15. $(4y + yx^2)\,dy - (2x + xy^2)\,dx = 0$

16. $(1 + x^2 + y^2 + x^2y^2)\,dy = y^2\,dx$

17. $2y(x + 1)\,dy = x\,dx$

18. $x^2y^2\,dy = (y + 1)\,dx$

19. $y \ln x \dfrac{dx}{dy} = \left(\dfrac{y + 1}{x}\right)^2$

20. $\dfrac{dy}{dx} = \left(\dfrac{2y + 3}{4x + 5}\right)^2$

21. $\dfrac{dS}{dr} = kS$

22. $\dfrac{dQ}{dt} = k(Q - 70)$

23. $\dfrac{dP}{dt} = P - P^2$

24. $\dfrac{dN}{dt} + N = Nte^{t+2}$

25. $\sec^2 x\,dy + \csc y\,dx = 0$

26. $\operatorname{sen} 3x\,dx + 2y\cos^3 3x\,dy = 0$

27. $e^y \operatorname{sen} 2x\,dx + \cos x(e^{2y} - y)\,dy = 0$

28. $\sec x\,dy = x \cot y\,dx$

29. $(e^y + 1)^2 e^{-y}\,dx + (e^x + 1)^3 e^{-x}\,dy = 0$

30. $\dfrac{y}{x}\dfrac{dy}{dx} = (1 + x^2)^{-1/2}(1 + y^2)^{1/2}$

31. $(y - yx^2)\dfrac{dy}{dx} = (y + 1)^2$

32. $2\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{2x}{y}$

33. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy + 3x - y - 3}{xy - 2x + 4y - 8}$

34. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy + 2y - x - 2}{xy - 3y + x - 3}$

35. $\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{sen} x(\cos 2y - \cos^2 y)$

36. $\sec y \dfrac{dy}{dx} + \operatorname{sen}(x - y) = \operatorname{sen}(x + y)$

37. $x\sqrt{1 - y^2}\,dx = dy$

38. $y(4 - x^2)^{1/2}\,dy = (4 + y^2)^{1/2}\,dx$

39. $(e^x + e^{-x})\dfrac{dy}{dx} = y^2$

40. $(x + \sqrt{x})\dfrac{dy}{dx} = y + \sqrt{y}$

En los Problemas 41-48 resuelva las ecuaciones diferenciales dadas sujetas a la condición inicial que se indica.

41. $(e^{-y} + 1)\operatorname{sen} x\,dx = (1 + \cos x)\,dy, \quad y(0) = 0$

42. $(1 + x^4)\,dy + x(1 + 4y^2)\,dx = 0, \quad y(1) = 0$

43. $y\,dy = 4x(y^2 + 1)^{1/2}\,dx, \quad y(0) = 1$

44. $\dfrac{dy}{dt} + ty = y, \quad y(1) = 3$

45. $\dfrac{dx}{dy} = 4(x^2 + 1), \quad x\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$

46. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2 - 1}{x^2 - 1}, \quad y(2) = 2$

47. $x^2y' = y - xy, \quad y(-1) = -1$

48. $y' + 2y = 1, \quad y(0) = \dfrac{5}{2}$

Como $y = 1$ cuando $x = 1$, se obtiene $-e^{-1} + c = 0$ o bien $c = e^{-1}$. Por consiguiente, la solución del problema de valor inicial es

$$e^{-1} - e^{-y/x} = \ln|x|. \qquad \blacksquare$$

EJERCICIOS 2.3

Las respuestas a los problemas de número impar comienzan en la página 581

En los Problemas 1-10 determine si la función dada es homogénea. Si lo es, indique su grado de homogeneidad.

1. $x^3 + 2xy^2 - y^4/x$
2. $\sqrt{x + y}(4x + 3y)$
3. $\dfrac{x^3y - x^2y^2}{(x + 8y)^2}$
4. $\dfrac{x}{y^2 + \sqrt{x^4 + y^4}}$
5. $\cos \dfrac{x^2}{x + y}$
6. $\operatorname{sen} \dfrac{x}{x + y}$
7. $\ln x^2 - 2 \ln y$
8. $\dfrac{\ln x^3}{\ln y^3}$
9. $(x^{-1} + y^{-1})^2$
10. $(x + y + 1)^2$

En los Problemas 11-30 resuelva la ecuación diferencial dada usando una sustitución apropiada.

11. $(x - y)\,dx + x\,dy = 0$
12. $(x + y)\,dx + x\,dy = 0$
13. $x\,dx + (y - 2x)\,dy = 0$
14. $y\,dx = 2(x + y)\,dy$
15. $(y^2 + yx)\,dx - x^2\,dy = 0$
16. $(y^2 + yx)\,dx + x^2\,dy = 0$
17. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y - x}{y + x}$
18. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x + 3y}{3x + y}$
19. $-y\,dx + (x + \sqrt{xy})\,dy = 0$
20. $x\dfrac{dy}{dx} - y = \sqrt{x^2 + y^2}$
21. $2x^2y\,dx = (3x^3 + y^3)\,dy$
22. $(x^4 + y^4)\,dx - 2x^3y\,dy = 0$
23. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y}$
24. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} + \dfrac{x^2}{y^2} + 1$
25. $y\dfrac{dx}{dy} = x + 4ye^{-2x/y}$
26. $(x^2e^{-y/x} + y^2)\,dx = xy\,dy$
27. $\left(y + x\cot\dfrac{y}{x}\right)dx - x\,dy = 0.$
28. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}\ln\dfrac{y}{x}$
29. $(x^2 + xy - y^2)\,dx + xy\,dy = 0$
30. $(x^2 + xy + 3y^2)\,dx - (x^2 + 2xy)\,dy = 0$

Por consiguiente $f(x, y) = x + y \ln x + c$. Se verifica fácilmente que

$$x + y \ln x + c = 0$$

es solución de ambas ecuaciones en $(0,\infty)$. ■

EJERCICIOS 2.4

Las respuestas a los problemas de número impar comienzan en la página 581

En los Problemas 1-24 determine si la ecuación dada es exacta. Si es exacta, resuélvala.

1. $(2x - 1)\,dx + (3y + 7)\,dy = 0$
2. $(2x + y)\,dx - (x + 6y)\,dy = 0$
3. $(5x + 4y)\,dx + (4x - 8y^3)\,dy = 0$
4. $(\operatorname{sen} y - y \operatorname{sen} x)\,dx + (\cos x + x \cos y - y)\,dy = 0$
5. $(2y^2x - 3)\,dx + (2yx^2 + 4)\,dy = 0$
6. $\left(2y - \dfrac{1}{x} + \cos 3x\right)\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x^2} - 4x^3 + 3y \operatorname{sen} 3x = 0$
7. $(x + y)(x - y)\,dx + x(x - 2y)\,dy = 0$
8. $\left(1 + \ln x + \dfrac{y}{x}\right)dx = (1 - \ln x)\,dy$
9. $(y^3 - y^2 \operatorname{sen} x - x)\,dx + (3xy^2 + 2y \cos x)\,dy = 0$
10. $(x^3 + y^3)\,dx + 3xy^2\,dy = 0$
11. $(y \ln y - e^{-xy})\,dx + \left(\dfrac{1}{y} + x \ln y\right)dy = 0$
12. $\dfrac{2x}{y}\,dx - \dfrac{x^2}{y^2}\,dy = 0$
13. $x\dfrac{dy}{dx} = 2xe^x - y + 6x^2$
14. $(3x^2y + e^y)\,dx + (x^3 + xe^y - 2y)\,dy = 0$
15. $\left(1 - \dfrac{3}{x} + y\right)dx + \left(1 - \dfrac{3}{y} + x\right)dy = 0$
16. $(e^y + 2xy \cosh x)y' + xy^2 \operatorname{senh} x + y^2 \cosh x = 0$
17. $\left(x^2y^3 - \dfrac{1}{1 + 9x^2}\right)\dfrac{dx}{dy} + x^3y^2 = 0$
18. $(5y - 2x)y' - 2y = 0$
19. $(\tan x - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y)\,dx + \cos x \cos y\,dy = 0$
20. $(3x \cos 3x + \operatorname{sen} 3x - 3)\,dx + (2y + 5)\,dy = 0$
21. $(1 - 2x^2 - 2y)\dfrac{dy}{dx} = 4x^3 + 4xy$
22. $(2y \operatorname{sen} x \cos x - y + 2y^2e^{xy^2})\,dx = (x - \operatorname{sen}^2 x - 4xye^{xy^2})\,dy$

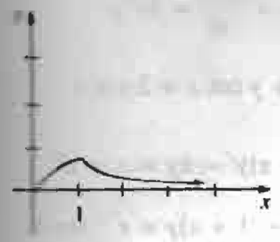


Figura 2.12

Por consiguiente, podemos escribir

$$y = \begin{cases} 1 - e^{-x}, & 0 \le x \le 1 \\ c_2 e^{-x}, & x > 1. \end{cases}$$

Ahora bien, para que y sea una función continua necesitamos que $\lim_{x \to 1^+} y(x) = y(1)$. Este último requisito es equivalente a $c_2 e^{-1} = 1 - e^{-1}$, o bien $c_2 = e - 1$. Como muestra la Figura 2.12, la función,

$$y = \begin{cases} 1 - e^{-x}, & 0 \le x \le 1 \\ (e - 1)e^{-x}, & x > 1 \end{cases}$$

es continua, pero no diferenciable en $x = 1$. ■

Observaciones La fórmula (7), que representa la solución general de (1), consta en realidad de la suma de dos soluciones. Se define

$$y = y_c + y_p, \tag{14}$$

en donde

$$y_c = ce^{-\int P(x)dx} \quad \text{y} \quad y_p = e^{-\int P(x)dx} \int e^{\int P(x)dx} f(x)\, dx.$$

Se demuestra fácilmente que la función y_c es la solución general de $y' + P(x)y = 0$, mientras que y_p es una solución particular de $y' + P(x)y = f(x)$. Como veremos en el Capítulo 4, el que una suma de soluciones como las que aparecen en (14) constituya una solución general, es una propiedad intrínseca de las ecuaciones lineales de cualquier orden.

EJERCICIOS 2.5

Las respuestas a los problemas de número impar comienzan en la página 582

En los Problemas 1-40, halle la solución general de la ecuación diferencial dada. Dé un intervalo en el cual la solución general esté definida.

1. $\dfrac{dy}{dx} = 5y$

2. $\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$

3. $3\dfrac{dy}{dx} + 12y = 4$

4. $x\dfrac{dy}{dx} + 2y = 3$

5. $\dfrac{dy}{dx} + y = e^{3x}$

6. $\dfrac{dy}{dx} = y + e^x$

7. $y' + 3x^2y = x^2$

8. $y' + 2xy = x^3$

9. $x^2y' + xy = 1$

10. $y' = 2y + x^2 + 5$

11. $(x + 4y^2)\,dy + 2y\,dx = 0$

12. $\dfrac{dx}{dy} = x + y$

13. $x\,dy = (x \operatorname{sen} x - y)\,dx$

14. $(1 + x^2)\,dy + (xy + x^3 + x)\,dx = 0$

15. $(1 + e^x)\dfrac{dy}{dx} + e^x y = 0$

16. $(1 - x^3)\dfrac{dy}{dx} = 3x^2 y$

17. $\cos x \dfrac{dy}{dx} + y \operatorname{sen} x = 1$

18. $\dfrac{dy}{dx} + y \cot x = 2\cos x$

19. $x\dfrac{dy}{dx} + 4y = x^3 - x$

20. $(1 + x)y' - xy = x + x^2$

21. $x^2 y' + x(x + 2)y = e^x$

22. $xy' + (1 + x)y = e^{-x} \operatorname{sen} 2x$

23. $\cos^2 x \operatorname{sen} x \, dy + (y \cos^3 x - 1)\, dx = 0$

24. $(1 - \cos x)\, dy + (2y \operatorname{sen} x - \tan x)\, dx = 0$

25. $y\, dx + (xy + 2x - ye^y)\, dy = 0$

26. $(x^2 + x)\, dy = (x^5 + 3xy + 3y)\, dx$

27. $x\dfrac{dy}{dx} + (3x + 1)y = e^{-3x}$

28. $(x + 1)\dfrac{dy}{dx} + (x + 2)y = 2xe^{-x}$

29. $y\, dx - 4(x + y^6)\, dy = 0$

30. $xy' + 2y = e^x + \ln x$

31. $\dfrac{dy}{dx} + y = \dfrac{1 - e^{-2x}}{e^x + e^{-x}}$

32. $\dfrac{dy}{dx} - y = \operatorname{senh} x$

33. $y\, dx + (x + 2xy^2 - 2y)\, dy = 0$

34. $y\, dx = (ye^y - 2x)\, dy$

35. $\dfrac{dr}{d\theta} + r \sec\theta = \cos\theta$

36. $\dfrac{dP}{dt} + 2tP = P + 4t - 2$

37. $(x + 2)^2 \dfrac{dy}{dx} = 5 - 8y - 4xy$

38. $(x^2 - 1)\dfrac{dy}{dx} + 2y = (x + 1)^2$

39. $y' = (10 - y)\cosh x$

40. $dx = (3e^y - 2x)\, dy$

En los Problemas 41-54, resuelva la ecuación diferencial dada sujeta a la condición inicial que se indica.

41. $\dfrac{dy}{dx} + 5y = 20, \quad y(0) = 2$

42. $y' = 2y + x(e^{3x} - e^{2x}), \quad y(0) = 2$

43. $L\dfrac{di}{dt} + Ri = E$; L, R, y E constantes $\quad i(0) = i_0$

44. $y\dfrac{dx}{dy} - x = 2y^2, \quad y(1) = 5$

45. $y' + (\tan x)y = \cos^2 x, \quad y(0) = -1$

46. $\dfrac{dQ}{dx} = 5x^4 Q, \quad Q(0) = -7$

47. $\dfrac{dT}{dt} = k(T - 50)$; k una constante $\quad T(0) = 200$

48. $x\, dy + (xy + 2y - 2e^{-x})\, dx = 0, \quad y(1) = 0$

Después de eliminar el parámetro, se descubre que esta última solución es la misma que

$$y = -\frac{1}{2}x^2.$$

Se ve fácilmente que esta función no es parte de la familia (9). Véase la Figura 2.14. ■

EJERCICIOS 2.6

Las respuestas a los problemas de número impar comienzan en la página 582

En los problemas 1-6 resuelva la ecuación de Bernoulli dada.

1. $x\dfrac{dy}{dx} + y = \dfrac{1}{y^2}$

2. $\dfrac{dy}{dx} - y = e^x y^2$

3. $\dfrac{dy}{dx} = y(xy^3 - 1)$

4. $x\dfrac{dy}{dx} - (1 + x)y = xy^2$

5. $x^2\dfrac{dy}{dx} + y^2 = xy$

6. $3(1 + x^2)\dfrac{dy}{dx} = 2xy(y^3 - 1)$

En los Problemas 7-10 resuelva la ecuación diferencial dada, sujeta a la condición inicial que se indica.

7. $x^2\dfrac{dy}{dx} - 2xy = 3y^4, \quad y(1) = \dfrac{1}{2}$

8. $y^{1/2}\dfrac{dy}{dx} + y^{3/2} = 1, \quad y(0) = 4$

9. $xy(1 + xy^2)\dfrac{dy}{dx} = 1, \quad y(1) = 0$

10. $2\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y^2}, \quad y(1) = 1$

En los Problemas 11-16 resuelva la ecuación de Ricatti dada; y_1 es una solución conocida de la ecuación.

11. $\dfrac{dy}{dx} = -2 - y + y^2, \quad y_1 = 2$

12. $\dfrac{dy}{dx} = 1 - x - y + xy^2, \quad y_1 = 1$

13. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{4}{x^2} - \dfrac{1}{x}y + y^2, \quad y_1 = \dfrac{2}{x}$

14. $\dfrac{dy}{dx} = 2x^2 + \dfrac{1}{x}y - 2y^2, \quad y_1 = x$

15. $\dfrac{dy}{dx} = e^{2x} + (1 + 2e^x)y + y^2, \quad y_1 = -e^x$

16. $\dfrac{dy}{dx} = \sec^2 x - (\tan x)y + y^2, \quad y_1 = \tan x$

17. Resuelva $\dfrac{dy}{dx} = 6 + 5y + y^2.$

18. Resuelva $\dfrac{dy}{dx} = 9 + 6y + y^2.$

constante de integración se escribe c_1^2 por conveniencia. La justificación será obvia en los pasos que siguen. Como $u' = 1/y'$, se tiene que

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2 + c_1^2} \quad \text{o bien} \quad dy = -\frac{dx}{x^2 + c_1^2}$$

$$\int dy = -\int \frac{dx}{x^2 + c_1^2}$$

$$y + c_2 = -\frac{1}{c_1} \tan^{-1} \frac{x}{c_1}.$$

EJERCICIOS 2.7 *Las respuestas a los problemas de número impar comienzan en la página 582*

En los Problemas 1-26 resuelva la ecuación diferencial dada usando una sustitución apropiada.

1. $xe^{2y}\dfrac{dy}{dx} + e^{2y} = \dfrac{\ln x}{x}$
2. $y' + y \ln y = ye^x$
3. $y\,dx + (1 + ye^x)\,dy = 0$
4. $(2 + e^{-x/y})\,dx + 2\left(1 - \dfrac{x}{y}\right) dy = 0$
5. $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{4}{x}y = 2x^5 e^{y/x^4}$
6. $\dfrac{dy}{dx} + x + y + 1 = (x + y)^2 e^{3x}$
7. $2yy' + x^2 + y^2 + x = 0$
8. $y' = y + x(y + 1)^2 + 1$
9. $2x \csc 2y \dfrac{dy}{dx} = 2x - \ln(\tan y)$
10. $x^2 \dfrac{dy}{dx} + 2xy = x^4 y^2 + 1$
11. $x^4 y^2 y' + x^3 y^3 = 2x^3 - 3$
12. $xe^y y' - 2e^y = x^2$
13. $y' + 1 = e^{-(x+y)} \operatorname{sen} x$
14. $\operatorname{sen} y \operatorname{senh} x\, dx + \cos y \cosh x\, dy = 0$
15. $y\dfrac{dx}{dy} + 2x \ln x = xe^y$
16. $x \operatorname{sen} y \dfrac{dy}{dx} + \cos y = -x^2 e^x$
17. $y'' + (y')^2 + 1 = 0$
18. $xy'' = y' + x(y')^2$
19. $xy'' = y' + (y')^3$
20. $x^2 y'' + (y')^2 = 0$
21. $y' - xy'' - (y'')^3 = 1$ Clairaut
22. $y'' = 1 + (y')^2$
23. $xy'' - y' = 0$
24. $y'' + (\tan x)y' = 0$
25. $y'' + 2y(y')^3 = 0$
26. $y^2 y'' = y'$

$\left[\textit{Sugerencia:} \text{ Sea } u = y' \text{ de modo que } y'' = \dfrac{du}{dx} = \dfrac{du}{dy}\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{du}{dy}u.\right]$

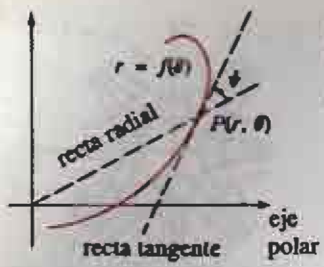


Figura 3.6

por el radio vector y la recta tangente. Véase la Figura 3.6. Se deja como ejercicio demostrar que dos curvas polares $r = f_1(\theta)$ y $r = f_2(\theta)$ son ortogonales en un punto de intersección si y sólo si

$$(\tan \psi_1)_{\theta_1}(\tan \psi_2)_{\theta_2} = -1.$$

Véase problema 42.

EJEMPLO 6

Determinar las trayectorias ortogonales de

$$r = c_1(1 - \operatorname{sen}\theta).$$

Solución Para la curva dada es posible escribir

$$\frac{dr}{d\theta} = -c_1\cos\theta = \frac{-r\cos\theta}{1 - \operatorname{sen}\theta}$$

de modo que
$$r\frac{d\theta}{dr} = -\frac{1 - \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \tan\psi_1.$$

De esta manera, en virtud de (1), la ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales es

$$r\frac{d\theta}{dr} = \frac{\cos\theta}{1 - \operatorname{sen}\theta} = \tan\psi_2.$$

Separando variables resulta

$$\frac{dr}{r} = \frac{1 - \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\,d\theta = (\sec\theta - \tan\theta)\,d\theta$$

de modo que
$$\begin{aligned}\ln|r| &= \ln|\sec\theta + \tan\theta| + \ln|\cos\theta| + \ln c_2\\ &= \ln|c_2(1 + \operatorname{sen}\theta)|.\end{aligned}$$

En consecuencia,
$$r = c_2(1 + \operatorname{sen}\theta).$$

EJERCICIOS 3.1

Las respuestas a los problemas de número impar comienzan en la página

En los Problemas 1-26, obtenga las trayectorias ortogonales de la familia de curvas dada.

1. $y = c_1 x$
2. $3x + 4y = c_1$
3. $y = c_1 x^2$
4. $y = (x - c_1)^2$
5. $c_1 x^2 + y^2 = 1$
6. $2x^2 + y^2 = c_1^2$
7. $y = c_1 e^{-x}$
8. $y = e^{c_1 x}$
9. $y^2 = c_1 x^3$
10. $y^a = c_1 x^b$, a y b constantes

11. $y = \dfrac{x}{1 + c_1 x}$

12. $y = \dfrac{1 + c_1 x}{1 - c_1 x}$

13. $2x^2 + y^2 = 4c_1 x$

14. $x^2 + y^2 = 2c_1 x$

15. $y^3 + 3x^2 y = c_1$

16. $y^2 - x^2 = c_1 x^3$

17. $y = \dfrac{c_1}{1 + x^2}$

18. $y = \dfrac{1}{c_1 + x}$

19. $4y + x^2 + 1 + c_1 e^{2y} = 0$

20. $y = -x - 1 + c_1 e^x$

21. $y = \dfrac{1}{\ln c_1 x}$

22. $y = \ln(\tan x + c_1)$

23. $\operatorname{senh} y = c_1 x$

24. $y = c_1 \operatorname{sen} x$

25. $x^{1/3} + y^{1/3} = c_1$

26. $x^a + y^a = c_1, \quad a \neq 2$

27. Encuentre el miembro de la familia de trayectorias ortogonales de $x + y = c_1 e^y$ que pasa por $(0, 5)$.

28. Halle el miembro de la familia de trayectorias ortogonales de $3xy^2 = 2 + 3c_1 x$ que pasa por $(0, 10)$.

En los Problemas 29-34 obtenga las trayectorias ortogonales de las curvas cuyas ecuaciones polares se dan.

29. $r = 2c_1 \cos \theta$

30. $r = c_1(1 + \cos \theta)$

31. $r^2 = c_1 \operatorname{sen} 2\theta$

32. $r = \dfrac{c_1}{1 + \cos \theta}$

33. $r = c_1 \sec \theta$

34. $r = c_1 e^{\theta}$

35. Una familia de curvas que se intersecta con una familia de curvas dada formando un ángulo constante $\alpha \neq \pi/2$, se llama *familia isogonal*. Se dice que las dos familias son, cada una, **trayectorias isogonales** de la otra. Si $dy/dx = f(x, y)$ es la ecuación diferencial de la familia dada, demuestre que la ecuación diferencial de la familia isogonal es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x, y) \pm \tan \alpha}{1 \mp f(x, y) \tan \alpha}.$$

En los Problemas 36-38, use los resultados del Problema 35 para encontrar la familia isogonal que se intersecta con la familia uniparamétrica de rectas $y = c_1 x$ formando el ángulo dado.

36. $\alpha = 45°$

37. $\alpha = 60°$

38. $\alpha = 30°$

Una familia de curvas puede ser **autoortogonal** en el sentido de que un miembro de las trayectorias ortogonales también es un miembro de la familia original. En los Problemas 39 y 40 demuestre que la familia de curvas dada es autoortogonal.

39. parábolas $y^2 = c_1(2x + c_1)$

[illegible]RCICIOS 2.2, Pág. 42

[illegible] $= -\frac{1}{5}\cos 5x + c$ 3. $y = \frac{1}{3}e^{-3x} + c$

[illegible] $= x + 5\ln|x+1| + c$ 7. $y = cx^4$

[illegible] $= 2x^{-1} + c$ 11. $-3 + 3x\ln|x| = xy^3 + cx$

[illegible] $e^{-2y} = 2e^{3x} + c$ 15. $2 + y^2 = c(4 + x^2)$

[illegible] $= x - \ln|x + 1| + c$

[illegible] $\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{9}x^3 = \frac{y^2}{2} + 2y + \ln|y| + c$

[illegible] $= ce^{kr}$ 23. $\frac{P}{1-P} = ce^t$ o bien $P = \frac{ce^t}{1 + ce^t}$

[illegible] $\cos y = 2x + \operatorname{sen} 2x + c$

[illegible] $\cos x + e^y + ye^{-y} + e^{-y} = c$

[illegible] $1)^{-2} + 2(e^y + 1)^{-1} = c$

[illegible] $1)^{-1} + \ln|y + 1| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + c$

[illegible] $- 5\ln|y + 3| = x - 5\ln|x + 4| + c$

[illegible] $\left(\frac{y+3}{x+4}\right)^5 = c_1 e^{y-x}$

[illegible] $= \cos x + c$ 37. $y = \operatorname{sen}\left(\frac{x^2}{2} + c\right)$

[illegible] $= \tan^{-1}(e^x) + c$

[illegible] $\cos x)(1 + e^y) = 4$

[illegible] $= 2x^2 + \sqrt{2}$

[illegible] $\tan(4y - 3\pi/4)$ 47. $xy = e^{-(1 + 1/x)}$

[illegible] $= 3\,\frac{1 - e^{6x}}{1 + e^{6x}}$; (b) $y = 3$;

[illegible] $= 3\,\frac{2 - e^{6x-2}}{2 + e^{6x-2}}$

[illegible] 53. $y = 1$ 55. $y = 1 + \frac{1}{10}\tan\frac{x}{10}$

[illegible] $-x - 1 + \tan(x + c)$

[illegible] $+ \operatorname{sen} 2(x + y) = c$

[illegible] $- 2x + 3) = (x + c)^2$

[illegible]OS 2.3, Pág. 50

[illegible] de grado 3

[illegible] de grado 2

[illegible]énea 7. homogénea de grado 0

[illegible] de grado –2

[illegible] $= cx$

[illegible] $x - y|| = y + c(x - y)$

15. $x + y\ln|x| = cy$

17. $\ln(x^2 + y^2) + 2\tan^{-1}(y/x) = c$

19. $4x = y(\ln|y| - c)^2$ 21. $y^9 = c(x^3 + y^3)^2$

23. $(y/x)^2 = 2\ln|x| + c$ 25. $e^{2x/y} = 8\ln|y| + c$

27. $x\cos(y/x) = c$ 29. $y + x = cx^2 e^{y/x}$

31. $y^3 + 3x^3\ln|x| = 8x^3$ 33. $y^2 = 4x(x + y)^2$

35. $\ln|x| = e^{y/x} - 1$

37. $4x\ln|y/x| + x\ln x + y - x = 0$

39. $3x^{3/2}\ln x + 3x^{1/2}y + 2y^{3/2} = 5x^{3/2}$

41. $(x + y)\ln|y| + x = 0$

43. $\ln|y| = -2(1 - x/y)^{1/2} + \sqrt{2}$

45. Por homogeneidad la ecuación se puede escribir como

$$M(x/y, 1)\,dx + N(x/y, 1)\,dy = 0.$$

Con $v = x/y$, se deduce que

$$M(v, 1)(v\,dy + y\,dv) + N(v, 1)\,dy = 0$$

$$[vM(v, 1) + N(v, 1)]\,dy + yM(v, 1)\,dv = 0$$

o bien $$\frac{dy}{y} + \frac{M(v, 1)\,dv}{vM(v, 1) + N(v, 1)} = 0.$$

47. $$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)} = -\frac{y^n M(x/y, 1)}{y^n N(x/y, 1)}$$
$$= -\frac{M(x/y, 1)}{N(x/y, 1)} = G(x/y)$$

EJERCICIOS 2.4, Pág. 58

1. $x^2 - x + \frac{3}{2}y^2 + 7y = c$ 3. $\frac{5}{2}x^2 + 4xy - 2y^4 = c$

5. $x^2y^2 - 3x + 4y = c$

7. no exacta, pero es homogénea

9. $xy^3 + y^2\cos x - \frac{1}{2}x^2 = c$ 11. no exacta

13. $xy - 2xe^x + 2e^x - 2x^3 = c$

15. $x + y + xy - 3\ln|xy| = c$

17. $x^3y^3 - \tan^{-1}3x = c$

19. $-\ln|\cos x| + \cos x \operatorname{sen} y = c$

21. $y - 2x^2y - y^2 - x^4 = c$

23. $x^4y - 5x^3 - xy + y^3 = c$

25. $\frac{1}{3}x^3 + x^2y + xy^2 - y = \frac{4}{3}$

27. $4xy + x^2 - 5x + 3y^2 - y = 8$

29. $y^2\operatorname{sen} x - x^3y - x^2 + y\ln y - y = 0$

31. $k = 10$ 33. $k = 1$

35. $M(x, y) = ye^{xy} + y^2 - (y/x^2) + h(x)$

37. $M(x, y) = 6xy^3$
$N(x, y) = 4y^3 + 9x^2y^2$
$\partial M/\partial y = 18xy^2 = \partial N/\partial x$
la solución es $3x^2y^3 + y^4 = c$

39. $M(x, y) = -x^2y^2 \operatorname{sen} x + 2xy^2 \cos x$
$N(x, y) = 2x^2y \cos x$
$\partial M/\partial y = -2x^2y \operatorname{sen} x + 4xy \cos x = \partial N/\partial x$
la solución es $x^2y^2 \cos x = c$

41. $M(x, y) = 2xy^2 + 3x^2$
$N(x, y) = 2x^2y$
$\partial M/\partial y = 4xy = \partial N/\partial x$
la solución es $x^2y^2 + x^3 = c$

43. Se puede escribir una ecuación diferencial de primer orden separable $h(y)\,dy - g(x)\,dx = 0$. Identificando $M(x, y) = -g(x)$ y $N(x, y) = h(y)$, se encuentra que $\partial M/\partial y = 0 = \partial N/\partial x$.

EJERCICIOS 2.5, Pág. 67

1. $y = ce^{5x}, \quad -\infty < x < \infty$
3. $y = \frac{1}{3} + ce^{-4x}, \quad -\infty < x < \infty$
5. $y = \frac{1}{3}e^{3x} + ce^{-x}, \quad -\infty < x < \infty$
7. $y = \frac{1}{3} + ce^{-x^3}, \quad -\infty < x < \infty$
9. $y = x^{-1} \ln x + cx^{-1}, \quad 0 < x < \infty$
11. $x = -\frac{4}{5}y^2 + cy^{-1/2}, \quad 0 < y < \infty$
13. $y = -\cos x + \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} + \dfrac{c}{x}, \quad 0 < x < \infty$
15. $y = \dfrac{c}{e^x + 1}, \quad -\infty < x < \infty$
17. $y = \operatorname{sen} x + c \cos x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$
19. $y = \frac{1}{7}x^3 - \frac{1}{5}x + cx^{-4}, \quad 0 < x < \infty$
21. $y = \dfrac{1}{2x^2}e^x + \dfrac{c}{x^2}e^{-x}, \quad 0 < x < \infty$
23. $y = \sec x + c \csc x, \quad 0 < x < \pi/2$
25. $x = \dfrac{1}{2}e^y - \dfrac{1}{2y}e^y + \dfrac{1}{4y^2}e^y + \dfrac{c}{y^2}e^{-y}, \quad 0 < y < \infty$
27. $y = e^{-3x} + \dfrac{c}{x}e^{-3x}, \quad 0 < x < \infty$
29. $x = 2y^6 + cy^4, \quad 0 < y < \infty$
31. $y = e^{-x} \ln(e^x + e^{-x}) + ce^{-x}, \quad -\infty < x < \infty$
33. $x = \dfrac{1}{y} + \dfrac{c}{y}e^{-y^2}, \quad 0 < y < \infty$
35. $(\sec \theta + \tan \theta)r = \theta - \cos \theta + c$
37. $y = \frac{5}{3}(x + 2)^{-1} + c(x + 2)^{-4}, \quad -2 <$
39. $y = 10 + ce^{-\operatorname{senh} x}, \quad -\infty < x <$
41. $y = 4 - 2e^{-5x}, \quad -\infty < x < \infty$
43. $i(t) = E/R + (i_0 - E/R)e^{-Rt/L}, \quad -$
45. $y = \operatorname{sen} x \cos x - \cos x, \quad -\pi/2 <$
47. $T(t) = 50 + 150e^{kt}, \quad -\infty < t <$
49. $(x + 1)y = x \ln x - x + 21, \quad 0 <$
51. $y = \dfrac{2x}{x - 2}, \quad 2 < x < \infty$
53. $x = \frac{1}{2}y + 8/y, \quad 0 < y < \infty$
55. $y = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 - e^{-2x}), & 0 \le x \le 3 \\ \frac{1}{2}(e^6 - 1)e^{-2x}, & x > 3 \end{cases}$
57. $y = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{-x^2}, & 0 \le x < 1 \\ (\frac{1}{2}e + \frac{3}{2})e^{-x^2}, & x \ge 1 \end{cases}$

EJERCICIOS 2.6, Pág. 73

1. $y^3 = 1 + cx^{-3}$ 3. $y^{-3} = x -$
5. $e^{x/y} = cx$ 7. $y^{-3} = -\frac{9}{5}x^{-1} +$
9. $x^{-1} = 2 - y^2 - e^{-y^2/2}$, la ecuación ... en la variable x.
11. $y = 2 + \dfrac{1}{ce^{-3x} - 1/3}$ 13. $y =$
15. $y = -e^x + \dfrac{1}{ce^{-x} - 1}$ 17. $y = -$
19. $y = cx + 1 - \ln c$; $y = 2 + \ln x$
21. $y = cx - c^3$; $27y^2 = 4x^3$
23. $y = cx - e^c$; $y = x \ln x - x$

EJERCICIOS 2.7, Pág. 77

1. $x^2e^{2y} = 2x \ln x - 2x + c$
3. $e^{-x} = y \ln|y| + cy$ 5. $-e^{-}$
7. $x^2 + y^2 = x - 1 + ce^{-x}$ 9.
11. $x^3y^3 = 2x^3 - 9 \ln|x| + c$
13. $e^y = -e^{-x} \cos x + ce^{-x}$
15. $y^2 \ln x = ye^y - e^y + c$
17. $y = \ln|\cos(c_1 - x)| + c_2$
19. $y = -\dfrac{1}{c_1}(1 - c_1^2x^2)^{1/2} + c_2$

...ción dada es una ecuación de Clairaut en $u = y'$.
...ción es $y = c_1 x^2/2 + x + c_1^3 x + c_2$.
... $+ c_2 x^2$ **25.** $\frac{1}{3}y^3 - c_1 y = x + c_2$
... $= -\sqrt{1 - x^2}$

...CIOS 2.8, Pág. 80

... $= 1 - x$
... $= 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!}$
... $= 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!}$
... $= 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$;
... $\to e^{-x}$ cuando $n \to \infty$
... $= 1 + x^2$
... $= 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!}$
... $= 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!}$
... $= 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!}$
... $\to e^{x^2}$ cuando $n \to \infty$
... $= y_2(x) = y_3(x) = y_4(x) = 0$;
... $\to 0$ cuando $n \to \infty$
... $(x) = x$
... $(x) = x + \frac{1}{3}x^3$
... $(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{1}{63}x^7$
... $= \tan x$
... El desarrollo en serie de Maclaurin de $\tan x$ es
$x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \cdots, |x| < \pi/2$.

...CIOS DE REPASO ■ Capítulo 2, Pág. 82

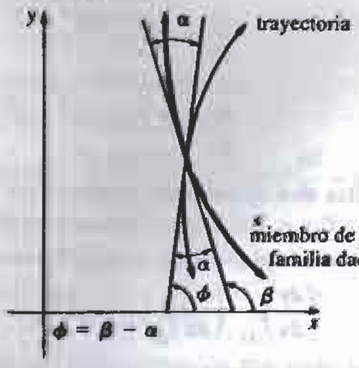
... ...ones definidas por $x^2 + y^2 > 25$ y $x^2 + y^2 < 25$
...
... lineal en x
... homogénea, exacta, lineal en y
... ecuación de Clairaut
... ecuación de Bernoulli en x
... separable
(f) separable, ecuación de Ricatti
(g) lineal en x

(h) homogénea
(i) ecuación de Bernoulli
(j) homogénea, exacta, de Bernoulli
(k) separable, homogénea, exacta, lineal en x y en y
(l) exacta, lineal en y
(m) homogénea
(n) separable
(o) ecuación de Clairaut
(p) ecuación de Ricatti

7. $2y^2 \ln y - y^2 = 4xe^x - 4e^x - 1$
9. $2y^2 + x^2 = 9x^6$ **11.** $e^{xy} - 4y^3 = 5$
13. $y = \frac{1}{4} - 320(x^2 + 4)^{-4}$
15. $y = \frac{1}{x^4 - x^4 \ln|x|}$ **17.** $x^2 - \operatorname{sen}\frac{1}{y^2} = c$
19. $y_1(x) = 1 + x + \frac{1}{3}x^3$
$y_2(x) = 1 + x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{1}{63}x^7$

EJERCICIOS 3.1, Pág. 90

1. $x^2 + y^2 = c_2^2$ **3.** $2y^2 + x^2 = c_2$
5. $2\ln|y| = x^2 + y^2 + c_2$ **7.** $y^2 = 2x + c_2$
9. $2x^2 + 3y^2 = c_2$ **11.** $x^3 + y^3 = c_2$
13. $y^2 \ln|y| + x^2 = c_2 y^2$ **15.** $y^2 - x^2 = c_2 x$
17. $2y^2 = 2\ln|x| + x^2 + c_2$
19. $y = \frac{1}{4} - \frac{1}{6}x^2 + c_2 x^{-4}$ **21.** $2y^3 = 3x^2 + c_2$
23. $2\ln(\cosh y) + x^2 = c_2$ **25.** $y^{5/3} = x^{5/3} + c_2$
27. $y = 2 - x + 3e^{-x}$ **29.** $r = c_2 \operatorname{sen}\theta$
31. $r^2 = c_2 \cos 2\theta$ **33.** $r = c_2 \csc\theta$
35. Sea β el ángulo de inclinación —medido desde el eje x positivo — de la recta tangente a un miembro de la familia dada, y φ el ángulo de inclinación de la tan-



(a)