4146. Si el parámetro de las parábolas es igual a $2p$ y la recta es considerada como el eje de ordenadas, las ecuaciones de las trayectorias son:

$$y=C+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2x^3}{p}}.$$

4147. Tractrices.

4148. Marcando el ángulo α en una de las dos posibles direcciones obtenemos la ecuación de la familia

$$xy-\frac{\sqrt{3}}{2}(x^2+y^2)=C.$$

4149. Marcando el ángulo α en una de las dos posibles direcciones obtenemos la ecuación de la familia

$$\ln(2x^2+xy+y^2)+\frac{6}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{x+2y}{x\sqrt{7}}=C.$$

4150*. Se puede admitir, por ejemplo, que el viento pasa a lo largo del eje Ox. Las líneas de la propagación del sonido por el plano Oxy son trayectorias ortogonales de la familia de circunferencias $(x-at)^2+y^2=(v_0t)^2$, donde t es el tiempo transcurrido después de salir la onda sonora de la fuente, y v_0 es la velocidad del sonido en el aire inmóvil.

Para cualquier t fijada la ecuación diferencial de las trayectorias buscadas es $y'=\frac{y}{x-at}$ junto con la ecuación de la familia de circunferencias.

Excluyendo t obtenemos cierta ecuación de Lagrange. Su solución general es

$$x=C(\cos\varphi+b)\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^{\frac{1}{b}},$$

$$y=C\operatorname{sen}\varphi\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^{\frac{1}{b}},$$

donde $b=\pm\frac{a}{v_0}$, φ es el parámetro.

4151. $x=C\operatorname{sen}t+R(\cos t+t\operatorname{sen}t)$, $y=-C\cos t+R(\operatorname{sen}t-t\cos t)$.

4152. $x=\frac{C}{\operatorname{ch}t}+a(t-\operatorname{th}t)$, $y=C\operatorname{th}t+\frac{a}{\operatorname{ch}t}$.

4153. $x=a(\cos t+t\operatorname{sen}t)-\cos t\left(\frac{at^2}{2}+C\right)$,

$$y=a(\operatorname{sen}t+t\cos t)-\operatorname{sen}t\left(\frac{at^2}{2}+C.\right)$$

4154. $x=C\operatorname{sen}t+2\operatorname{tg}t$, $\quad y=\operatorname{tg}^2t-C\cos t-2$.

4155. $y=\frac{x^3}{6}-\operatorname{sen}x+C_1x+C_2$.

4156. $y=\frac{\operatorname{arctg}x}{2}(x^2-1)-\frac{x}{2}\ln(1+x^2)+C_1x+C_2$.

4157. $y=\frac{x^2}{2}\left[\ln x-\frac{3}{2}\right]+C_1x+C_2$.

4158. $y=C_1x^2+C_2$.

4159. $y=C_1e^x+C_2-x-\frac{x^2}{2}$. **4160.** $y=\frac{1}{3}x^3+C_1x^2+C_2$.

4161. $y=(1+C_1^2)\ln|x+C_1|-C_1x+C_2$.

4162. $y=(C_1x-C_1^2)e^{\frac{x}{C_1}+1}+C_2$. **4163.** $y=\frac{1}{12}(y+C_1)^3+C_2$.

4164. $y=\frac{2}{3C_1}\sqrt{(C_1x-1)^3}+C_2$.

4165. $y=-\frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x+C_1\left(\frac{x}{2}-\frac{\operatorname{sen} 2x}{4}\right)+C_2$.

4166. $(x+C_2)^2=4C_1(y-C_1)$.

4167. $y=C_1(x+C_2)^{\frac{2}{3}}$. **4168.** $y=C_1e^{\frac{x}{a}}+C_2e^{-\frac{x}{a}}$.

4169. $x=\frac{4}{3}(y^{\frac{1}{2}}-2C_1)\sqrt{y^{\frac{1}{2}}+C_1}+C_2$. **4170.** $y=\frac{x+C_1}{x+C_2}$.

4171. $(x+C_2)^2-y^2=C_1$. **4172.** $y=C_1e^{C_2x}$.

4173. $y\cos^2(x+C_1)=C_2$. **4174.** $(x+C_2)\ln y=x+C_1$.

4175. Si la constante arbitraria introducida por la primera integración, es positiva $(+C_1^2)$, se tiene $y=C_1\operatorname{tg}(C_1x+C_2)$; si es negativa $(-C_1^2)$, se tiene

$$y=C_1\frac{1+e^{2(C_1x+C_2)}}{1-e^{2(C_1x+C_2)}}=-C_1\operatorname{cth}(C_1x+C_2);$$

si $C_1=0$, se tiene $y=-\frac{1}{1+C_2}$.

4176. $x=C_1+\cos C_2\ln\left|\operatorname{tg}\frac{y+C_2}{2}\right|$. **4177.** $C_1x+C_2=\ln\left|\frac{y}{y+C_1}\right|$.

4178. $\frac{x+C_2}{2}=C_1\operatorname{arctg}(C_1\ln y)$, $C_1>0$.

4179. $\ln|C_1y|=2\operatorname{tg}(2x+C_2)$.

4180. $y=\ln|x^2+C_1|+\frac{1}{\sqrt{-C_1}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{-C_1}}{x+\sqrt{-C_1}}\right|+C_2$, si $C_1<0$,

e $y=\ln|x^2+C_1|+\frac{2a}{\sqrt{C_1}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{C_1}}+C_2$, si $C_1>0$.

4181*. Después de efectuar la sustitución $y'=p$ la ecuación se divide en dos una de las cuales pertenece al tipo de Clairaut. Su solución general es $y=$ $=C_1+C_2e^{C_1x}$, y las soluciones singulares son

$$y=\frac{4}{C-x}.$$ La otra ecuación es $y'=0$.

4182. $y=C_1x(x-C_1)+C_2$, y las soluciones singulares son $y=\frac{x^3}{3}+C$.

4183. $y^2=C_1x^4+C_2$. **4184.** $x=\ln\left|\frac{C_1x^{C_1}}{C_2-x^{C_1}}\right|$.

4185. $y=\sqrt{\frac{1}{3}x^3+C_1x+C_2}$. **4186.** $y=C_1x+\frac{C_2}{x}$.

4187. $y=C_1xe^{\frac{C_2}{x}}$. **4188.** $\ln|y+C_1|+\frac{C_1}{y+C_1}=x+C_2$.

4189. $y=x^3+3x+1$. **4190.** $y=2+\ln\frac{x^2}{4}$.

4191. $y=\frac{2}{5}x^2\sqrt{2x}-\frac{16}{5}$. **4192.** $y=\frac{4}{(x+4)^2}$.

4193. $y-x=2\ln|y|$. **4194.** $y=\sqrt{2x-x^2}$.

4195. $y=\sqrt{1+e^{2x}}$. **4196.** $y=-\ln|1-x|$. **4197.** $y=\frac{x+1}{x}$.

4198*. $y=x$. Efectuar la sustitución $y=ux$. **4199.** $y=2e^{\frac{1}{2}x^2}-1$.

4200*. La ecuación diferencial de la línea es $dx=\frac{dy}{\sqrt{(C_1y)^{\frac{2}{k}}-1}}$, donde k es el coeficiente de proporcionalidad. Si $k=1$, se tiene $y=\frac{1}{2C_1}[e^{C_1x+C_2}+e^{-(C_1x+C_2)}]=\frac{\operatorname{ch}(C_1x+C_2)}{C_1}$, es una catenaria. Si $k=-1$, se tiene $(x+C_2)^2+y^2=C_1^2$; es una circunferencia. Si $k=2$, se tiene $(x+C_2)^2=4C(y-C_1)$; es una parábola. Si $k=-2$, se tiene $dx=\sqrt{\frac{C_1y}{1-C_1y}}\,dy$; es la ecuación diferencial de la cicloide.

4201. $e^{\frac{y}{a}}=C_2\sec\left(\frac{x}{a}+C_1\right)$. **4202.** $Cx=y^{2k-1}$.

4203. Catenaria. **4204.** $v=\sqrt{\frac{mgv_0^2}{mg+kv_0^2}}$. **4205.** Parábola.

4206. $S=\frac{m}{3k}\left[\sqrt{\left(\frac{2k}{m}t+C\right)^3}-\sqrt{C^3}\right]$.

4207*. Que el eje de abscisas esté dirigido verticalmente hacia abajo, el origen de coordenadas esté a la superficie del líquido, la ecuación del rayo, $y=f(x)$. A la profundidad x tenemos $\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}(\alpha+d\alpha)}=\frac{m+dm}{m}$, donde m es el índice de refracción a la profundidad x, α es el ángulo formado entre la vertical y la tangente al rayo de luz. Es evidente que $\operatorname{tg}\alpha$ es igual a y'. Después de abrir los paréntesis en la ecuación $m\operatorname{sen}\alpha=(m+dm)(\operatorname{sen}\alpha\cos d\alpha+\cos\alpha\operatorname{sen}d\alpha)$ y suprimir las infinitesimales de orden superior a uno, obtenemos: $md\alpha=-dm\operatorname{tg}\alpha$, de donde $\frac{dm}{m}=-\frac{dy'}{y'(1+y'^2)}$. Efectuando la integración de esta ecuación hallamos y' como función de m. Sustituyendo m por su expresión mediante x e integrando la segunda vez, obtenemos la solución:

$$y=\frac{m_0h\operatorname{sen}\alpha_0}{m_2-m_1}\ln|m+\sqrt{m^2-m_0^2\operatorname{sen}^2\alpha_0}|+C,$$

donde $m=\frac{(m_2-m_1)x+m_1h}{h}$.

4208. $y=x^2\ln\sqrt{x}+C_1x^2+C_2x+C_3$

4209. $y=-\frac{1}{8}\operatorname{sen} 2x+C_1x^2+C_2x+C_3$.

4210. $y=\frac{e^{ax}}{a^{10}}+P_9$ (P_9 es el polinomio de noveno grado respecto a x con coeficientes arbitrarios).

4211. $y=C_1\frac{x^2}{2}+C_2x+C_3-C_1^2(x+C_1)\ln|x+C_1|$.

4212. $y=C_1x^5+C_2x^3+C_3x^2+C_4x+C_5$.

4213. $y=\frac{1}{3}(C_1-2x)^{\frac{3}{2}}+C_2x+C_3$.

4214. $x=C_1y^2+C_2y+C_3$.

4215. Las soluciones son susceptibles de ser presentadas de tres maneras: $y=C_1\operatorname{sen}(C_2x+C_3)$ ó $y=C_1\operatorname{sh}(C_2x+C_3)$ ó $y=C_1\operatorname{ch}(C_2x+C_3)$.

4216. $(x+C_2)^2+(y+C_3)^2=C_1^2$.

4217. $y=C_2\left(xe^{C_1x}-\frac{1}{C_1}e^{C_1x}\right)+C_3$.

4219. 2) $y=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{2x^3}{3!}+\frac{8x^4}{4!}+\frac{14x^5}{5!}+\ldots$

4220. $y=1-\frac{(x-1)^2}{2!}-\frac{2(x-1)^4}{4!}+\frac{3(x-1)^5}{5!}+\ldots$

4221. $y=\frac{\pi}{2}(x-1)+\frac{(x-1)^2}{2!}+\frac{(x-1)^3}{3!}-\frac{(x-1)^4}{4!}-\frac{4(x-1)^5}{5!}+\ldots$

4222. $y=1+x+\frac{x^3}{3!}+\frac{2x^4}{4!}+\frac{3x^5}{5!}+\ldots$ Si $f(x)\approx 1+x+\frac{x^3}{3!}+\frac{2x^4}{4!}$, para $x=-0,5$, resulta una serie numérica alternante y el valor de los primeros términos suprimidos es menor que 0,001.

4223. $y=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}-\frac{x^4}{4!}+\frac{4x^5}{5!}-\frac{14x^6}{6!}+\ldots$; de quinto orden.

4224. $y=x^2-\frac{1}{10}x^5+\frac{1}{80}x^8-\frac{7}{4400}x^{11}+\ldots$; 0,318; 0,96951.

4225*. La ecuación diferencial del problema es $E=L\frac{d^2Q}{dt^2}+\frac{dQ}{dt}\times\frac{V_0-kQ}{k_1}$, donde Q es la cantidad de electricidad que pasó por el circuito por el espacio de tiempo desde el comienzo del experimento hasta el momento t. Después de expresar Q mediante V (V es la cantidad disponible del agua en el baño en el momento t) y de determinar los coeficientes partiendo de los datos del problema, llegamos a la ecuación $V''+aVV'+b=0$, donde $a=\frac{1}{k_1L}=0,005$, $b=\frac{kE}{L}=0,00935$. Dadas las siguientes condiciones $V_0=1000$ cm³, $V_0'=-kI_0=-0,00187$ cm^3/s, efectuamos la integración de la ecuación y obtenemos la serie $V=1000-0,00187t-10^{-9}[2,91t^3-3,64t^4+3,64t^5-3,04t^6+2,17t^7-\ldots]$, que es alternante y cuyos coeficientes decrecen tendiendo a cero, lo cual es muy cómodo para efectuar los cálculos.

4226*. La ecuación diferencial del ejercicio presenta la forma

$$L\cdot\frac{d^2Q}{dt^2}+\frac{dQ}{dt}\cdot\frac{k_1}{M_0-kQ}=E.$$

Tomando como función buscada la cantidad y de cloruro de hidrógeno no descompuesta para el momento t, reducimos la ecuación a la forma $yy'' + ay' + by = 0$, donde $a = \frac{k_1}{L} = 50$, $b = \frac{kE}{L} = 0{,}0191$. Dadas las condiciones iniciales $y_0 = M_0 = 10$; $y'_0 = -kI_0 = -0{,}00381$, efectuamos la integración de esta ecuación y obtenemos la serie

$$y = 10 - 0{,}00381t + 10^{-10}t^3 (1{,}21 - 1{,}52t + \ldots).$$

4227. $x^2y'' - 6xy' + 12y = 0$.

4228. $xy'' - (2x + 1) y' + (x + 1) y = 0$.

4229. $(x^3 - 3x^2 + 3x) y''' - (x^3 - 3x + 3) y'' - 3x (1 - x) y' + 3 (1 - x) y = 0$.

4230. $y = 3x^2 - 2x^3$.

4231. a) $\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} \neq$ const; b) $y'' \operatorname{sen} 2x - 2y' \cos 2x = 0$.

4232*. 3) De acuerdo con la fórmula de Ostrogradski

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = C \cdot e^{-\int P(x)dx}$$

o, abriendo el determinante de Wronski (wronskiano): $y_1y'_2 - y'_1y_2 = Ce^{-\int P(x)dx}$. Después de dividir los dos miembros de la ecuación por y_1^2, obtenemos $\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = \frac{C}{y_1^2} e^{-\int P(x)dx}$, de donde se halla la relación buscada.

4233. $y = C_1 x \ln \left|\frac{1+x}{1-x}\right| - 2C_1 + C_2 x$.

4234. $y = C_1 \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} + C_2 \dfrac{\cos x}{x}$. 4235. $y = x^2 - e^{x-1}$.

4236*. Las funciones P y Q deben estar unidas por la relación $Q' + 2P \cdot Q = 0$. Poner $y_1 = \frac{1}{y_2}$ en la fórmula del ejercicio 4232 (que se deduce de la fórmula de Ostrogradski), derivar dos veces la relación así obtenida, y poner y'_2, y''_2 en la ecuación dada.

4237*. $y = C_1 (4x^3 - 3x) + C_2\sqrt{1 - x^2} (4x^2 - 1)$. De acuerdo con la condición ponemos $y_1 = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$. Poniendo y_1 en la ecuación dada obtenemos $B = 0$, $D = 0$, $A/C = \frac{4}{-3}$, ó $A = 4k$, $C = -3k$. De ahí, la solución particular es $y_1 = k (4x^3 - 3x)$. En conformidad con la propiedad de la ecuación lineal se puede admitir que $k = 1$, entonces se tiene $y_1 = 4x^3 - 3x$. Sabiendo una solución particular y aplicando el procedimiento ordinario, hallamos la segunda solución y formamos la solución general.

4238. $y = C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \left[1 - \operatorname{sen} x \ln \left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right|\right]$.

4239. $y = C_1 x + C_2 x \displaystyle\int \frac{e^x\,dx}{x^2}$. 4240. $y = C_1 x + C_2 (x^2 - 1)$.

4241. $y = C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3$. 4242. $y = x^3 + x (C_1 + C_2 \ln |x|)$.

4243. $y = C_1 e^x + C_2 x - x^2 - 1$. 4244. $y = C_1 x^3 + C_2 (x + 1) - x$.

4245. $y = 2 + 3x + x\left(\frac{\pi}{2} + 2 \operatorname{arctg} x\right) + x^2$.

4246. $y=-2+2x-x^2+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{7x^5}{60}-\ldots$

4247. $y=1+\frac{2x^4}{4!}-\frac{2x^5}{5!}+\frac{2x^6}{6!}-\frac{2x^7}{7!}+\frac{62x^8}{8!}-\ldots$

4248. $y=\frac{x^2}{2}+\left[\frac{x^4}{4!}+\frac{3x^6}{6!}+\frac{5x^8}{8!}+\ldots+\frac{(2n-1)\,x^{2n+2}}{(2n+2)!}+\ldots\right].$

4249. $y=C_1\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{12}+\frac{x^5}{24}+\ldots\right)+$
$+C_2\left(x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{12}+\frac{x^5}{30}+\ldots\right).$

4250. $y=C_1\left(1+\frac{x^4}{12}+\ldots\right)+C_2\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}+\ldots\right).$

4251. $y=C_1e^{x}+C_2e^{-2x}$. 4252. $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-3x}$.

4253. $y=C_1e^{4x}+C_2$. 4254. $y=C_1e^{(1+\sqrt{2})x}+C_2e^{(1-\sqrt{2})x}$.

4255. $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-\frac{4}{3}x}$. 4256. $y=C_1\cos x+C_2\operatorname{sen} x$.

4257. $y=e^{-3x}(C_1\cos 2x+C_2\operatorname{sen} 2x)$.

4258. $y=e^{x}\left(C_1\cos\frac{x}{2}+C_2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right)$.

4259. $y=e^{x}(C_1+C_2x)$. 4260. $x=(C_1+C_2t)\,e^{2,5t}$.

4261. $y=(C_1+C_2x)\,e^{-\frac{1}{4}x}$. 4262. $y=4e^{x}+2e^{3x}$.

4263. $y=3e^{-2x}\operatorname{sen} 5x$. 4264. $y=e^{-\frac{x}{2}}(2+x)$.

4265. $y=[1+(1-m)\,x]\,e^{mx}$. 4266. $y=\cos 3x-\frac{1}{3}\operatorname{sen} x$.

4267. Si $k>0$, se tiene $y=\frac{a}{\sqrt{k}}\operatorname{sen}[\sqrt{k}(x-x_0)]+y_0\cos\times$ $\times[\sqrt{k}(x-x_0)]$; Si $k<0$, se tiene $y=\frac{1}{2\sqrt{k_1}}[(y_0\sqrt{k_1}+a)\,e^{\sqrt{k_1}(x-x_0)}+$ $+(y_0\sqrt{k_1}-a)\,e^{-\sqrt{k_1}(x-x_0)}]$, donde $k_1=-k$.

4268. $y=C_1e^{-x}+C_2e^{\frac{x}{2}}+e^{x}$. 4269. $y=C_1\cos ax+C_2\operatorname{sen} ax+\frac{e^{x}}{a^2+1}$.

4270. $y=C_1e^{6x}+C_2e^{x}+\frac{5\operatorname{sen} x+7\cos x}{74}$.

4271. $y=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\operatorname{sen} 2x)-\frac{1}{2}\cos 2x-2\operatorname{sen} 2x$.

4272. $y=(C_1+C_2x)\,e^{3x}+\frac{2}{9}x^2+\frac{5}{27}x+\frac{11}{27}$.

4273. $y=e^{x}(C_1\cos x+C_2\operatorname{sen} x)+x+1$.

4274. $y=C_1e^{x}+C_2e^{-5x}-0,2$.

4275. $y=C_1e^{x}+C_2e^{2x}+\bar{y}$, donde $\bar{y}$ es igual a 1) $\frac{5}{3}e^{-x}$;

2) $3xe^{2x}$; 3) $\frac{3}{5}\cos x+\frac{1}{5}\operatorname{sen} x$; 4) $x^3+\frac{9}{2}x^2+\frac{21}{2}x-\frac{15}{4}$;

5) $-\frac{8}{5}e^x\left[\cos\frac{x}{2}+2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right]$; 6) $\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}-\frac{1}{12}e^{-2x}$; 7) $e^x(2x^2+x)$;

8) $\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}(9+3\cos 2x-\operatorname{sen} 2x)$; 9) $-2xe^x-\frac{1}{12}e^{-2x}$;

10) $\frac{1}{20}\cos x-\frac{3}{20}\operatorname{sen} x+\frac{7}{260}\cos 3x+\frac{9}{260}\operatorname{sen} 3x$; 11) $-\frac{1}{12}e^{-x}-\frac{1}{2}xe^x$.

4276. $y=C_1+C_2e^{-\frac{5}{2}x}+\bar{y}$, donde $\bar{y}$ es igual a: 1) $\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{5}x^2+\frac{7}{25}x$;

2) $\frac{1}{7}e^x$; 3) $5\operatorname{sen} x-2\cos x$; 4) $\frac{1}{10}x+\frac{5}{164}\operatorname{sen} 2x-\frac{1}{41}\cos 2x$;

5) $\cos 2{,}5x+\operatorname{sen} 2{,}5x-0{,}02xe^{-2{,}5x}$;

6) $\left(-5x-\frac{16}{29}\right)\cos x-\left(2x-\frac{185}{29}\right)\operatorname{sen} x$;

7) $e^{-x}[(10x+18)\operatorname{sen} x-(20x+1)\cos x]$; 8) $\frac{3}{10}\left(\frac{1}{5}e^{\frac{5}{2}x}-xe^{-\frac{5}{2}x}\right)$.

4277. $y=e^{2x}(C_1+C_2x)+\bar{y}$, donde $\bar{y}$ es igual a: 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{1}{9}e^{-x}$;

3) $\frac{3}{2}x^2e^{2x}$; 4) $\frac{1}{4}\cos 2x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$;

5) $\frac{1}{169}\left(\frac{-5}{2}\operatorname{sen} 3x+6\cos 3x\right)-\frac{1}{50}(3\operatorname{sen} x+4\cos x)$;

6) $\frac{3}{100}(3\operatorname{sen} x+4\cos x)+\frac{1}{676}(5\operatorname{sen} 3x-12\cos 3x)$;

7) $2x^2+4x+3+4x^2e^{2x}+\cos 2x$; 8) $\frac{1}{4}\left(x^2e^{2x}-\frac{1}{8}e^{-2x}\right)$;

9) $\frac{1}{2}\left(e^x-\frac{1}{9}e^{-x}\right)+\frac{1}{25}(3\operatorname{sen} x+4\cos x)$; 10) $e^x-\frac{1}{2}e^{x-1}+\frac{1}{18}e^{1-x}$.

4278. $y=C_1\cos x+C_2\operatorname{sen} x+\bar{y}$, donde $\bar{y}$ es igual a: 1) $2x^3-13x+2$;

2) $\cos 3x$; 3) $\frac{1}{2}x\operatorname{sen} x$; 4) $-\frac{1}{2}x\cos x-e^{-x}$; 5) $\frac{1}{4}\left(x\operatorname{sen} x-\frac{1}{4}\cos 3x\right)$;

6) $9+4\cos 2x-0{,}2\cos 4x$; 7) $0{,}5\operatorname{ch} x$; 8) $0{,}5+0{,}1\operatorname{ch} 2x$.

4279. $y=e^{\frac{3}{5}x}\left(C_1\cos\frac{4}{5}x+C_2\operatorname{sen}\frac{4}{5}x\right)+\bar{y}$, donde y es igual a:

1) $\frac{25}{16}e^{\frac{3}{5}x}$; 2) $\frac{15}{219}\operatorname{sen}\frac{4}{5}x+\frac{40}{219}\cos\frac{4}{5}x$;

3) $\frac{1}{13}e^{2x}+\frac{1}{5}\left(2x^3+\frac{36}{5}x^2+\frac{107}{25}x-\frac{908}{125}\right)$; 4) $-\frac{5}{9}\cos x\cdot e^{\frac{3}{5}x}$.

5) $-\frac{1}{8}xe^{\frac{3}{5}x}\cos\frac{4}{5}x$; 6) $0{,}5e^{2x}+1{,}3$.

4280. $y=2+C_1\cos x+C_2\,\text{sen}\,x+\cos x\ln\left|\text{tg}\,\frac{x}{2}\right|$.

4281. $y=e^x\,(C_1+C_2x-\ln\sqrt{x^2+1}+x\,\text{arctg}\,x)$.

4282. 1) $y=e^x\,(x+C_1)-(e^x+1)\ln(e^x+1)+C_2$;

2) $y=\frac{1}{2}e^x\,[\text{arcsen}\,e^x+e^x\sqrt{1-e^{2x}}+C_1]+\frac{1}{3}\sqrt{(1-e^{2x})^3}+C_2$;

3) $y=C_1e^x-\cos e^x+C_2$.

4283. $y=(1+x)\,e^{-\frac{3}{2}}+2e^{-\frac{5}{2}x}$.

4284. $x=e^x\,(0{,}16\cos 3x+0{,}28\,\text{sen}\,3x)+x^2+2{,}2x+0{,}84$.

4285. $y=e^x+x^2$. 4286. $y=e^x\,(e^x-x^2-x+1)$.

4287. $y=\frac{1}{3}\,\text{sen}\,2x-\frac{1}{3}\,\text{sen}\,x-\cos x$.

4288*. Efectuar dos veces la derivación de las expresiones indicadas para y; en la ecuación introducir y, y' e y''. En los tres casos se obtiene una identidad.

4289. $y=x^3\,(C_1+C_2x^4)$.

4290. $y=\frac{x}{2}+C_1\cos\ln|x|+C_2\,\text{sen}\ln|x|$.

4291. $y=x\,[C_1+C_2\ln|x|+\ln^2|x|]$.

4292. $y=x\ln|x|+C_1x+C_2x^2+x^3$.

4293. Si $\frac{1}{m\alpha}>\omega^2$, se tiene $y=C_1\cos kt+C_2\,\text{sen}\,kt+\frac{g}{k^2-\omega^2}\cos\omega t+\frac{e\omega^2}{k^2}$, donde $k^2=\frac{1}{m\alpha}-\omega^2$. Si $\frac{1}{m\alpha}<\omega^2$, se tiene $y=C_1e^{kt}+C_2e^{kt}-\frac{g}{k^2+\omega^2}\cos\omega t-\frac{e\omega^2}{k^2}$ donde $k^2=\omega^2-\frac{1}{m\alpha}$. 4294. $s=\frac{1}{5}\,(4e^t+e^{-4t})$.

4295. $s=e^{-0{,}2t}\,[10\cos(0{,}245t)+8{,}16\,\text{sen}\,(0{,}245t)]$; $s\,|_{t=3}\approx 7{,}07$ cm.

4296. $t=\sqrt{\frac{am}{f}}\ln\frac{F+\sqrt{f\,(2F-f)}}{F-f}$.

4297. $s=e^{-0{,}245t}\,[2\cos(156{,}6t)+0{,}00313\,\text{sen}\,(156{,}6t)]$.

4298*. $k=33\,\frac{1}{3}\,\frac{g}{cm}=33\,\frac{1}{3}\cdot g\,\frac{dinas}{cm}$; $t=0{,}38$ s; la altura de la parte sumergida del zoquete de madera es $x=5\,[3+\cos(8{,}16t)]$. Formando la ecuación considerar $g=1000$ cm/s^2.

4299*. $r=\frac{a_0}{2}\,(e^{\omega t}+e^{-\omega t})$. Todo ocurre de tal modo como si el tubo fuese inmóvil, pero sobre el globo actúa la fuerza igual a $m\omega^2r$ (r es la distancia que media entre el eje de revolución y el globo).

4300. Si $k>m\omega^2$, se tiene $r=\frac{a_0}{k-m\omega^2}\left[k-m\omega^2\cos\left(t\sqrt{\frac{k}{m}-\omega^2}\right)\right]$;

Si $k=m\omega^2$, se tiene $r=a_0\left(1+\frac{k}{2m}t^2\right)$;

Si $k<m\omega^2$, se tiene $r=\frac{a_0}{m\omega^2-k}\left[m\omega^2\,\text{ch}\left(t\sqrt{\omega^2-\frac{k}{m}}\right)-k\right]$.

4301. $y = C_1 \cos 3x + C_2 \operatorname{sen} 3x + C_3$.

4302. $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + C_3e^{3x} + C_4e^{-3x}$.

4303. $y = (C_1 + C_2x)\, e^{2x} + (C_3 + C_4x)\, e^{-2x}$.

4304. $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + C_3 \cos 2x + C_4 \operatorname{sen} 2x$.

4305. $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x} + C_3e^{4x}$.

4306. $y = C_1e^{x} + C_2xe^{x} + C_3x^2e^{x}$.

4307. $y = C_1 + C_2x + C_3e^{-x} + C_4xe^{-x}$.

4308. $y = C_1e^{x} + C_2e^{-x} + C_3x^{n-3} + C_4x^{n-4} + \ldots + C_{n-1}x + C_n$.

4309. $y = e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(C_1 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + C_2 \operatorname{sen} \frac{x}{\sqrt{2}}\right) + e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(C_3 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + C_4 \operatorname{sen} \frac{x}{\sqrt{2}}\right)$.

4310. $y = (C_1 + C_2x + C_3x^2) \cos \frac{x}{2} + (C_4 + C_5x + C_6x^2) \operatorname{sen} \frac{x}{2} + C_7x + C_8$.

4311. $y = e^{-x}(C_1 + C_2x + C_3x^2 + \ldots + C_nx^{n-1})$.

4312. $y = 1 + \cos x$.

4313. $y = e^{x} + \cos x - 2$.

4314. $y = (C_1 + C_2x)\, e^{x} + C_3e^{2x} - x - 4$.

4315. $y = (C_1 + C_2x)\, e^{x} + C_3e^{-2x} + (x^2 + x - 1)\, e^{-x}$.

4316. $y = (C_1 + C_2x) \cos 2x + (C_3 + C_4x) \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{9} \cos x$.

4317. $y = (C_1 + C_2x) \cos ax + (C_3 + C_4x) \operatorname{sen} ax - \frac{x^2 \cos ax}{8a^2}$.

4318. $y = \frac{1}{60}x^5 - \frac{1}{2}x^3 + C_1x^2 + C_2x + C_3 + C_4 \cos x + C_5 \operatorname{sen} x$.

4319. $y = C_1e^{x} + C_2e^{-x} + C_3 \operatorname{sen} x + C_4 \cos x + \frac{x^2 - 3x}{8} e^{x} - \frac{1}{4} x \operatorname{sen} x$.

4320. $y = (C_1 + C_2x + x^2)\, e^{x} + (C_3 + C_4x + x^2)\, e^{-x} + \operatorname{sen} x + \cos x$.

4321. $y = 4 - 3e^{-x} + e^{-2x}$.

4322. $y = e^{x} + x^3$.

4323. $y = x\,(C_1 + C_2 \ln |x| + C_3 \ln^2 |x|)$.

4324. 1. $\begin{cases} x = e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \operatorname{sen} t), \\ y = e^{-6t}[(C_2 + C_1) \cos t + (C_2 - C_1) \operatorname{sen} t]. \end{cases}$

4324.2. $\begin{cases} x = C_1e^{t} + C_2e^{5t}, \\ y = -C_1e^{t} + 3C_2e^{5t}. \end{cases}$
4324.3. $\begin{cases} x = e^{t}(C_1 \cos 3t + C_2 \operatorname{sen} 3t), \\ y = e^{t}(C_1 \operatorname{sen} 3t - C_2 \cos 3t). \end{cases}$

4324.4. $\begin{cases} x = C_1e^{t} + C_2e^{2t} + C_3e^{-t}, \\ y = C_1e^{t} - 3C_3e^{-t}, \\ z = C_1e^{t} + C_2e^{2t} - 5C_3e^{-t}. \end{cases}$
4324.5. $\begin{cases} x = C_1 + 3C_2e^{2t}, \\ y = -2C_2e^{2t} + C_3e^{-t}, \\ z = C_1 + C_2e^{2t} - 2C_3e^{-t}. \end{cases}$

4324.6. $\begin{cases} x = C_1e^{t} + C_2e^{2t} + C_3e^{5t}, \\ y = C_1e^{t} - 2C_2e^{2t} + C_3e^{5t}, \\ z = -C_1e^{t} - 3C_2e^{2t} + 3C_3e^{5t}. \end{cases}$

4324.7. $\begin{cases} x = C_1e^{2t} + e^{3t}(C_2 \cos t + C_3 \operatorname{sen} t), \\ y = e^{3t}[(C_2 + C_3) \cos t + (C_3 - C_2) \operatorname{sen} t], \\ z = C_1e^{2t} + e^{3t}[(2C_2 - C_3) \cos t + (C_2 + 2C_3) \operatorname{sen} t]. \end{cases}$

4325. $\begin{cases} x=C_1e^t+C_2e^{-t}+t\operatorname{sh}t, \\ y=C_1e^t-C_2e^{-t}+\operatorname{sh}t+t\operatorname{ch}t. \end{cases}$

4326. $\begin{cases} x=C_1e^{-4t}+C_2e^{-7t}+\dfrac{7}{40}e^t+\dfrac{1}{5}e^{-2t}, \\ y=\dfrac{1}{2}C_1e^{-4t}-C_2e^{-7t}+\dfrac{1}{40}e^t+\dfrac{3}{10}e^{-2t}. \end{cases}$

4327. $\begin{cases} z=C_1y; \\ zy^2-\dfrac{3}{2}x^2=C_2. \end{cases}$

4328. $\begin{cases} y=\dfrac{\sqrt{C_1+x^2}}{\ln\left|\dfrac{C_2}{x+\sqrt{x^2+C_1}}\right|}, \\ z=\sqrt{C_1+x^2}\ln\left|\dfrac{C_2}{x+\sqrt{x^2+C_1}}\right|. \end{cases}$

4329. $\begin{cases} \dfrac{y}{x}=C_1; \\ x^2+y^2+z^2=C_2. \end{cases}$ 4330. $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=C_1y, \\ z=C_2y. \end{cases}$

4331. $\begin{cases} y^2-z^2=C_1; \\ yz-y^2-x=C_2. \end{cases}$ 4332. $\begin{cases} x=C_1e^{-t}+C_2e^{-3t}, \\ y=C_1e^{-t}+3C_2e^{-3t}+\cos t. \end{cases}$

4333. $\begin{cases} x=C_1e^t+C_2e^{-t}+C_3\cos t+C_4\operatorname{sen}t, \\ y=C_1e^t+C_2e^{-t}-C_3\cos t-C_4\operatorname{sen}t. \end{cases}$

4334. $\begin{cases} x=C_1+C_2t+C_3t^2-\dfrac{1}{6}t^3+e^t, \\ y=C_4-(C_1+2C_3)\,t-\dfrac{1}{2}\,(C_2-1)\,t^2-\dfrac{1}{3}C_3t^3+\dfrac{t^4}{24}-e^t. \end{cases}$

4335. $\begin{cases} x+y+z=C_1; \\ x^2+y^2+z^2=C_2. \end{cases}$ 4336. $\begin{cases} z=x-y; \\ y\,(y-2x)^3=(x-y)^2. \end{cases}$

4337. $\begin{cases} x=\dfrac{t}{3}, \\ y=-\dfrac{t}{3}. \end{cases}$

4338. $\begin{cases} x=\dfrac{1}{3}e^{-t}+\dfrac{1}{6}e^{2t}+\dfrac{1}{2}e^{-2t}, \\ y=\dfrac{1}{3}e^{-t}+\dfrac{1}{6}e^{2t}-\dfrac{1}{2}e^{-2t}, \\ z=-\dfrac{1}{3}e^{-t}+\dfrac{1}{3}e^{2t}. \end{cases}$ 4339. $\begin{cases} x=-e^{-t}, \\ y=e^{-t}, \\ z=0. \end{cases}$

4340. Las líneas son $y_1=\dfrac{C_1x^2-C_2}{2x}$ e $y_2=-\dfrac{C_1x^2+C_2}{2x}$. Dadas las condiciones iniciales se obtienen las hipérbolas

$$y_1=\frac{3-x^2}{2x}, \qquad y_2=\frac{3+x^2}{2x}.$$

4341. $y=e^{2x}$. 4342. Línea plana $\begin{cases} x-y+z=0; \\ x=\pm\dfrac{z\ln|z|}{\sqrt{2}}. \end{cases}$

4343. $\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}\left[gt^2+(l_1-l_0)\left(1-\cos\dfrac{\pi t}{2T}\right)\right], \\ y=\dfrac{1}{2}\left[gt^2+l_0+l_1+(l_1-l_0)\cos\dfrac{\pi t}{2T}\right]. \end{cases}$

4344. $\begin{cases} x=10\operatorname{ch}2t-\dfrac{4}{49}\cos 14t+\dfrac{200}{49}, \\ y=10\operatorname{ch}2t+\dfrac{6}{49}\cos 14s-\dfrac{300}{49}. \end{cases}$

Aquí x es el trayecto del globo más pesado, e y, del globo más ligero.

4345. $A=\dfrac{k\alpha^2}{2k_1}\left[1-\left(\dfrac{1-\beta e^{\alpha kt}}{1+\beta e^{\alpha kt}}\right)^2\right]$. $B=\alpha\dfrac{1-\beta e^{\alpha kt}}{1+\beta e^{\alpha kt}}$, donde $\alpha=\sqrt{B_0^2+\dfrac{2k_1}{k}A_0}$, $\beta=\dfrac{\alpha-B_0}{\alpha+B_0}$.

4346*. Si T es la cantidad del veneno, se tiene $\dfrac{dN}{dt}=aN-bNT$, $\dfrac{dT}{dt}=$ $=cN$ y $\dfrac{dN}{dt}=0$ en el momento en que $N=M$.

4347. $h_1=\dfrac{S_1H_1+S_2H_2}{S_1+S_2}+\dfrac{S_2}{S_1+S_2}(H_1-H_2)e^{-\alpha\frac{S_1+S_2}{S_1S_2}}$,

$h_2=\dfrac{S_1H_1+S_2H_2}{S_1+S_2}-\dfrac{S_1}{S_1+S_2}(H_1-H_2)e^{-\alpha\frac{S_1+S_2}{S_1S_2}}$

4348. 1) $\theta-\theta_0+0{,}002(\theta^2-\theta_0^2)=0{,}00008\dfrac{E_1^2t^3}{R_0T^2}$; en 53°;

2) $\theta-\theta_0+0{,}002(\theta^2-\theta_0^2)=\dfrac{6E_0^2}{\pi R_0\cdot 10^7}\cdot(200\pi t-\operatorname{sen}200\pi t)$; en 76°.

4349. 1) 44,5°; 2) 46,2°.

4350.

x	1,00	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25
y	1,000	1,000	0,997	0,992	0,984	0,973

x	1,30	1,35	1,40	1,45	1,50
y	0,959	0,942	0,923	0,901	0,876