre el punto y el centro (el coeficiente de proporcionalidad es igual a 4). La resistencia del medio es proporcional a la velocidad del movimiento (el coeficiente de proporcionalidad es igual a 3). Al comenzar el movimiento, la distancia entre el punto y el centro es igual a 1 cm, la velocidad, igual a cero. Hallar la ley del movimiento.

4295. Una partícula de masa igual a 1 g avanza a lo largo de una recta hacia el punto A, bajo la acción de cierta fuerza de atracción proporcional a la distancia que media entre la partícula y el punto A. A la distancia igual a 1 cm actúa la fuerza igual a 0,1 din. La resistencia del medio es proporcional a la velocidad del movimiento e igual a 0,4 din a la velocidad de 1 cm/s. En el momento $t = 0$ la partícula se halla a 10 cm del punto A y su velocidad es igual a cero. Hallar la dependencia entre la distancia y el tiempo y calcular la distancia para $t = 3$ s (con exactitud hasta 0,01 cm).

4296. Un punto material de masa m se desplaza, a lo largo de la recta, del punto A al punto B, bajo la acción de la fuerza constante F. La resistencia del medio es proporcional a la distancia que medie entre el cuerpo y el punto B. En el momento inicial (en el punto A) es igual a f ($f < F$). La velocidad inicial del punto es igual a cero. ¿Cuánto tiempo tardará el punto en desplazarse de A a B? ($AB = a$).

4297. Un cuerpo de masa igual a 200 g está colgado del muelle. Al ser extendido éste en 2 cm, el cuerpo fue sacado del estado de reposo y fue suelto (sin velocidad inicial). Hallar la ecuación del movimiento del cuerpo considerando la resistencia del medio proporcional a la velocidad del movimiento. Si el cuerpo se desplaza a la velocidad 1 cm/s, el medio ofrece la resistencia igual a 0,1 kgf. La tensión del muelle al ser extendido en 2 cm es igual a 10 kgf. Se prescinde del peso del muelle.

4298. Un zoquete de madera cilíndrico ($S = 100$ cm^2, $h = 20$ cm, $\gamma = 0,5$ g/cm^3 ha sido sumergido completamente en el agua y suelto sin velocidad inicial. Considerando que la fuerza de rozamiento es proporcional a la altura de la parte sumergida, esclarecer cuál debe ser el coeficiente de proporcionalidad k para que sobre la superficie del agua aparezca exactamente la mitad del zoquete, como resultado de la primera subida.

¿Cuánto tiempo (t_1) durará la primera subida?

¿Cuál es la ecuación del movimiento durante la primera subida?

4299*. Un tubo largo y estrecho gira alrededor de un eje vertical y perpendicular a aquél, con velocidad angular ω. En el momento inicial, a la distancia a_0 del eje, en el interior del tubo hubo un pequeño globo de masa m. Considerando que en el momento inicial la velocidad del globo, respecto al tubo, era igual a cero, hallar la ley del movimiento del globo respecto al tubo.

4300. Resolver el problema del ejercicio anterior suponiendo que el globo está sujeto al punto O con un muelle. La fuerza con que el muelle actúa sobre el globo es proporcional a la deformación del muelle, la fuerza igual a k dinas modifica la longitud del muelle en 1 cm. La longitud del muelle en estado libre es igual a a_0.

Ecuaciones de órdenes superiores

En los ejercicios 4301—4311 hallar las soluciones generales de las ecuaciones.

4301. $y''' + 9y' = 0$. **4302.** $y^{(IV)} - 13y'' + 36y = 0$.

4303. $y^{(IV)} = 8y'' - 16y$. **4304.** $y^{(IV)} = 16y$.

4305. $y''' - 13y' - 12y = 0$.

4306. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$.

4307. $y^{(IV)} + 2y''' + y'' = 0$. **4308.** $y^{(n)} = y^{(n-2)}$.

4309. $y^{(IV)} + y = 0$.

4310. $64y^{(VIII)} + 48y^{(VI)} + 12y^{(IV)} + y'' = 0$.

4311. $y^{(n)} + \frac{n}{1} y^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} y^{(n-2)} + \ldots + \frac{n}{1} y' + y = 0$.

4312. $y''' = -y'$; $y|_{x=0} = 2$, $y'|_{x=0} = 0$, $y''|_{x=0} = -1$.

4313. $y^{(V)} - y'$; $y|_{x=0} = 0$, $y'|_{x=0} = 1$, $y''|_{x=0} = 0$, $y'''|_{x=0} = 1$, $y^{(IV)}|_{x=0} = 2$.

En los ejercicios 4314—4320 formar las soluciones generales de las ecuaciones no homogéneas, buscando sus soluciones particulares mediante la selección conveniente o bien aplicando el método de variación de las constantes arbitrarias.

4314. $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 2x + 3.$

4315. $y''' - 3y' + 2y = e^{-x}(4x^2 + 4x - 10).$

4316. $y^{(IV)} + 8y'' + 16y = \cos x.$

4317. $y^{(IV)} + 2a^2y'' + a^4y = \cos ax.$

4318. $y^{(V)} + y''' = x^2 - 1.$

4319. $y^{(IV)} - y = xe^x + \cos x.$

4320. $y^{(IV)} - 2y'' + y = 8(e^x + e^{-x}) + 4(\operatorname{sen} x + \cos x).$

4321. $y''' + 2y'' + y' + 2e^{-2x} = 0; \quad y|_{x=0} = 2,$

$$y'|_{x=0} = 1, \quad y''|_{x=0} = 1.$$

4322. $y''' - y' = 3(2 - x^2); \quad y|_{x=0} = y'|_{x=0} = y''|_{x=0} = 1.$

4323. Resolver la ecuación de Euler $x^3y''' + xy' - y = 0.$

§ 5. Sistemas de ecuaciones diferenciales

4324.1. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - 7x, \\ \dfrac{dy}{dt} + 2x + 5y = 0. \end{cases}$

4324.2. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y. \end{cases}$

4324.3. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + y. \end{cases}$

4324.4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y - z, \\ \dfrac{dz}{dt} = 2x - y. \end{cases}$

4324.5 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y - z, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + y + z, \\ \dfrac{dz}{dt} = x - z. \end{cases}$

4324.6. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y + z, \\ \dfrac{dz}{dt} = 4x - y + 4z \end{cases}$

(las raíces de la ecuación característica son $r_1 = 1, \ r_2 = 2, \ r_3 = 5$).

4324.7 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y - z, \\ \dfrac{dz}{dt} = 2y + 3z - x \end{cases}$

(las raíces de la ecuación característica son $r_1 = 2, \ r_{2,3} = 3 \pm i$).

4325. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=y, \\ \dfrac{dy}{dt}=x+e^t+e^{-t}. \end{cases}$

4326. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=2y-5x+e^t, \\ \dfrac{dy}{dt}=x-6y+e^{-2t}. \end{cases}$

4327. $\begin{cases} yzy'=x\left(y'=\dfrac{dy}{dx}\right), \\ y^2z'=x\left(z'=\dfrac{dz}{dx}\right). \end{cases}$

4328. $\begin{cases} y'=\dfrac{x+y}{z} \\ z'=\dfrac{x-y}{y}. \end{cases}$

4329. $\begin{cases} xy'=y, \\ xzz+x^2+y^2=0. \end{cases}$

4330 $\begin{cases} y'=\dfrac{2xy}{x^2-y^2-z^2}, \\ z'=\dfrac{2xz}{x^2-y^2-z^2}. \end{cases}$

4331. $\begin{cases} z=y'(z-y)^2, \\ y=z'(z-y)^2. \end{cases}$

4332. $\begin{cases} 4\dfrac{dx}{dt}-\dfrac{dy}{dt}+3x=\operatorname{sen} t, \\ \dfrac{dx}{dt}+y=\cos t. \end{cases}$

4333. $\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2}=x, \\ \dfrac{d^2x}{dt^2}=y. \end{cases}$

4334. $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2}+\dfrac{dy}{dt}+x=e^t, \\ \dfrac{dx}{dt}+\dfrac{d^2x}{dt^2}=1. \end{cases}$

4335. $\dfrac{dx}{z-y}=\dfrac{dy}{x-z}=\dfrac{dz}{y-x}.$

En los ejercicios 4336—4339 hallar las soluciones particulares de los sistemas de ecuaciones diferenciales que satisfagan las condiciones iniciales indicadas.

4336. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^2-yz}{x^2-yz}, \\ \dfrac{dz}{dx}=\dfrac{z(x+y)}{x^2-yz}, \end{cases}$ $\quad y|_{x=0}=1;\quad z|_{x=0}=-1.$

4337. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=1-\dfrac{2x}{t}, \\ \dfrac{dy}{dt}=x+y-1+\dfrac{2x}{t}, \end{cases}$ $\quad x|_{t=1}=\dfrac{1}{3};\quad y|_{t=1}=-\dfrac{1}{3}.$

4338. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=z+y-x, \\ \dfrac{dy}{dt}=z+x-y, \\ \dfrac{dz}{dt}=x+y+z, \end{cases}$ $\quad x|_{t=0}=1,\quad y|_{t=0}=z|_{t=0}=0.$

4339. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=y+z, & x|_{t=0}=-1; \\ \dfrac{dy}{dt}=z+x, & y|_{t=0}=1; \\ \dfrac{dz}{dt}=x+y, & z|_{t=0}=0. \end{cases}$$

4340. Hallar la pareja de líneas que posean las siguientes propiedades: a) las tangentes trazadas en los puntos de abscisas iguales, se cortan en el eje de ordenadas; b) las normales trazadas en los puntos de abscisas iguales, se cortan en el eje de abscisas; c) una de las líneas pasa por el punto (1, 1), la otra, por el punto (1, 2).

4341. Sean dadas dos líneas: $y=f(x)$, que pasa por el punto (0, 1) e $y=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$, que pasa por el punto $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Las tangentes trazadas a las dos líneas en los puntos de abscisas iguales, se cortan en el eje de abscisas. Hallar la línea $y=f(x)$.

4342. Hallar la línea alabeada que pase por el punto (0, 1, 1) y que posea las siguientes propiedades: a) al desplazarse el punto de contacto a lo largo de la línea, la proyección de la tangente en el plano Oxy describe la bisectriz del ángulo formado entre las direcciones positivas de los ejes Ox y Oy; b) la distancia que media entre la citada proyección y el origen de coordenadas es igual a la coordenada z del punto de contacto.

4343. Dos pequeños globos de sendas masas m, están ligados por un muelle muy ligero (su alargamiento es proporcional a la fuerza de extensión). La longitud del muelle no extendido es l_0. El muelle fue extendido hasta l_1 y luego, en el momento $t=0$ ambos globos situados verticalmente uno encima del otro, comienzan a caer (se prescinde de la resistencia del medio). Al cabo de un lapso de tiempo igual a T, la longitud del hilo se reduce hasta l_0. Hallar la ley del movimiento de cada uno de los globos.

4344. Un tubo horizontal gira alrededor del eje vertical con velocidad angular igual a 2 radiantes por segundo. En el interior del tubo se encuentran dos pequeños globos de masas iguales a 300 g y 200 g, respectivamente, estando más alejado del eje de revolución el que pesa más. Están ligados por un muelle imponderable elástico y no extendido de 10 cm de longitud. La fuerza de extensión igual a 0,24 N actúa sobre el muelle debido a lo cual éste queda alargado en 1 cm. El centro de gravedad del sistema de los globos se halla alejado 10 cm del eje de revolución. Los globos se mantienen en la posición descrita por cierto mecanismo. En el momento considerado como de referencia para comenzar a medir el tiempo, la acción del mecanismo cesa, y los globos se ponen en movimiento. Hallar la ley del movimiento de cada uno de los globos respecto al tubo. (Se prescinde del rozamiento.)

4345. La velocidad del crecimiento de los cultivos microorgánicos es proporcional a su cantidad y a la cantidad disponible de sustancias nutritivas (el coeficiente de proporcionalidad es igual a k). La velocidad de disminución de sustancias nutritivas es proporcional a la cantidad disponible de microorganismos (el coeficiente de proporcionalidad es igual a k_1). Al comienzo del experimento en la vasija hubo A_0 microorganismos y B_0 sustancias nutritivas. Hallar la dependencia entre la cantidad A de microorganismos y la cantidad B de sustancias nutritivas, y el tiempo ($k > 0$, $k_1 > 0$).

4346*. Supongamos que las bacterias se multiplican con velocidad proporcional a su cantidad disponible (el coeficiente de proporcionalidad es igual a a), pero al mismo tiempo elaboran un veneno que las va matando, con velocidad proporcional a la cantidad del veneno y a la cantidad de bacterias (el coeficiente de proporcionalidad es igual a b). Supongamos también que la velocidad con que se elabora el veneno, es proporcional a la cantidad disponible de bacterias (el coeficiente de proporcionalidad es igual a c). Primero la cantidad de bacterias crece alcanzando cierto valor máximo, pero luego decrece tendiendo a cero. Mostrar que para cualquier momento t la cantidad N de bacterias se da por la fórmula

$$N = \frac{4M}{(e^{ht} + e^{-ht})^2},$$

donde M es el máximo de bacterias y el tiempo t se mide a partir del momento en que $N = M$, k es cierta constante.

4347. Dos cilindros cuyas bases se hallan en un mismo plano están unidos abajo por un tubo capital y contienen un líquido, de altura desigual (H_1 y H_2). En una unidad de tiempo, cierto volumen del líquido pasa a través del tubo, siendo proporcional a la diferencia de alturas, es decir, igual a $\alpha \cdot (h_1 - h_2)$, donde α es el coeficiente de proporcionalidad. Hallar la ley que rige el cambio de la altura del líquido en los cilindros situados encima del tubo capilar. La sección transversal de los cilindros es S_1 y S_2.

§ 6. Problemas de cálculo

4348. Un aparato eléctrico calienta 1 kg del agua, siendo sumergido en su interior. La capacidad calorífica del agua se considera constante y la temperatura inicial igual a θ_0. La resistencia R del aparato eléctrico depende linealmente de la temperatura $\theta : R = R_0 (1 + 0{,}004\theta)$, donde R_0 es la resistencia a 0° C (esta ley es válida para la mayoría de los metales puros). El termoaislamiento de la vasija es perfecto debido a lo cual se prescinde de la pérdida de calor. Hallar la dependencia entre la temperatura θ y el tiempo t en el intervalo $0 \leqslant t \leqslant T$ si:

1) La tensión E se introduce uniformemente desde $E = 0$ hasta $E = E_1$ por espacio de T s. Calcular con exactitud hasta 1°, cuántos grados aumentará la temperatura del agua al finalizar el décimo minuto si $\theta_0 = 0°$, $E_1 = 110$ V, $R_0 = 10\Omega$ y $T = 10$ min.

2) La tensión cambia de acuerdo con la ley $E = E_0$ sen $100\,\pi t$. Calcular, con exactitud hasta 1°, cuántos grados aumentará la temperatura del agua al finalizar el décimo minuto si $\theta_0 = 0°$, $E_0 = 110$ V y $R_0 = 10\Omega$.

4349. Una espiral cuya resistencia es igual a 24Ω calienta un litro del agua que cede, por su parte, su calor al medio ambiente cuya temperatura es igual a 20° C (la velocidad del enfriamiento es proporcional a la diferencia de la temperatura del cuerpo y la del medio). Se sabe que si la corriente se desconecta, la temperatura del agua baja de 40° a 30° en 10 minutos. La temperatura inicial del agua es de 20° C. ¿Cuál será la temperatura del agua al calentarse diez minutos si:

1) La tensión se introduce uniformemente desde $E_0 = 0$ hasta $E_1 = 120$ V por espacio de 10 minutos? La exactitud debe ser de 0,1°.

2) La corriente es alterna, la tensión cambia de acuerdo con la fórmula $E = 110$ sen $100\pi t$? La exactitud debe ser 0,1°.

4350. Sea dada la ecuación $y' = \frac{x}{y} - x^2$. Formar la tabla de los valores de la solución que satisfaga la condición inicial $y|_{x=1} = 1$ dando a x los valores de 1 hasta 1,5 con intervalo igual a 0,05. Los cálculos deben efectuarse hasta la tercera cifra decimal.

4351. Para $x = 1$ calcular el valor de la solución particular de la ecuación diferencial $y' = y + x$ que satisfaga la condición inicial $y|_{x=0} = 1$. Calcular las cinco primeras aproximaciones y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 (hasta la cuarta cifra decimal) aplicando el método de las aproximaciones sucesivas. Comparar los resultados.

4352. Se sabe que la integral $\int e^{-x^2}\,dx$ no se puede expresar mediante funciones elementales. Aprovechando que la función $y = e^{x^2} \int\limits_0^x e^{-t^2}\,dt$ es la solución de la ecuación diferencial $y' = 2xy + 1$, calcular $\int\limits_0^{0,5} e^{-x^2}\,dx$. Aplicar el método de las aproximaciones sucesivas y limitarse a la quinta aproximación. Comparar el resultado con el valor aproximado calculado por la regla de Simpson.

4353. $y = f(x)$ es la solución de la ecuación diferencial $y' = y^2 - x$ siendo la condición inicial $y|_{x=0} = 1$. Hallar la cuarta