Capítulo IX

Series

§ 1. Series numéricas

Convergencia de la serie numérica

En los ejercicios 2727—2736 para cada serie: 1) hallar la suma de los n primeros términos de la serie (S_n), 2) demostrar la convergencia de la serie, partiendo directamente del concepto de convergencia y 3) hallar la suma de la serie (S).

2727*. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots$

2728. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\ldots$

2729. $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\ldots$

2730. $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{n(n+3)}+\ldots$

2731. $\frac{1}{1\cdot 7}+\frac{1}{3\cdot 9}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+5)}+\ldots$

2732. $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}+\ldots$

2733. $\frac{5}{6}+\frac{13}{36}+\ldots+\frac{3^n+2^n}{6^n}+\ldots$

2734. $\frac{3}{4}+\frac{5}{36}+\ldots+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}+\ldots$

2735. $\frac{1}{9}+\frac{2}{225}+\ldots+\frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}+\ldots$

2736. $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{8}+\ldots+\operatorname{arctg}\frac{1}{2\cdot n^2}+\ldots$

Series de términos positivos

En los ejercicios 2737—2753 partiendo de los criterios de comparación determinar si las series dadas son convergentes.

2737. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)\cdot 2^{2n-1}}+\ldots$

2738. $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}+\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}+\ldots+\operatorname{sen}\frac{\pi}{2^n}+\ldots$

2739. $1+\frac{1+2}{1+2^2}+\ldots+\frac{1+n}{1+n^2}+\ldots$

2740. $\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 6}+\ldots+\frac{1}{(n+1)(n+4)}+\ldots$

2741. $\frac{2}{3}+\frac{3}{8}+\ldots+\frac{n+1}{(n+2)\,n}+\ldots$

2742. $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}+\ldots+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4n}+\ldots$

2743. $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{n^2+1}+\ldots$

2744. $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{3n-1}+\ldots$

2745. $\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\ldots+\frac{1}{\ln (n+1)}+\ldots$

2746. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-4n+5}.$

2747. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n^2}{1+n^3}\right)^2.$

2748. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}.$

2749. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^5}}.$

2750. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}).$

2751. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{1}{n^4+1}}.$

2752. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}).$

2753. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}).$

13-0176

En los ejercicios 2754—2762 demostrar la convergencia de las series dadas aplicando el criterio de D'Alembert.

2754. $\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)!}+\ldots$

2755. $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\ldots+\frac{n}{2^n}+\ldots$

2756. $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+2\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}+\ldots+n\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^{n+1}}+\ldots$

2757. $\frac{2}{1}+\frac{2\cdot 5}{1\cdot 5}+\ldots+\frac{2\cdot 5\cdot\ \ldots\ \cdot(3n-1)}{1\cdot 5\cdot\ \ldots\ \cdot(4n-3)}+\ldots$

2758. $\frac{1}{3}+\frac{4}{9}+\ldots+\frac{n^2}{3^n}+\ldots$

2759. $\frac{1}{3}+\frac{1\cdot 3}{3\cdot 6}+\ldots+\frac{1\cdot 3\cdot\ \ldots\ \cdot(2n-1)}{3^n\cdot n!}+\ldots$

2760. $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}+4\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}+\ldots+n^2\operatorname{sen}\frac{\pi}{2^n}+\ldots$

2761. $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots+\frac{n}{(n+1)!}+\ldots$

2762. $\frac{2}{2}+\frac{2\cdot 3}{2\cdot 4}+\ldots+\frac{(n+1)!}{2^n\cdot n!}+\ldots$

En los ejercicios 2763—2766 demostrar la convergencia de las series dadas aplicando el criterio de la radical de Cauchy.

2763. $\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln^2 3}+\ldots+\frac{1}{\ln^n (n+1)}+\ldots$

2764. $\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\ldots+\left(\frac{n}{(2n+1)}\right)^n+\ldots$

2765. $\operatorname{arcsen} 1+\operatorname{arcsen}^2\frac{1}{2}+\ldots+\operatorname{arcsen}\frac{1}{n}+\ldots+$

2766. $\frac{2}{3}+\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^4}{9}+\ldots+\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n2}}{3^n}+\ldots$

En los ejercicios 2767—2770 aclarar si las series dadas son convergentes aplicando el criterio de la integral de Cauchy.

2767. $\frac{1}{2\ln^2 2}+\frac{1}{3\ln^2 3}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\ln^2 (n+1)}+\ldots$

2768. $\frac{1}{2\ln 2}+\frac{1}{3\ln 3}+\ldots+\frac{1}{n\ln n}+\ldots$

2769. $\left(\frac{1+1}{1+1^2}\right)^2+\left(\frac{1+2}{1+2^2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1+n}{1+n^2}\right)^2+\ldots$

2770. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\frac{n+1}{n-1}$.

En los ejercicios 2771—2784 aclarar cuáles de las series dadas son convergentes y cuáles son divergentes.

2771. $\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}+\ldots$

2772. $1+\frac{2}{3}+\ldots+\frac{n}{2n-1}+\ldots$

2773. $\sqrt{2}+\sqrt{\frac{3}{2}}+\ldots+\sqrt{\frac{n+1}{n}}+\ldots$

2774. $1+\frac{4}{1\cdot 2}+\ldots+\frac{n^2}{n!}+\ldots$

2775. $2+\frac{5}{8}+\ldots+\frac{n^2+1}{n^3}+\ldots$

2776. $\frac{1}{1001}+\frac{2}{2001}+\ldots+\frac{n}{1000n+1}+\ldots$

2777. $\frac{1}{1+1^2}+\frac{2}{1+2^2}+\ldots+\frac{n}{1+n^2}+\ldots$

2778. $\frac{1}{3}+\frac{3}{3^2}+\ldots+\frac{2n-1}{3n}+\ldots$

2779. $\operatorname{arctg} 1+\operatorname{arctg}^2\frac{1}{2}+\ldots+\operatorname{arctg}^n\frac{1}{n}+\ldots$

2780. $2+\frac{4}{16}+\ldots+\frac{2^n}{n^4}+\ldots$

2781. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{6\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(5n-4)(4n-1)}+\ldots$

2782. $\frac{3}{2}+\frac{9}{8}+\ldots+\frac{3^n}{n\cdot 2^n}+\ldots$

2783. $1+\frac{1\cdot 2}{2^2}+\ldots+\frac{n!}{n^n}+\ldots$

2784*. $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}+\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}+\ldots+\operatorname{sen}\frac{\pi}{2n}+\ldots$

En los ejercicios 2785—2789 demostrar cada una de las relaciones mediante una serie cuyo término común sea la función dada.

2785. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0.$ 2786. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n)!}{a^{n!}}=0 \quad (a>1).$

2787. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{(2n)!}=0.$ 2788. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{n}}{(n!)^2}=0.$

2789. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n!)^n}{n^{n^2}}=0.$

Otras series. Convergencia absoluta

En los ejercicios 2790—2799 aclarar cuáles de las series dadas son absolutamente convergentes, cuáles son convergentes de manera no absoluta, cuáles son divergentes.

2790. $1-\frac{1}{3}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}+\ldots$

2791. $1-\frac{1}{3^3}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)^3}+\ldots$

2792. $\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 3}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{\ln(n+1)}+\ldots$

2793. $\frac{\operatorname{sen}\alpha}{1}+\frac{\operatorname{sen}2\alpha}{4}+\ldots+\frac{\operatorname{sen}n\alpha}{n^2}+\ldots$

2794. $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2^n}+\ldots$

2795. $2-\frac{3}{2}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n}+\ldots$

2796. $-1+\frac{1}{\sqrt{2}}-\ldots+(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots$

2797. $\frac{1}{2}-\frac{8}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{n^3}{2^n}+\ldots$

2798. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\ln n}$. **2799.** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n^2}{n!}$.

2800. Mostrar que si las series $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ y $\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2$ son convergentes, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ es absolutamente convergente.

2801. Mostrar que si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ es absolutamente convergente, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}a_n$ también lo será.

§ 2. Series funcionales

Convergencia de las series funcionales

En los ejercicios 2802—2816 determinar los campos de convergencia de las series.

2802. $1+x+\ldots+x^n+\ldots$

2803. $\ln x+\ln^2 x+\ldots+\ln^n x+\ldots$

2804. $x+x^4+\ldots+x^{n^2}+\ldots$

2805. $x+\frac{x^2}{2^2}+\ldots+\frac{x^n}{n^2}+\ldots$

2806. $x+\frac{x^2}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{x^n}{\sqrt{n}}+\ldots$

2807. $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+x^2}+\ldots+\frac{1}{1+x^n}+\ldots$

2808. $2x+6x^2+\ldots+n(n+1)x^n+\ldots$

2809. $\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2+\sqrt{2}}+\ldots+\frac{x^n}{n+\sqrt{n}}+\ldots$

2810. $\frac{x}{1+x^2}+\frac{x^2}{1+x^4}+\ldots+\frac{x^n}{1+x^{2n}}+\ldots$

2811. $\operatorname{sen}\frac{x}{2}+\operatorname{sen}\frac{x}{4}+\ldots+\operatorname{sen}\frac{x}{2^n}+\ldots$

2812. $x\operatorname{tg}\frac{x}{2}+x^2\operatorname{tg}\frac{x}{4}+\ldots+x^n\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}+\ldots$

2813. $\operatorname{sen} x+\frac{\operatorname{sen} 2x}{2^2}+\ldots+\frac{\operatorname{sen} nx}{n^2}+\ldots$

2814. $\frac{\cos x}{e^x}+\frac{\cos 2x}{e^{2x}}+\ldots+\frac{\cos nx}{e^{nx}}+\ldots$

2815. $e^{-x}+e^{-4x}+\ldots+e^{-n^2x}+\ldots$

2816. $\frac{x}{e^x}+\frac{2x}{e^{2x}}+\ldots+\frac{nx}{e^{nx}}+\ldots$

Convergencia uniforme (regular)

En los ejercicios 2817—2820 demostrar que las series dadas son uniformemente (regularmente) convergentes en todo el eje Ox.

2817. $1+\frac{\operatorname{sen} x}{1!}+\ldots+\frac{\operatorname{sen} nx}{n!}+\ldots$

2818. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2[1+(nx)^2]}$. **2819.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} nx}{2^n}$. **2820.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-n^2x^2}}{n^2}$.

2821. Mostrar que la serie $\frac{1}{1+[\varphi(x)]^2}+\frac{1}{4+[\varphi(x)]^2}+\ldots$
$\ldots+\frac{1}{n^2+[\varphi(x)]^2}+\ldots$

es uniformemente (regularmente) convergente en cualquier intervalo en que viene definida la función $\varphi(x)$.

2822. Mostrar que la serie $\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{2\sqrt{1+2x}}+\ldots$ $\ldots+\frac{1}{2^{n-1}\sqrt{1+nx}}+\ldots$ es uniformemente (regularmente) convergente en todo el semieje positivo. ¿Cuántos términos deberíamos tomar para que pudiéramos calcular, para cualquier x no negativa, la suma de la serie con exactitud hasta 0,001?

2823*. Mostrar que la serie $\frac{\ln(1+x)}{x}+\frac{\ln(1+2x)}{2x^2}+\ldots$ $\ldots+\frac{\ln(1+nx)}{nx^n}+\ldots$ es uniformemente convergente en el intervalo $1+\omega\leqslant x<\infty$, donde ω es cualquier número positivo. Quedarse convencido de que para cualquier x del intervalo $(2\leqslant x\leqslant 100)$ es suficiente tomar ocho términos para obtener la suma de la serie con exactitud hasta 0,01.

2824. Mostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x)$ es convergente de manera no uniforme en el intervalo $[0, 1]$.

2825. La función $f(x)$ viene definida por la igualdad

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{10^n}.$$

Mostrar que la función $f(x)$ está definida y es continua para cualquier x. Hallar $f(0)$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$. Quedar convencido de que es suficiente tomar tres términos de la serie para calcular valores aproximados de la función $f(x)$, para cualquier x, con exactitud hasta 0,001. Hallar $f(1)$ y $f(-0,2)$ con esta misma exactitud.

2826. La funcin $f(x)$ viene definida por la igualdad

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+(x+n\omega)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+(x-n\omega)^2}\quad(\omega>0).$$

Mostrar que la función $f(x)$ está definida y es continua para cualquier x. Quedar convencido de que la función $f(x)$ es periódica cuyo período es ω.

Integración y derivación de las series

2827. Mostrar que la serie $x^2+x^6+\ldots+x^{4n-2}+\ldots$ es uniformemente convergente en el intervalo $-1+\omega \leqslant x \leqslant 1-\omega$, donde ω es cualquier número positivo menor que 1. Integrando la serie dada hallar la suma de la serie

$$\frac{x^3}{3}+\frac{x^7}{7}+\ldots+\frac{x^{4n-1}}{4n-1}+\ldots$$

en el intervalo $(-1, 1)$.

2828. Hallar la suma de la serie

$$x+\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{x^{4n-3}}{4n-3}+\ldots$$

2829. Hallar la suma de la serie

$$\frac{x^2}{1\cdot 2}-\frac{x^3}{2\cdot 3}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}+\ldots$$

2830. La función $f(x)$ viene definida por la igualdad

$$f(x)=e^{-x}+2e^{-2x}+\ldots+ne^{-nx}+\ldots$$

Mostrar que la función $f(x)$ es continua en todo el semieje positivo Ox. Calcular $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3} f(x)\,dx$.

2831. La función $f(x)$ viene definida por la igualdad

$$f(x)=1+2\cdot 3x+\ldots+n3^{n-1}x^{n-1}+\ldots$$

Mostrar que la función $f(x)$ es continua en el intervalo $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Calcular $\int\limits_{0}^{0,125} f(x)\,dx$.

2832*. La función $f(x)$ viene definida por la igualdad

$$f(x)=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{x}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}+\ldots$$

Después de haber quedado convencido de que la función $f(x)$ es continua en el intervalo de integración dado, calcular $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$.

2833*. La función $f(x)$ viene definida por la serie $f(x)= = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4+x^2}$. Mostrar que la función $f(x)$ es continua en todo el eje numérico. Calcular $\int_0^{\infty} f(x)\,dx$.

2834. Partiendo de la relación $\int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1}$ hallar la suma de la serie:

1) $1-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{3n-2}+\ldots$, 2) $1-\frac{1}{5}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{4n-3}+\ldots$

2835. Partiendo de la relación $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^{n+1}} = \frac{1}{n2^n}$ hallar la suma de la serie $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 2^2}+\ldots+\frac{1}{n2^n}+\ldots$

2836. Partiendo de la relación

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x\,dx = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 3\cdot 1}{2n(2n-2)\ldots 4\cdot 2},$$

hallar la suma de la serie

$$\frac{1}{2}-\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n}+\ldots$$

2837. Demostrar que la serie

$$\frac{\operatorname{sen} 2\pi x}{2}+\frac{\operatorname{sen} 4\pi x}{4}+\ldots+\frac{\operatorname{sen} 2^n\pi x}{2^n}+\ldots$$

es uniformemente convergente en todo el eje numérico. Mostrar que esta serie no es susceptible de ser derivada término a término en ninguno de los intervalos.

2838. Partiendo de la igualdad $1+x+x^2+\ldots=\frac{1}{1-x}$ $(|x|<1)$ sumar las series $1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}+\ldots$ y $1+3x+\ldots$ $\ldots+\frac{n(n+1)}{2}x^{n-1}+\ldots$ y mostrar que la serie $1+2x+\ldots$ $\ldots+nx^{n-1}+\ldots$ es unifomemente convergente en el intervalo $-\rho, \rho]$, donde $|\rho|<1$.

2839. Mostrar la validez de la igualdad

$$\frac{1}{1+x}+\frac{2x}{1+x^2}+\ldots+\frac{mx^{m-1}}{1+x^m}+\ldots=\frac{1}{1-x},$$

donde $m=2^{n-1}$ y $-1<x<1$.

2840. Mostrar que la función $y=f(x)$ definida por la serie $x+x^2+\frac{x^3}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{(n-1)!}+\ldots$, satisface la relación $xy'=y(x+1)$.

§ 3. Series de potencias

Desarrollo de las funciones en series de potencias

2841. Desarrollar la función $y=\ln x$ en serie de Taylor en el entorno del punto $x=1$ (para $x_0=1$).

2842. Desarrollar la función $y=\sqrt{x^3}$ en serie de Taylor en el entorno del punto $x=1$.

2843. Desarrollar la función $y=1/x$ en serie de Taylor en el entorno del punto $x=3$.

2844. Desarrollar la función $y=\operatorname{sen}\frac{\pi x}{4}$ en serie de Taylor en el entorno del punto $x=2$.

En los ejercicios 2845—2849 desarrollar las funciones dadas en serie de Taylor en el entorno del punto $x=0$ (serie de Maclaurin):

2845. $y=\operatorname{ch} x$. **2846.** $y=x^2e^x$. **2847.** $y=\cos(x+\alpha)$.

2848. $y=e^x\operatorname{sen} x$. **2849.** $y=\cos x\operatorname{ch} x$.

En los ejercicios 2850—2854 hallar los cinco primeros términos de la serie de Taylor para las funciones dadas en el entorno del punto $x=0$.

2850. $y=\ln(1+e^x)$. **2851.** $y=e^{\cos x}$. **2852.** $y=\cos^n x$.

2853. $y=-\ln\cos x$. **2854.** $y=(1+x)^x$.

En los ejercicios 2855—2868 desarrollar las funciones dadas en el entorno del punto $x=0$, aplicando las fórmulas de desarrollo en la serie de Maclaurin de las funciones e^x, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$ y $(1+x)^m$.

2855. $y=e^{2x}$. **2856.** $y=e^{-x^2}$. **2857.** $y=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x} & \text{para } x\neq 0,\\ 1 & \text{para } x=0.\end{cases}$

2858. $y=\begin{cases}\dfrac{e^{x^3}-e^{-x^3}}{2x^3} & \text{para } x\neq 0,\\ 1 & \text{para } x=0.\end{cases}$ **2859.** $y=\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}$.

2860. $y=\cos^2 x$. **2861.** $y=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{para } x\neq 0.\\ 1 & \text{para } x=0.\end{cases}$

2862. $y=(x-\operatorname{tg} x)\cos x$.

2863. $y=\ln(10+x)$. **2864.** $y=x\ln(1+x)$.

2865. $y=\sqrt{1+x^2}$. **2866.** $y=\sqrt[3]{8-x^3}$.

2867. $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}}$. **2868.** $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$.

2869. Desarrollar la función $y=\frac{1+x}{(1-x)^3}$ en el entorno del punto $x=0$ en serie de Taylor. Valiéndose de este desarrollo, hallar la suma de la serie $1+\frac{4}{2}+\ldots+\frac{n^2}{2^{n-1}}+\ldots$

2870. Aplicando el desarrollo de la función en serie de Taylor, hallar el valor de:

1) la séptima derivada de la función $y=\frac{x}{1+x^2}$ para $x=0$,

2) la quinta derivada de la función $y=x^2\sqrt[4]{1+x}$ para $x=0$,

3) la décima derivada de la función $y=x^6e^x$ para $x=0$,

4) la curvatura de la línea $y=x\,[\sqrt[3]{(1+x)^4}-1]$ en el origen de coordenadas.

En los ejercicios 2871—2877 calcular los límites, aplicando el desarrollo de las funciones en serie de Taylor:

2871. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\ln(\sqrt{1+x^2}-x)}{x^3}$. **2872.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2(\operatorname{tg} x-\operatorname{sen} x)-x^3}{x^5}$.

2873. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x+x^2)+\ln(1-x+x^2)}{x(e^x-1)}$.

2874. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$. **2875.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right)$.

2876. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{\operatorname{ctg} x}{x}\right)$. **2877.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+\cos x}{x^3\operatorname{sen} x}-\dfrac{3}{x^4}\right)$.

Intervalo de convergencia

En los ejercicios 2878—2889 hallar los intervalos de convergencia de series de potencias.

2878. $10x+100x^2+\ldots+10^nx^n+\ldots$

2879. $x-\dfrac{x^2}{2}+\ldots+(-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n}+\ldots$

2880. $x+\dfrac{x^2}{20}+\ldots+\dfrac{x^n}{n\cdot 10^{n-1}}+\ldots$

2881. $1+x+\ldots+n!\,x^n+\ldots$

2882. $1+2x^2+\ldots+2^{n-1}x^{2(n-1)}+\ldots$

2883. $x-\frac{x^3}{3\cdot 3!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)\cdot(2n-1)!}+\ldots$

2884. $1+3x+\ldots+(n-1)\,3^{n-1}\,x^{n-1}+\ldots$

2885. $\frac{x}{1\cdot 2}+\frac{x^2}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{x^n}{n(n+1)}+\ldots$

2886. $x+\frac{(2x)^2}{2!}+\ldots+\frac{(nx)^n}{n!}+\ldots$ Analizando la convergencia en el extremo derecho del intervalo conviene tomar en cuenta que las factoriales de números grandes pueden ir expresadas aproximadamente por la fórmula de Stirling:

$$n!\approx\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}.$$

2887. $x+4x^2+\ldots+(nx)^n+\ldots$

2888. $\frac{\ln 2}{2}x^2+\frac{\ln 3}{3}x^3+\ldots+\frac{\ln(n+1)}{n+1}x^{n+1}+\ldots$

2889. $2x+\left(\frac{9}{4}x\right)^2+\ldots+\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n x\right]^n+\ldots$

2890. Desarrollar la función $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ en serie de Taylor en el entorno del punto $x=0$ partiendo de la relación

$$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

e indicar el intervalo de convergencia de la serie obtenida.

2891. Desarrollar la función $y=\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ en serie de Taylor en el entorno del punto $x=0$ partiendo de la relación

$$\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\int_0^x\frac{dx}{1-x^2}$$

e indicar el intervalo de convergencia de la serie obtenida.

2892. Desarrollar la función $y=\ln\left[(1+x)^{1+x}\right]+\ln\left[(1-x)^{1-x}\right]$ en serie de Taylor en el entorno del punto $x=0$ e indicar el intervalo de convergencia de la serie obtenida.

2893. Desarrollar la función $y=(1+x)\,e^{-x}-(1-x)\,e^{x}$ en serie de Taylor en el entorno del punto $x=0$ e indicar el intervalo de convergencia de la serie obtenida. Valiéndose del desarrollo hallar la suma de la serie

$$\frac{1}{3!}+\frac{2}{5!}+\ldots+\frac{n}{(2n+1)!}+\ldots$$

§ 4. Algunas aplicaciones de las series de Taylor

Cálculo de valores aproximados de las funciones

2894. Calcular el valor aproximado de $\sqrt[3]{e}$ tomando tres términos del desarrollo de la función $f(x) = e^x$ en serie de Maclaurin, y calcular el error.

2895. Calcular el valor aproximado del sen 18° tomando tres términos del desarrollo de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ en serie de Maclaurin, y calcular el error.

2896. Calcular el valor aproximado de $\sqrt[3]{10} = 2\sqrt[3]{1{,}25}$ tomando cuatro términos del desarrollo de la función $f(x) = (1+x)^m$ en serie de Maclaurin, y calcular el error.

En los ejercicios 2897—2904 calcular las expresiones que se dan a continuación aplicando la fórmula de desarrollo de las funciones e^x, sen x, cos x en serie de Maclaurin.

2897. e^2 con exactitud hasta 0,001.

2898. $\sqrt{e}$ con exactitud hasta 0,001.

2899. $\frac{1}{e}$ con exactitud hasta 0,0001.

2900. $\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$ con exactitud hasta 0,0001.

2901. sen 1° con exactitud hasta 0,0001.

2902. cos 1° con exactitud hasta 0,001.

2903. sen 10° con exactitud hasta 0,00001.

2904. cos 10° con exactitud hasta 0,0001.

En los ejercicios 2905—2911 calcular las raíces que se dan a continuación con exactitud hasta 0,001, aplicando la fórmula del desarrollo de la función $(1+x)^m$ en serie de Maclaurin.

2905. $\sqrt[3]{30}$. **2906.** $\sqrt[3]{70}$. **2907.** $\sqrt[3]{500}$. **2908.** $\sqrt[3]{1{,}015}$.

2909. $\sqrt[5]{250}$. **2910.** $\sqrt[3]{129}$. **2911.** $\sqrt[10]{1027}$.

En los ejercicios 2912—2914 calcular las expresiones dadas aplicando la fórmula del desarrollo de la función $\ln \frac{1+x}{1-x}$ en serie de Maclaurin.

2912. ln 3 con exactitud hasta 0,0001.

2913. $\lg e = \frac{1}{\ln 10}$ con exactitud hasta 0,000001.

2914. lg 5 con exactitud hasta 0,0001.

Resolución de ecuaciones

2915. Sea dada la ecuación $xy' + e^x = y$. Aplicando el método de coeficientes indefinidos hallar el desarrollo de la función y en serie de Taylor en potencias de x. Resolviendo el problema conviene hallar los coeficientes de la serie de Taylor efectuando la derivación sucesiva.

2916. Sea dada la ecuación $y = \ln(1 + x) - xy$. Aplicando el método de coeficientes indefinidos hallar el desarrollo de la función y en serie de Taylor en potencias de x. Resolviendo el problema conviene hallar los coeficientes de la serie de Taylor efectuando la derivación sucesiva.

En los ejercicios 2917—2919 resolver las ecuaciones respecto a y (esto es, hallar la expresión explícita de y) mediante la serie de Taylor de dos maneras, es decir, aplicando el método de coeficientes indefinidos y efectuando la derivación sucesiva.

2917. $y^3 + xy = 1$ (hallar tres términos del desarrollo).

2918. $2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = x - y$ (hallar dos términos del desarrollo).

2919. $e^x - e^y = xy$ (hallar tres términos del desarrollo).

Integracion de las funciones

En los ejercicios 2920—2929 expresar las integrales en forma de series valiéndose del desarrollo de los integrandos en series; indicar los campos de convergencia de las series obtenidas.

2920. $\int \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx.$ **2921.** $\int \frac{\cos x}{x}\, dx.$ **2922.** $\int \frac{e^x}{x}\, dx.$

2923. $\int \frac{e^x}{x^2}\, dx.$ **2924.** $\int_0^x e^{-x^2}\, dx.$ **2925.** $\int_0^x \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\, dx.$

2926. $\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}.$ **2927.** $\int_0^x \sqrt{1+x^3}\, dx.$

2928. $\int_0^x \frac{dx}{1-x^9}.$ **2929.** $\int_0^x \frac{\sqrt[4]{1+x^4}-1}{x^2}\, dx.$

En los ejercicios 2930—2934 calcular los valores aproximados de las integrales definidas tomando el número indicado de los términos del desarrollo del integrando en serie; indicar el error.

2930. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{x}\, dx$ (3 términos). **2931.** $\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2}\, dx$ (3 términos).

2932. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$ (2 términos). **2933.** $\int_{0,1}^{1} \frac{e^x}{x}\,dx$ (6 términos).

2934. $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} x^3 \operatorname{arctg} x\,dx$ (2 términos).

En los ejercicios 2935—2938 calcular las integrales con exactitud hasta 0,001.

2935. $\int_{0,1}^{0,2} \frac{e^{-x}}{x^3}\,dx.$ **2936.** $\int_0^{0,5} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx.$

2937. $\int_0^{0,8} x^{10} \operatorname{sen} x\,dx.$ **2938.** $\int_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^4}.$

2939. Mostrar que en el intervalo $(-0,1;\ 0,1)$ la función $\int_0^x e^{-x^2}\,dx$ se diferencia de la función $\operatorname{arctg} x - \frac{x^5}{10}$ no más que en 0,0000001.

2940. Tomando en cuenta la identidad

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239},$$

calcular π con 10 cifras exactas.

2941. Desarrollar la función $y = e^{x^2} \int_0^x e^{-x^2}\,dx$ en serie de Taylor de dos maneras, esto es, calculando directamente las derivadas sucesivas, para $x=0$, y multiplicando las series entre sí.

2942*. Calcular la integral $\int_0^1 x^x\,dx$.

2943. Calcular la integral $\int_0^{0,5} e^{\operatorname{sen} x}\,dx$ con exactitud hasta 0,0001.

2944. Calcular la integral $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{\cos x}\,dx$ con exactitud hasta 0,001.

Diversos problemas

2945. Calcular el área limitada por la línea $y^2 = x^3 + 1$, el eje de ordenadas y la recta $x = 1/2$, con exactitud hasta 0,001.

2946*. Calcular el área del óvalo $x^4 + y^4 = 1$ con exactitud hasta 0,01.

2947. Calcular la longitud de la línea $25y^2 = 4x^5$ desde el pico hasta el punto de intersección con la parábola $5y = x^2$, con exactitud hasta 0,0001.

2948. Calcular la longitud de una semionda de la sinusoide $y = \operatorname{sen} x$ con exactitud hasta 0,001.

2949. La figura limitada por la línea $y = \operatorname{arctg} x$, el eje de abscisas y la recta $x = 1/2$ gira alrededor del eje de abscisas. Calcular el volumen del cuerpo de revolución con exactitud hasta 0,001.

2950. La figura limitada por las líneas $y^3 - x^3 = 1$, $4y + x^3 = 0$, la recta $y = 1/2$ y el eje de ordenadas, gira alrededor del eje de ordenadas. Calcular el volumen del cuerpo de revolución con exactitud hasta 0,001.

2951. Calcular con exactitud hasta 0,001 las coordenadas del centro de gravedad del arco de la hipérbola $y = 1/x$, limitado por los puntos cuyas abscisas son $x_1 = 1/4$, $x_2 = 1/2$.

2952. Calcular con exactitud hasta 0,01 las coordenadas del centro de gravedad del trapecio mixtilíneo limitado por la línea $y = \frac{1}{\ln x}$, las rectas $x = 1,5$ y $x = 2$ y el eje de abscisas.