2017

Matemática Básica

Un enfoque desde la Transposición Didáctica

Esta obra ofrece una forma distinta de explicar algunos conceptos de la matemática. El enfoque presentado aquí podría ser útil para estudiantes de ingeniería o educación.

Derwis Rivas Olivo
Departamento de Cálculo. Facultad de Ingeniería. ULA
27/01/2017

Introducción

Desde sus inicios, la matemática, se ha mantenido en una constante evolución. Cada vez son más sus aportes hacia otras ciencias y cada vez más aumenta su campo de estudio. Resulta una tarea titánica emprender el camino que concluya en llegar a la cima de éste conocimiento socialmente construido a lo largo de la historia de la humanidad. No obstante, contrario a esta tarea, la actividad que significa conocer la forma como sus objetos más básicos se comportan, satisfacen propiedades y operan entre ellos, es una tarea que se puede llevar a cabo sin mayores complicaciones. Darle al lector una orientación hacia el desarrollo de esta actividad es el objetivo fundamental de este trabajo.

Por ende, lo que el lector encontrará no trata sobre la construcción teórica de los objetos que hacen vida en la matemática. En lugar de eso, encontrará un breve repaso que comprende gran parte de la esencia de los conceptos de la artimética, el álgebra, la geometría analítica y el cálculo infinitesimal desde el punto de vista de sus operaciones y propiedades, que le permitirá hacerse de un conocimiento sobre los fundamentos prácticos que hacen vida en estos conceptos.

Se trata en lo posible, a lo largo de todas las explicaciones, emplear un discurso informal, menos técnico, tratando, y repito en lo posible, de darle al discurso matemático cierto rostro humano que le permita al lector adueñarse de los objetos matemáticos aquí presentados en su forma simple y útil en sus operaciones y propiedades. Por esta razón, se busca de este modo, alejarlo del técnicismo propio de la matemática que impide, en la mayoría de los casos, a quienes no están formados en dicha ciencia, adueñarse de la misma para tales propósitos.

Por lo tanto, en este trabajo no se ofrece un contenido matemático para hacer investigación en ella, sino para conocer los conceptos, propiedaes y operaciones básicas y la forma de hacer uso de ellas. Se trata entonces, de emplear un discurso basado en la Transposición Didáctica. Si bien es cierto que al hacerlo se pierde cierta generalidad en los conceptos emitidos, también es cierto que se gana cierta comprensión, aunque local, de tales conceptos. Se espera que el lector, en el transcurrir del tiempo en contacto con la matemática, logre aprender aquellas generalidades que en el momento no logró aprender. Tal como ha ocurrido con la humanidad desde el inicio de la matemática.

Desde sus primeros pasos, la matemática no es ni fue lo que hoy día conocemos como matemática. Esta ciencia incomprendida por muchos, nace por la necesidad del hombre de cuantificar casi todas sus actividades diarias; la agricultura, el comercio, la economía familiar, etc. Cada civilización (egipcios, chinos, romanos, indúes, griegos) le impregnó a la matemática cierto valor cultural propio de sus creencias, de la forma de observar el Mundo y las fuerzas que en él se manifiestan. Así por ejemplo, para los egipcios la existencia del número negativo o del cero era practicamente imposible, ya que para ellos el número estaba intimamente relacionado a la cantidad y la medida. Por otro lado, para los indúes la existencia de números negativos representaba un hecho muy normal y aceptados por todos, ya que para ellos el número positivo representaba el "bien" la "fuerza positiva" y el número negativo representaba el "mal" la "fuerza negativa opuesta a la positiva". Los indúes afirmaban que al encontrarse dos "fuerzas" de igual magnitud pero opuestas (el "mal" vs el "bien") se obtenía el "equilibrio", se obtenia el número cero.

Se debe a los griegos que la matemática se conozca hoy día como la conocemos. En su mundo de ideas, y por darle sentido a la vida: dónde se encuentra el ser, la existencia de lo puro, de lo único, de lo indivisible, impregnaron a la matemática de Leyes y Propiedades e hicieron de ella una Ciencia que se contruye a partir de axiomas, postulados, teoremas, colorarios. Esto, permitió que la matemática creciera e impregnó al Mundo de ella. El aporte de los griegos fue muy beneficioso para el crecimiento de la misma, el único error y no lo cometieron los griegos, fue suponer que para aprender matemáticas se debe comenzar por aprender todos sus axiomas, postulados, teoremas, leyes… que explican cómo ella funciona, en lugar de mostrar sus operaciones desde el punto más básico, para luego, en el tiempo, desarrollar esas competencias que permite ver en ella la necesidad de tener que plantear toda esa estructura logica para poder generalizar sus operaciones, sus propiedades. Dicho esto, no queda otra cosa que presentar el contenido de este trabajo. Esta obra comprende cinco capitulos:

Capítulo 1: Números, operaciones y propiedades. Comprende una breve explicación acerca de la forma como se fue extendiendo el conjunto de los números, partiendo desde los naturales, hasta llegar a los números reales. En el paso de cada uno se detallan sus operaciones y propiedades fundamentales y se muestra la inconveniencia que cada uno presenta en ciertas operaciones. Este capítulo también contempla conceptos como el mínimo común múltiplo, el máximo común divisor, potenciación-propiedades y radicación-propiedades. De modo que este primer capítulo brinda la base teórica-práctica necesaria para entender, sin mayores complicaciones, el contenido de los siguientes capítulos.

Capítulo 2: Polinomios, Ecuaciones e Inecuaciones. Inicia con una breve presentación acerca de los métodos más usuales empleados para factorizar polinomios en el campo de números reales. También se ofrece una breve descripción del significado que tienen los polinomios irreducibles en dicho campo. Con ello, se ofrece al lector un conjunto de herramientas fundamentales para adentrarse al estudio de las ecuaciones e inecuaciones. En el caso de las ecuaciones, se estudian únicamente tres tipos de ecuaciones: lineal, cuadrática y cúbica. En lo que respecta a las inecuaciones, el estudio se dirige a presentar los diversos medios que permiten obtener el conjunto solución de una inecuación.

Capítulo 3: Funciones reales de variable real. En este capítulo se trata el concepto que abre la puerta al estudio del cálculo diferencial e integral: las funciones. Su importancia obliga a presentar detenidamente este concepto, razón que nos impulsa a estudiar previamente tres conceptos que dan el inicio a la geometría analitica: el plano cartesiano, las ecuaciones de la recta y las cónicas. En la base de estos conceptos se muestra el concepto de función y se presenta una familia de funciones que constituyen las llamadas funciones elementales. Se estudia el gráfico de una función y el algebra de funciones. Finaliza con el estudio de la función inversa.

Capítulo 4: Límite y Continuidad. En este capítulo se abre la puerta al cálculo diferencial. Se estudia el concepto de límite desde dos enfoques: geométrico y analítico y se aborda el estudio de las indeterminaciones. En lo que respecta a la continuidad, se estudia la continuidad en un punto y en un intervalo. Este capítulo finaliza con el estudio del algebra de las funciones continuas.

Capítulo 5: Derivada y diferencial. Se aborda el estudio de la derivada en un punto y la función derivada, donde se analiza el modo de obtener la función derivada como resultado de la implementación de un proceso algebraico basado en un conjunto de leyes y propiedades. Basados en este procedimiento se estudia la derivada de una función definida implícitamente y las derivadas de orden superior hasta llegar a la formulación de la derivada n-ésima de una familia de funciones. Este capítulo concluye con el cálculo de diferenciales y valores aproximados.

Índice general

Capítulo $\boxed{2}$

Polinomios, Ecuaciones e Inecuaciones

El objetivo de esta sección es presentar algunos conceptos necesarios para desarrollar el contenido de las siguientes secciones. Recomendamos al lector consultar un libro especializado en álgebra para profundizar el contenido aquí presentado.

Definición 2.1 (Variable)
Llamaremos variables a las letras minúsculas de nuestro alfabeto:

$$a, b, c, d, e, \dots, x, y, z$$

las cuales representan cantidades arbitrarias.

Definición 2.2 (Polinomio de variable x)
Una expresión algebraica únicamente en la variable x, se llama un polinomio de variable x cuando es la suma de expresiones monómicas de la forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

*donde n es un entero no negativo llamado **grado del polinomio** y los términos a_k son números llamados **coeficientes del polinomio**. El coeficiente de la variable de mayor grado es el **coeficiente principal** (a_n) y el coeficiente que no esta afectado por la variable es el **término independiente** (a_0).*

Usaremos las letras mayúsculas del abecedario para denotar los polinomios y entre paréntesis indicaremos la variable del polinomio.

Ejemplo 2.3

- $P(x) = 4x^3 + 8x^2 + 9x - 6$ *es un polinomio de grado* 3*, de variable* x*, coeficiente principal* 4 *y término independiente* -6.
- $Q(t) = 3t^5 + 5t^3 - 9t + 31$ *es un polinomio de grado* 5*, de variable* t*, coeficiente principal* 3 *y término independiente* 31.

2.0.3. Productos Notables

Definición 2.4 (Productos Notables)
Se llama Productos Notables a ciertas multiplicaciones que cumplen con una regla fija y cuyo resultado puede ser presentado directamente, es decir, sin realizar la multiplicación.

Existen en la matemática una gran variedad de productos notables, sin embargo, acá sólo se consideran algunos casos que son los más relevantes por su constante uso y aplicación.

Productos Notables	
Cuadrado de una suma	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
Cuadrado de una diferencia	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
Cubo de una suma	$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
Cubo de una diferencia	$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
Producto de una suma por su diferencia	$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
Producto de dos binomios con un termino común	$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + a \cdot b$

Ejemplo 2.5 *Resolver los siguientes productos*

$$(5x+4)^2\ ,\quad (2x^2-3y)^2\ ,\quad (x+2)(x-9)\ ,\quad (x-7)(x+7)$$

Solución. En el primer caso se trata del **cuadrado de una suma**, donde $a = 5x$ y $b = 4$. Por lo tanto, al aplicar la fórmula respectiva nos queda:

$$(5x+4)^2 = (5x)^2 + 2(5x)(4) + 4^2 = 5^2x^2 + 40x + 16 = 25x^2 + 40x + 16$$

En el segundo caso se trata de una del **cuadrado de una diferencia**, donde $a = 2x^2$ y $b = 3y$. Por lo tanto, al aplicar la fórmula respectiva nos queda:

$$(2x^2-3y)^2 = (2x^2)^2 - 2(2x^2)(3y) + (3y)^2 = 4x^4 - 12x^2y + 9y^2.$$

En el tercer producto tenemos el **producto de dos binomios con un termino común** (x). Por lo tanto,

$$(x+2)(x-9) = x^2 + (2-9)x + (2)(-9) = x^2 - 7x - 18.$$

Por último, tenemos el **producto de la suma por su diferencia**. Por lo tanto,

$$(x-7)(x+7) = x^2 - 7^2 = x^2 - 49.$$

2.0.4. Factorización en el Campo Real.

Definición 2.6 (Definición no formal de factorización de polinomios)
*En un principio, podemos decir, que el proceso de encontrar dos o más polinomios que al multiplicarse permitan obtener el polinomio original se denomina **factorización de polinomios**. A lo polinomios que encontramos, que permiten expresar la factorización, se les llama **factores o divisores**.*

Ejemplo 2.7 *El polinomio $x^2 - 25$ se puede expresar como*

$$x^2 - 25 = (x - 5)(x + 5).$$

En efecto, si efectuamos el producto del lado derecho de la igualdad obtenemos la identidad. Los polinomios $x - 5$ y $x + 5$ son los factores o divisores del polinomio $x^2 - 25$.

Es importante tener en cuenta que no todo polinomio se puede factorizar en el campo de los números reales. Sin embargo, los polinomios que trataremos en el desarrollo de este capítulo, y en general, a lo largo de este libro, serán factorizables en $\mathbb{R}$, es decir, trataremos únicamente con polinomios factorizables en el campo de los números reales. El objetivo de esta sección es mostrar la forma como se factorizan estos polinomios.

Como los polinomios son diferentes entre si, no existe una forma única de factorizarlos. Por tal motivo, se consideran una serie de casos que nos permite agrupar algunos tipos similares de polinomios que se factorizan de modo semejante. En la matemática existen muchos casos de factorización, en este libro, sólo consideraremos algunos casos que son los más relevantes por su constante uso y aplicación.

Factorización	
Trinomio de un cuadrado perfecto	$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$........ caso 1 $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$........ caso 2
Diferencia de cuadrados	$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
Diferencia de cubos	$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
Suma de cubos	$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
Trinomios de la forma $x^2 + mx + n$	$x^2 + (a+b)x + a \cdot b = (x + a)(x + b)$

Figura 2.1: Algunos casos de factorización

Ejemplo 2.8 (Trinomio de un cuadrado perfecto)
¿Será el trinomio $a^2 - 4ab + 4b^2$ *un cuadrado perfecto?. En caso afirmativo factorize el polinomio.*

Solución. Primero notamos que el trinomio tiene dos términos positivos y uno negativo, lo que indica que puede tratarse del caso 1. Para ver si se trata del trinomio de un cuadrado perfecto tomamos los términos positivos a^2, $4b^2$ y calculamos sus raíces cuadradas

$$\sqrt{a^2} = a \ , \qquad \sqrt{4b^2} = 2b.$$

Luego verificamos si el término restante es el doble producto de sus raíces cuadradas

$$2(a)(2b) = 4ab.$$

En efecto, se trata del trinomio de un cuadrado perfecto, la factorización es

$$a^2 - 4ab + 4b^2 = (a - 2b)^2.$$

Ejemplo 2.9 (Trinomio de un cuadrado perfecto)
¿Será el trinomio $36x^2+12xy^4+4y^4$ *un cuadrado perfecto?. En caso afirmativo factorize el polinomio.*

Solución. Como todos los términos son positivos puede tratarse del caso 2. Calculamos las raíces cuadradas de los términos positivos $36x^2$ y $4y^4$.

$$\sqrt{36x^2} = 6x \ , \qquad \sqrt{4y^4} = 2y^2.$$

Ahora verificamos si nos da el doble producto de sus raíces cuadradas

$$2(6x)(2y^2) = 24xy^2 \neq 12xy^4.$$

Por lo tanto el trinomio $36x^2 + 12xy^4 + 4y^4$ no es un cuadrado perfecto.

Ejercicios Propuestos

Factoriza los siguientes polinomios

1) $x^4 + 1 + 2x^2$
2) $-14x + 49x^2 + 1$
3) $400x^{10} + 40x^5 + 1$
4) $4x^2 + 12x + 9$
5) $16x^6 - 2x^3y^2 + \dfrac{y^4}{16}$
6) $9b^2 - 30a^2b + 25a^4$
7) $25x^2 - 60x + 36$
8) $4x^2 - 4x(a-x) + (a-x)^2$

Ejemplo 2.10 (Diferencia de cuadrados)
Factoriza el polinomio $36x^2 - 25y^4$.

Solución. Se trata de una diferencia de cuadrados, de modo que para factorizarlos calculamos la raíz de cada cuadrado perfecto.

$$\sqrt{36x^2} = 6x \ , \qquad \sqrt{25y^4} = 5y^2.$$

Luego

$$36x^2 - 25y^4 = (6x + 5y^2)(6x - 5y^2).$$

Ejercicios Propuestos

Factoriza los siguientes polinomios

1) $25x^2y^4 - 121$ 2) $4x^2 - 81$ 3) $196x^2y^4 - 225z^4$

4) $25(x-y)^2 - 4(x+y)^2$ 5) $\dfrac{1}{16} - \dfrac{4x^2}{49}$ 6) $\dfrac{a^2}{25} - \dfrac{x^6}{36}$

7) $64x^2 - (x-2)^2$ 8) $1 - \dfrac{x^2}{25}$ 9) $a^{10} - 49b^{12}$

10) $4x^{2n} - \dfrac{1}{9}$ 11) $(x+1)^2 - 16x^2$ 12) $(2x-3)^2 - (x-5)^2$

13) $1 - (x+4)^2$

Ejemplo 2.11 (Diferencia de cubos)
Factorizar el polinomio $x^3 - 8$.

Solución. Para aplicar la fórmula de la diferencia de cubos primero calculamos las raíces cúbicas de cada término.

- $\sqrt[3]{x^3} = x$ lo que implica que $a = x$
- $\sqrt[3]{8} = 2$ lo que implica que $b = 2$

Luego, al aplicar la fórmula obtenemos:

$$x^3 - 8 = (x-2)(x^2 + 2x + 4).$$

Ejemplo 2.12 (Suma de cubos)
Factorizar el polinomio $27x^3 + 125y^3$.

Solución. Se trata de una suma de cubos, para factorizar el polinomio usando esta fórmula lo primero que debemos hacer es calcular las raíces cúbicas de cada término

- $\sqrt[3]{27x^3} = 3x$, de modo que $a = 3x$,
- $\sqrt[3]{125y^3} = 5y$, de modo que $b = 5y$.

Aplicamos la fórmula y obtenemos el resultado

$$27x^3 + 125y^3 = (3x + 5y)((3x)^2 - (3x)(5y) + (5y)^2) = (3x + 5y)(9x^2 - 15xy + 25y^2).$$

Ejemplo 2.13 *Factorizar el polinomio* $x^6 - 64$

Solución. Se trata de una diferencia de cubos. Las raíces cúbicas de cada término es

- $\sqrt[3]{x^6} = x^2$, de modo que $a = x^2$
- $\sqrt[3]{64} = 4$, de modo que $b = 4$.

Usando la fórmula obtenemos

$$x^6 - 64 = (x^2 - 4)(x^4 + 4x^2 + 16).$$

Como el polinomio azul es una diferencia de cuadrados nos queda

$$x^6 - 64 = (x - 2)(x + 2)(x^4 + 4x^2 + 16).$$

Ejercicios Propuestos

Factoriza los siguientes polinomios

1) $1 + a^3$	2) $1 - 216a^3$	3) $8x^3 - (x - 1)^3$
4) $(x + 1)^3 + (x - 2)^3$	5) $x^3 - y^3$	6) $27x^3 - y^3$
7) $x^6 - (b - x)^9$	8) $(x - 2)^3 - (x + 2)^3$	9) $a^3 + 27$
10) $512 + 729x^9$	11) $x^6 - (x + 2)^3$	12) $(x - 1)^3 - (x + 2)^3$

Ejemplo 2.14 (Trinomio de la forma $x^2 + mx + n$)
Factoriza el polinomio $x^2 + 7x - 18$.

Solución. Un trinomio de esta forma se factoriza buscando dos números a y b tales que; sumados $a + b$, resulte el coeficiente de la variable x y multiplicados, $a \cdot b$ resulte el término independiente (ver la Tabla de Factorización, Figura 2.1). Si comenzamos buscando dos números que sumados resulten 7 tenemos muchos candidatos 3 y 4, 10 y -3, 5 y 2, etc. Por lo tanto, es mejor buscar primero dos números que multiplicados resulten 18. En ese caso, tenemos las siguientes posibilidades

- 3 y 6, no nos sirve porque no hay modo de sumar a 3 y 6 para que resulte 7.
- 18 y 1, tampoco nos sirve porque no hay modo de sumar para que de 7.
- 2 y 9, estos son, ya que $9 - 2 = 7$ y $(9)(-2) = -18$.

En consecuencia $x^2 + 7x - 18 = (x + 9)(x - 2)$.

Ejemplo 2.15 *Factoriza el polinomio* $x^2 + 43x + 432$.

Solución. Debemos buscar dos números que multiplicados resulten 432, pero como 432 es muy grande lo descomponemos

$$432 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

y de la descomposición tenemos las siguientes posibilidades

- $\begin{cases} 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \\ 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 54, \end{cases}$ no sirve porque no hay modo de sumar a 8 y 54 para que resulte 43.
- $\begin{cases} 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16 \\ 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27, \end{cases}$ estos son, ya que $16 + 27 = 43$ y $(16)(27) = 432$.

Por lo tanto $x^2 + 43x + 432 = (x + 16)(x + 27)$.

Ejemplo 2.16 *Factoriza el polinomio* $x^4 - 5x^2 - 50$.

Solución. El procedimiento aplicado en el ejemplo 2.14 es aplicable en la factorización de este polinomio. Al observar con atención notamos que la parte literal del segundo término es la raíz cuadrada del primer término. De modo que es posible expresar el polinomio de la siguiente manera

$$x^4 - 5x^2 - 50 = (x^2)^2 - 5(x^2) - 50.$$

Consideramos a x^2 como la variable de un polinomio de segundo grado. Ahora buscamos dos números que multiplicados resulten 50, tenemos las siguientes posibilidades:

- 1 y 50, no sirven, ya que no hay modo de sumar estos números para que resulte -5.
- 25 y 2, tampoco sirven, ya que la suma de ellos jamás va a resultar -5.
- 5 y 10, ¡estos son!, ya que $-10 + 5 = -5$ y $(-10)(5) = -50$

por lo tanto $x^4 - 5x^2 - 50 = (x^2 - 10)(x^2 + 5)$. A pesar que el primer factor (azul) no es una diferencia de cuadrados perfectos, se puede usar la formula de diferencia de cuadrados para factorizarlo. Así

$$x^2 - 10 = (x - \sqrt{10})(x + \sqrt{10}).$$

Por lo tanto

$$x^4 - 5x^2 - 50 = (x - \sqrt{10})(x + \sqrt{10})(x^2 + 5).$$

Ejemplo 2.17 *Factoriza el polinomio* $x^6 - 6x^3 - 7$.

Solución. De manera análoga al anterior, este polinomio se puede expresar como

$$x^6 - 6x^3 - 7 = (x^3)^2 - 6(x^3) - 7 = (x^3 \quad \square)(x^3 \quad \square).$$

Ahora buscamos los números para colocar en los espacios en blanco. En este caso la única alternativa es 1 y 7, ¡ y funciona!, en efecto pues $-7 + 1 = -6$ y $(-7)(1) = -7$. Por lo tanto

$$x^6 - 6x^3 - 7 = (x^3 - 7)(x^3 + 1)$$

donde

- $x^3 - 7 = (x - \sqrt[3]{7})(x^2 + \sqrt[3]{7}x + \sqrt[3]{7^2})$,
- $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$.

En consecuencia

$$x^6 - 6x^3 - 7 = (x + 1)(x - \sqrt[3]{7})(x^2 - x + 1)(x^2 + \sqrt[3]{7}x + \sqrt[3]{7^2}).$$

Ejercicios Propuestos

Factoriza los siguientes polinomios

1) $x^2 + 5x - 14$	2) $x^2 - 9x + 20$	3) $x^2 - x - 6$
4) $x^2 - 9x + 8$	5) $x^2 - 5x - 36$	6) $x^2 + x - 132$
7) $x^2 - 4x - 320$	8) $x^2 + 8x - 180$	9) $x^2 - 17x - 60$
10) $x^4 + 7ax^2 - 60a^2$	11) $x^8 - 2x^4 - 80$	12) $x^4 - 2x^2 - 48$

2.0.5. Polinomios Irreducibles

Al inicio de la Sección 2.0.4 se dijo que no todo polinomio es factorizable en el campo de los números reales. Este hecho constituyó, durante mucho tiempo, un gran dilema en la historia de la matemática. Los polinomios que no se pueden factorizar en el campo de los números reales, reciben el nombre de **polinomios irreducibles**. La siguiente definición establece formalmente este concepto.

Definición 2.18 (Polinomios Irreducibles en $\mathbb{R}$)
Un polinomio es irreducible en el campo de los números reales cuando no se puede expresar como productos de dos polinomios de grado no nulo. Recordemos que un polinomio de grado nulo es una constante.

Lo primero que advierte esta definición es que el concepto de polinomios irreducibles es similar al concepto de números primos. Por esta razón, algunos matemáticos, llaman **polinomios primos** a los polinomios irreducibles.

Ejemplo 2.19

- *Todos lo polinomios de grado uno son irreducibles.*
- *Todos los polinomios de la forma $x^2 + a$, con a un número no negativo $(a > 0)$, son polinomios irreducibles en el campo de los números reales.*
- *Si al aplicar los siguientes casos de factorización*

  $$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) \qquad y \qquad a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

  los factores $a^2 - ab + b^2$ o $a^2 + ab + b^2$ resultan polinomios de segundo grado, estos polinomios, son irreducibles en el campo de los números reales. De otra manera, no se puede garantizar nada.

Una de las características o propiedades más relevantes que poseen los polinomios irreducibles en el campo de los números reales se expresa en la siguiente observación.

Observación 2.20

- *Si $P(x)$ es un polinomio irreducible en $\mathbb{R}$, entonces $P(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Esto quiere decir que los polinomios irreducibles no se anulan. Es decir, no existen valores para x que al sustituir en el polinomio nos dé como resultado cero.*
- *Si $P(x)$ es un polinomio irreducible en $\mathbb{R}$, entonces $P(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Esto quiere decir que los polinomios irreducibles son positivos. Es decir, al sustituir en el polinomio cualquier valor para x, obtenemos como resultado un número positivo.*

2.1. Ecuaciones Polinomiales

Consideremos las siguientes expresiones

$$x^2 - 25 = (x-5)(x+5) \qquad \text{y} \qquad x^2 - 25 = 0.$$

La primera es una igualdad que se verifica para todos lo valores de la variable, a este tipo de igualdades se les llama **identidad**. La segunda es una igualdad que se verifica para algunos valores de la variable ($x = 5$ y $x = -5$), a este tipo de igualdades se les llama una **ecuación**. En la matemática existen diferentes tipos de ecuaciones, nosotros sólo trataremos con ecuaciones de la forma

$$P(x) = 0$$

donde $P(x)$ es un polinomio. A este tipo de ecuaciones se les llama **ecuaciones polinómicas** o **ecuaciones polinomiales** y al polinomio $P(x)$ lo llamaremos **polinomio asociado** a la ecuación. Nuestro objetivo es identificar y resolver ecuaciones de este tipo.

Solución de ecuaciones

Iniciemos respondiendo la siguiente pregunta ¿Qué significa resolver una ecuación?. Resolver una ecuación significa encontrar el o los valores de la variable que satisfacen la igualdad. Esto es, encontrar los números α tales que al sustituir en el polinomio el resultado es cero

$$P(\alpha) = 0.$$

Estos números (α) también se llaman **raíces del polinomio**.

Ejemplo 2.21 (Raíces del polinomio asociado o soluciones de la ecuación) *Los números $\alpha = 1$ y $\alpha = -3$ son soluciones de la ecuación $x^2 + 2x - 3 = 0$, o también podríamos decir, son raíces del polinomio $P(x) = x^2 + 2x - 3$ (el polinomio asociado a la ecuación). En efecto, al sustituir $x = 1$ y $x = -3$ en la ecuación, obtenemos*

- *Para $x = 1$*: $(1)^2 + 2(1) - 3 = 3 - 3 = 0$. *Esto es* $P(1) = 0$,
- *Para $x = -3$*: $(-3)^2 + 2(-3) - 3 = 9 - 9 = 0$. *Esto es* $P(-3) = 0$.

Algunas veces es posible resolver una ecuación por una simple inspección. Por ejemplo, claramente la ecuación

$$x + 5 = 7$$

tiene como solución $x = 2$ (es el único valor que verifica la igualdad). Otras, por ejemplo

$$2x^2 + 7x - 2 = 5 + 2x^2$$

es un problema distinto. En general, para resolver ecuaciones polinomiales es necesario usar ciertos recursos. La estrategia general es modificar la ecuación paso a paso hasta llegar a una forma en que la solución sea obvia o dispongamos de un método para resolverla. Desde luego, se debe tener cuidado al hacer las modificaciones para no cambiar las soluciones.

REGLAS PARA MODIFICAR ECUACIONES

1. Si se suma (o se resta) la misma cantidad a ambos lados de una ecuación, sus soluciones no cambian.
2. Al multiplicar (o dividir) ambos lados de una ecuación por la misma cantidad distinta de cero, no cambian sus soluciones.

Consideremos nuevamente la ecuación

$$2x^2 + 7x - 2 = 5 + 2x^2.$$

Esta ecuación se puede resolver los siguientes pasos:

$$\begin{aligned} 2x^2 + 7x - 2 &= 5 + 2x^2 && \text{la ecuación dada} \\ 7x - 2 &= 5 && \text{restamos } 2x^2 \text{ a ambos lados de la igualdad} \\ 7x &= 7 && \text{sumamos 2 a ambos lados de la igualdad} \\ x &= 1 && \text{dividimos 7 a ambos lados de la igualdad} \end{aligned}$$

Por lo tanto la solución de la ecuación es $x = 1$.

Naturaleza de las soluciones

Al resolver una ecuación polinómica podemos encontrar como solución números reales (racionales e irracionales) como también números complejos. Las soluciones complejas en una ecuación polinómica no serán tratadas en el desarrollo de este libro, sólo nos interesa considerar las soluciones reales. Esto es, no consideraremos como solución a los números complejos y en adelante cuando una ecuación tenga como solución números complejos diremos que la ecuación no tiene solución en el campo real o simplemente no hay solución real.

2.1.1. Ecuaciones Lineales

Una ecuación de la forma

$$ax + b = 0 \tag{2.1}$$

es una **ecuación lineal**, donde $a \neq 0$ y b son números reales. Toda ecuación lineal tiene una única solución real, $x = -\frac{b}{a}$, la cual se puede obtener mediante una simple inspección.

Ejemplo 2.22 *Resolver la ecuación*

$$(3x-1)^2 - 5(x-2) - (2x+3)^2 - (5x+2)(x-1) = 0.$$

Solución. A simple vista no parece una ecuación lineal, de modo que utilizamos operaciones algebraicas para reducir la expresión a la forma (2.1)

$$\begin{aligned} 9x^2 - 6x + 1 - 5x + 10 - (4x^2 + 12x + 9) - (5x^2 - 3x - 2) = 0 \Rightarrow \\ 9x^2 - 11x + 11 - 4x^2 - 12x - 9 - 5x^2 + 3x + 2 = 0 \Rightarrow \\ -20x + 4 = 0 \end{aligned}$$

ahora simplemente despejamos

$$-20x + 4 = 0 \Rightarrow -20x = -4 \Rightarrow x = \frac{-4}{-20} \Rightarrow x = \frac{1}{5} \cdot$$

Comentario. Observe que al resolver el producto notable (polinomio azul) lo dejamos encerrado en paréntesis, esto debido al signo menos (rojo) que esta delante de él. Lo mismo ocurrió con el producto de polinomios (verde).

Ejemplo 2.23 *Resolver la ecuación*

$$3(2x+1)(-x+3) - (2x+5)^2 = -[-\{-3(x+5)\} + 10x^2]$$

Solución. Lo primero que debemos observar es que la ecuación tiene sólo números enteros. Por lo tanto, para resolver esta ecuación simplemente realizamos los productos, productos notables y eliminamos los signos de agrupación

$$\begin{aligned} 3(2x+1)(-x+3) - (2x+5)^2 &= -[-\{-3(x+5)\} + 10x^2] \\ 3(-2x^2 + 6x - x + 3) - (4x^2 + 20x + 25) &= -[-\{-3x - 15\} + 10x^2] \\ -6x^2 + 15x + 9 - 4x^2 - 20x - 25 &= -[3x + 15 + 10x^2] \\ -10x^2 - 5x - 16 &= -3x - 15 - 10x^2 \end{aligned}$$

ahora utilizamos las reglas para modificar ecuaciones y obtenemos la solución

$$-10x^2 + 10x^2 - 5x + 3x = -15 + 16 \Rightarrow -2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{-2} \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \cdot$$

Ejemplo 2.24 *Resolver la ecuación*

$$\frac{2}{5}(5x-1)+\frac{3}{10}(10x-3)=-\frac{1}{2}(x-2)-\frac{6}{5}$$

Solución. Como podemos notar se trata de una ecuación que tiene números racionales (no todos son enteros, compare con el ejemplo anterior) de modo que para resolver esta ecuación primero debemos calcular el mínimo común múltiplo de los denominadores de cada fracción. Resulta muy fácil darse cuenta que

$$\text{m.c.m}(5,10,2)=10.$$

Lo siguiente es multiplicar cada término de la ecuación (son 4) por el m.c.m. de la siguiente manera

$$10\left[\frac{2}{5}(5x-1)\right]+10\left[\frac{3}{10}(10x-3)\right]=-10\left[\frac{1}{2}(x-2)\right]-10\left[\frac{6}{5}\right]$$

ahora simplificamos el denominador de cada fracción con el m.c.m. y al realizar las operaciones pertinentes nos queda

$$4(5x-1)+3(10x-3)=-5(x-2)-2(6).$$

Esta ecuación es parecida a la resuelta en el ejemplo anterior. El lector puede comprobar fácilmente que al utilizar operaciones algebraicas y al aplicar las reglas, obtenemos como solución $x=\dfrac{1}{11}$.

Ejemplo 2.25 *Resolver la ecuación*

$$\frac{3}{5}\left(\frac{2x-1}{6}\right)-\frac{4}{3}\left(\frac{3x+2}{4}\right)-\frac{1}{5}\left(\frac{x-2}{3}\right)+\frac{1}{5}=0.$$

Solución. A primera vista se parece a la ecuación que resolvimos en el ejemplo anterior. Sin embargo, si observamos con atención notaremos que dentro de los paréntesis también hay número racionales. Por lo tanto, debemos primero reescribir esta ecuación para que se parezca a la anterior y así le aplicaremos el mismo método para resolverla

$$\begin{aligned}\frac{3}{5}\left(\frac{2x-1}{6}\right)-\frac{4}{3}\left(\frac{3x+2}{4}\right)-\frac{1}{5}\left(\frac{x-2}{3}\right)+\frac{1}{5}&=0\Rightarrow\\ \frac{3}{5\cdot 6}(2x-1)-\frac{4}{3\cdot 4}(3x+2)-\frac{1}{5\cdot 3}(x-2)+\frac{1}{5}&=0\Rightarrow\\ \frac{1}{10}(2x-1)-\frac{1}{3}(3x+2)-\frac{1}{15}(x-2)+\frac{1}{5}&=0.\end{aligned}$$

El m.c.m$(10, 15, 3, 5) = 30$ lo multiplicamos a cada término de la ecuación de la siguiente manera

$$30\left[\frac{1}{10}(2x-1)\right] - 30\left[\frac{1}{3}(3x+2)\right] - 30\left[\frac{1}{15}(x-2)\right] + 30\left[\frac{1}{5}\right] = 0.$$

Luego, simplificamos el denominador de cada fracción con el m.c.m., efectuamos los productos y nos queda

$$\begin{array}{rcll} 3(2x-1) - 10(3x+2) - 2(x-2) + 6(1) & = & 0 & \Rightarrow \\ 6x - 3 - 30x - 20 - 2x + 4 + 6 & = & 0 & \Rightarrow \\ -26x - 13 & = & 0. & \end{array}$$

La solución de esta ecuación es $x = -1/2$.

Ejemplo 2.26 *Resolver la ecuación*

$$5 + \frac{x}{4} = \frac{1}{3}\left(2 - \frac{x}{2}\right) - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\left(10 - \frac{5x}{3}\right)$$

Solución. El objetivo es transformar esta ecuación en una ecuación similar a la anterior, para ello debemos resolver la suma de fracciones que aparece dentro de cada paréntesis. Transformando de este modo la ecuación en

$$\begin{array}{rcll} 5 + \frac{x}{4} & = & \frac{1}{3}\left(\frac{4-x}{2}\right) - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\left(\frac{30-5x}{3}\right) & \Rightarrow \\ 5 + \frac{x}{4} & = & \frac{1}{6}(4-x) - \frac{2}{3} + \frac{1}{12}(30-5x). & \end{array}$$

Claramente el m.c.m$(4, 6, 3, 12) = 12$ y el resto de la solución de este ejemplo queda como ejercicio para el lector (note el parecido con los anteriores).

Ejemplo 2.27 *Resolver la ecuación*

$$\frac{2x+7}{3} - \frac{2(x^2-4)}{5x} - \frac{4x^2-6}{15x} = \frac{7x^2+6}{3x^2}\,.$$

Solución. Te pregunto ¿qué tiene esta ecuación que la hace diferente de las demás ecuaciones estudiadas hasta ahora?. Si observas con atención podrás responder inmediatamente y coincidirás conmigo cuando digo que la diferencia está en que el denominador de algunas fracciones contiene la incognita. Cuando estamos en presencia de este tipo de ecuaciones lo primero que debemos hacer es igualar a cero la ecuación

$$\frac{2x+7}{3} - \frac{2(x^2-4)}{5x} - \frac{4x^2-6}{15x} - \frac{7x^2+6}{3x^2} = 0.$$

Luego buscamos el mínimo común múltiplo de los denominadores, en este caso, se trata de $15x^2$ y procedemos a realizar una suma de fracciones

$$\frac{5x^2(2x+7)-6x(x^2-4)-x(4x^2-6)-5(7x^2+6)}{15x^2}=0.$$

El denominador pasa al otro lado de la igualdad y al multiplicar por cero, resulta cero, por lo tanto, la ecuación se transforma en

$$5x^2(2x+7)-6x(x^2-4)-x(4x^2-6)-5(7x^2+6)=0.$$

Como podrás ver, se trata de una ecuación formada por sólo números enteros, que como ya sabemos, es muy fácil de resolver. Aplicando algunas operaciones algebraicas y las reglas para resolver ecuaciones podrás comprobar que la solución es $x=1$.

Ejemplo 2.28 *Resolver la ecuación*

$$\frac{10x-7}{15x+3}=\frac{3x+8}{12}-\frac{5x^2-4}{20x+4}$$

Solución. Se parece mucho a la ecuación del ejemplo anterior, por lo tanto igualamos a cero

$$\frac{10x-7}{15x+3}-\frac{3x+8}{12}+\frac{5x^2-4}{20x+4}=0.$$

Factorizamos cada denominador para buscar el m.c.m.

- $15x+3=3(5x+1)$
- $12=2^2\cdot 3$
- $20x+4=4(5x+1)$

De acá se deduce que el m.c.m. es $3\cdot 4\cdot(5x+1)=12(5x+1)$. Lo que falta es sumar fracciones

$$\frac{4(10x-7)-(5x+1)(3x+8)+3(5x^2-4)}{12(5x+1)}=0$$

Pasamos el denominador a multiplicar al otro lado de la igualdad, nos queda la ecuación

$$4(10x-7)-(5x+1)(3x+8)+3(5x^2-4)=0.$$

Al igual que la anterior, fácilmente se puede comprobar que la solución es $x=-16$.

2.1.2. Ecuaciones Cuadráticas

Una ecuación de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \text{con } a \neq 0$$

es una **ecuación de segundo grado** o una **ecuación cuadrática**.

Métodos para resolver una ecuación cuadrática

Para resolver una ecuación cuadrática podemos aplicar cualquiera de los siguientes métodos.

1. Factorizando el polinomio.
2. Usando la fórmula $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

A continuación estudiaremos cada uno de estos métodos.

Factorizando el polinomio

La solución de una ecuación cuadrática via factorización se basa en la siguiente propiedad de los números reales.

> Sean **a**, **b** números reales
>
> Si **a** • **b** = 0 entonces **a** = 0 ó **b** = 0

Este hecho nos permite establecer el siguiente procedimiento:

1. Factorizamos el polinomio $P(x)$.
2. Igualamos a cero cada uno de los factores lineales y resolvemos cada ecuación lineal por separado.

Ejemplo 2.29 *Resuelve la ecuación* $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Solución. El polinomio se factoriza como $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$. De modo que nos queda la ecuación

$$(x-2)(x-3) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \end{cases}$$

Por lo tanto, las soluciones son $x = 2$ y $x = 3$.

Observación 2.30 *Resolver ecuaciones polinomiales via factorización esta sujeta a la condición de que el polinomio pueda ser factorizable por medio de los casos antes descritos. En caso que no se puedan aplicar ninguno de estos casos, para factorizar el polinomio, este método no resuelve la ecuación. En general, este método sólo permite encontrar soluciones que sean números enteros.*

Usando la fórmula $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Resolver ecuaciones cuadráticas por medio de esta fórmula representa un método muy efectivo, ya que permite determinar si una ecuación tiene o no solución real . En caso de tener solución, podemos, encontrar soluciones tanto racionales como irracionales.

La fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{2.2}$$

se conoce como **fórmula cuadrática** o **resolvente**. La expresión $b^2 - 4ac$ que aparece bajo el signo radical se llama **discriminante** y determina el carácter de las soluciones.

1. Si $b^2 - 4ac > 0$ la ecuación de segundo grado tiene dos soluciones reales (pueden ser, tanto racionales como irracionales).
2. Si $b^2 - 4ac = 0$ la ecuación de segundo grado tiene una solución real.
3. Si $b^2 - 4ac < 0$ la ecuación de segundo grado no tiene solución real (la solución corresponde a números complejos).

Ejemplo 2.31 *Resolver la ecuación* $x^2 + 7x + 6 = 0$.

Solución. En este caso $a = 1$, $b = 7$ y $c = 6$.

$$\begin{aligned} x &= \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4(1)(6)}}{2(1)} = \frac{-7 \pm \sqrt{25}}{2} \\ &= \frac{-7 \pm 5}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-7+5}{2} = -1 \\ \\ x_2 = \frac{-7-5}{2} = -6 \end{cases} \end{aligned}$$

Tenemos dos soluciones enteras las cuales son $x = -1$ y $x = -6$.

Ejemplo 2.32 *Resolver la ecuación* $3x^2 - 5x + 4 = 0$.

Solución. En este caso $a = 3$, $b = -5$ y $c = 4$.

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(3)(4)}}{2(3)} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 48}}{6} \\ &= \frac{-7 \pm \sqrt{-23}}{2} \end{aligned}$$

Como el discriminante es negativo esta ecuación no tiene solución real.

Ejemplo 2.33 *Resolver la ecuación* $x^2 + 4x - 3 = 0$

Solución. En este caso $a = 1$, $b = 4$ y $c = -3$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1)(-3)}}{2(1)} = \frac{-4 \pm \sqrt{28}}{2} \\ &= \frac{-4 \pm 2\sqrt{7}}{2} = -2 \pm \sqrt{7} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 + \sqrt{7} \\ \\ x_2 = -2 - \sqrt{7} \end{cases} \end{aligned}$$

Tenemos dos soluciones irracionales, las cuales son $x = -2 + \sqrt{7}$ y $x = -2 - \sqrt{7}$.

Ejemplo 2.34 *Resolver la ecuación*

$$\frac{x - 2}{x^2 + 8x + 7} = \frac{2x - 5}{x^2 - 49} - \frac{x - 2}{x^2 - 6x - 7} \ .$$

Solución. Primero igualamos a cero

$$\frac{x - 2}{x^2 + 8x + 7} - \frac{2x - 5}{x^2 - 49} + \frac{x - 2}{x^2 - 6x - 7} = 0.$$

Luego, factorizamos cada denominador para buscar el m.c.m.

- $x^2 + 8x + 7 = (x + 1)(x + 7)$
- $x^2 - 49 = (x - 7)(x + 7)$
- $x^2 - 6x - 7 = (x + 1)(x - 7)$

El m.c.m. es $(x + 1)(x - 1)(x + 7)(x - 7)$. Sumamos las fracciones

$$\frac{(x - 1)(x - 7)(x - 2) - (x + 1)(x - 1)(2x - 5) + (x - 1)(x + 7)(x - 2)}{(x + 1)(x - 1)(x + 7)(x - 7)} = 0.$$

Al pasar el denominador a multiplicar al otro lado de la igualdad nos queda

$$(x - 1)(x - 7)(x - 2) - (x + 1)(x - 1)(2x - 5) + (x - 1)(x + 7)(x - 2) = 0.$$

La ecuación que resulta presenta algunos productos, al efectuar estos productos y simplificar la expresión obtenemos la ecuación

$$x^2 - 6x + 5 = 0.$$

Al usar la resolvente, obtenemos las siguientes soluciones enteras $x = 1$ y $x = 5$.

Observación 2.35 (Soluciones complejas y polinomios irreducibles en $\mathbb{R}$)
En la sección 2.0.5 tratamos por primera vez el concepto de polinomios irreducibles en el campo de los números reales y mostramos algunos ejemplos de este tipo de polinomios. En este momento, podemos mostrar otros ejemplos de estos polinomios. ***Todo polinomio de segundo grado asociado a una ecuación cuadrática cuyas soluciones son números complejos es un polinomio irreducible en*** $\mathbb{R}$***.***

Por ejemplo, el polinomio $P(x) = 3x^2 - 5x + 4$ *asociado a la ecuación*

$$3x^2 - 5x + 4 = 0 \quad \text{(ver el ejemplo 2.32)}$$

es un polinomio irreducible en el campo de los números reales.

2.1.3. Ecuaciones de grado mayor o igual a 3

Este tipo de ecuaciones es de la forma

$$P(x) = 0$$

donde $P(x)$ es un polinomio de grado mayor igual a 3.

Como ya hemos puntualizado sólo consideraremos ecuaciones de este tipo que tengan soluciones en el campo real; soluciones bien sea, racionales o irracionales. De modo que nuestro interés gira en torno a desarrollar un método que nos permita encontrar estas soluciones. Pero antes, es necesario responder la siguiente pregunta ¿Cuántas soluciones reales tiene una ecuación de grado mayor o igual a 3?. Una ecuación de grado impar tiene un número impar de soluciones. Por ejemplo; una ecuación de grado de grado 3 puede tener 1 o 3 soluciones reales, una ecuación de grado 5 puede tener 1 o 3 o 5 soluciones reales. Una ecuación polinómica de grado par o no tiene soluciones reales o tiene un número par de soluciones reales. Por ejemplo; una ecuación de grado 4 o no tiene soluciones reales o tiene 2 o tiene 4 soluciones reales.

Soluciones racionales y la Regla de Ruffini

El siguiente teorema nos brinda un método para encontrar las soluciones racionales de una ecuación de grado mayor o igual a 3.

Teorema 2.36 (Soluciones Racionales)
Sea

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

con coeficientes enteros. Si c/d una fracción irreducible es una solución racional entonces c (el numerador) divide a a_0 (el término independiente) y d (el denominador) divide a a_n (el coeficiente principal).

Ejemplo 2.37 *Encuentra las soluciones de la ecuación*

$$18x^3 + 33x^2 + 17x + 2 = 0.$$

Solución. En este caso el término independiente $a_0 = 2$ y el coeficiente principal $a_3 = 18$. Por lo tanto, las posibles soluciones son fracciones c/d donde los valores para c son: ± 1 y ± 2 (los divisores del término independiente) y los valores para d son: ± 1, ± 2, ± 3, ± 6, ± 9, ± 18 (los divisores del coeficiente principal). Luego combinando ambos tenemos las siguientes fracciones que son las posibles soluciones de la ecuación: ± 1, ± 2, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{1}{3}$, $\pm\frac{1}{6}$, $\pm\frac{1}{9}$, $\pm\frac{1}{18}$, $\pm\frac{2}{3}$, $\pm\frac{2}{9}$.

Ahora verificamos cuales de estos números es la solución de la ecuación (ver ejemplo 2.21).

- $P(1) = 18(1)^3 + 33(1)^2 + 17(1) + 2 = 70$ no es solución.
- $P(-1) = 18(-1)^3 + 33(-1)^2 + 17(-1) + 2 = 0$ primera solución.
- $P(2) = 18(2)^3 + 33(2)^2 + 17(2) + 2 = 312$ no es solución.
- $P(-2) = 18(-2)^3 + 33(-2)^2 + 17(-2) + 2 = -44$ no es solución.
- $P(1/3) = 18(1/3)^3 + 33(1/3)^2 + 17(1/3) + 2 = 12$ no es solución.
- $P(-1/3) = 18(-1/3)^3 + 33(-1/3)^2 + 17(-1/3) + 2 = -2/3$ no es solución.
- $P(1/6) = 18(1/6)^3 + 33(1/6)^2 + 17(1/6) + 2 = 35/6$ no es solución.
- $P(-1/6) = 18(-1/6)^3 + 33(-1/6)^2 + 17(-1/6) + 2 = 0$ segunda solución.
- $P(1/18) = 18(1/18)^3 + 33(1/18)^2 + 17(1/18) + 2 = 247/81$ no es solución.
- $P(-1/18) = 18(-1/18)^3 + 33(-1/18)^2 + 17(-1/18) + 2 = 187/162$ no es solución.
- $P(2/3) = 18(2/3)^3 + 33(2/3)^2 + 17(2/3) + 2 = 100/3$ no es solución.
- $P(-2/3) = 18(-2/3)^3 + 33(-2/3)^2 + 17(-2/3) + 2 = 0$ tercera solución.

Por lo tanto, esta ecuación polinómica tiene tres soluciones: -1, $-1/6$ y $-2/3$. Evaluar el polinomio para verificar cual de los candidatos es la solución puede resultar, en algunos casos, un poco tedioso. Existe un método más eficiente para evaluar polinomios lo que nos permite encontrar las soluciones de manera más rápida y segura; hablamos de la **regla de Ruffini**. Por ejemplo, aplicaremos la regla de Ruffini para determinar cuales son las soluciones de la ecuación del ejemplo 2.37.

$$18x^3 + 33x^2 + 17x + 2 = 0$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 18 & 33 & 17 & 2 \\ 1 & & 18 & 51 & 68 \\ \hline & 18 & 51 & 68 & 70 \end{array} \Rightarrow \text{P}(1) = 70\text{, no es solución}$$

Seguimos probando con las demás candidatos hasta encontrar las soluciones.

$$\begin{array}{c|cccc} & 18 & 33 & 17 & 2 \\ -1 & & -18 & -15 & -2 \\ \hline & 18 & 15 & 2 & \boxed{0} \Rightarrow \text{P}(-1) = 0\text{, entonces x} = -1 \text{ es solución} \\ -1/6 & & -3 & -2 & \\ \hline & 18 & 12 & \boxed{0} \Rightarrow \text{P}(-1/6) = 0\text{, entonces x} = -1/6 \text{ es solución} & \\ -2/3 & & -12 & & \\ \hline & 18 & 0 \Rightarrow \text{P}(-2/3) = 0\text{, entonces x} = -2/3 \text{ es solución} & & \end{array}$$

Observación 2.38 (Ruffini no resuelve ecuaciones)
Es necesario aclarar que la Regla de Ruffini no es un método que nos ayuda a determinar la existencia o no de las soluciones en una ecuación polinómica. En realidad, esta regla nos brinda un método para evaluar polinomios, sin sustituir el valor de x en el polinomio. Lo que significa, que al momento de aplicar el teorema 2.36, para buscar las soluciones de una ecuación, la forma mas eficiente de buscar tales soluciones, entre todas las posibles soluciones, es por medio de la Regla de Ruffini.

Ejemplo 2.39 *Resolver la ecuación* $2x^3 + x^2 - 13x + 6 = 0$

Solución. El término independiente $a_0 = 6$ y el coeficiente principal $a_3 = 2$. Por lo tanto, las posibles soluciones son fracciones c/d donde los valores para c son: ± 1, ± 2, ± 3 y ± 6 (los divisores del término independiente) y los valores para d son: ± 1 y ± 2 (los divisores del coeficiente principal). Luego combinando ambos tenemos las siguientes fracciones ± 1, ± 2, ± 3, ± 6, $\pm \frac{1}{2}$ y $\pm \frac{3}{2}$ que son las posibles soluciones de la ecuación.

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & 1 & -13 & 6 \\ 2 & & 4 & 10 & -6 \\ \hline & 2 & 5 & -3 & \boxed{0} \Rightarrow \text{P}(2) = 0\text{, entonces x} = 2 \text{ es solución} \\ -3 & & -6 & -3 & \\ \hline & 2 & -1 & \boxed{0} \Rightarrow \text{P}(-3) = 0\text{, entonces x} = -3 \text{ es solución} & \\ \tfrac{1}{2} & & 1 & & \\ \hline & 2 & 0 \Rightarrow \text{P}(\tfrac{1}{2}) = 0\text{, entonces x} = 1/2 \text{ es solución} & & \end{array}$$

Soluciones irracionales

Si combinamos la Regla de Ruffini y la resolvente obtendremos un interesante método que nos permitirá encontrar soluciones irracionales de una ecuación polinómica.

Supongamos que queremos resolver una ecuación de la forma

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \quad \text{con } n \geq 3.$$

Entonces, aplicamos el siguiente procedimiento:

1. Usamos la Regla de Ruffini hasta encontrar todas las soluciones racionales.

2. Luego, buscamos las soluciones irracionales aplicando la resolvente (2.2) a la ecuación de segundo grado que queda al final de la Regla de Ruffini. Es necesario, tener en cuenta, que posiblemente esta ecuación no tenga soluciones reales, no obstante, la resolvente nos ayudará a determinar la naturaleza de estas soluciones.

Ejemplo 2.40 *Encuentra las soluciones de la ecuación*

$$x^3 - 2x^2 - 4x - 16 = 0.$$

Solución. Las posibles soluciones racionales son: ± 1, ± 2, ± 4, ± 8, ± 16 (los divisores del término independiente). Después de verificar en la Regla de Ruffini con ± 1, ± 2 vemos que no son soluciones de la ecuación. Sin embargo, para $x = 4$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2 & -4 & -16 \\ 4 & & 4 & 8 & 16 \\ \hline & 1 & 2 & 4 & \boxed{0} \end{array} \Rightarrow x = 4 \text{ es solución}$$

Nos queda la ecuación $x^2 + 2x + 4 = 0$, de modo que; $a = 1$, $b = 2$ y $c = 4$.

$$\begin{aligned} x &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(4)}}{2(1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 16}}{2} \\ &= \frac{-15 \pm \sqrt{-12}}{2} \quad \text{no es un número real} \end{aligned}$$

Por lo tanto la única solución real de la ecuación es $x = 4$.

Ejemplo 2.41 *Resolver la ecuación* $x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 3x + 1 = 0$

Solución. Las posibles soluciones racionales son ± 1.

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & 3 & -2 & -3 & 1 \\
1 & & 1 & 4 & 2 & -1 \\
\hline
 & 1 & 4 & 2 & -1 & \boxed{0} \Rightarrow \text{x = 1 es solución} \\
-1 & & -1 & -3 & 1 & \\
\hline
 & 1 & 3 & -1 & \boxed{0} \Rightarrow \text{x = −1 es solución} &
\end{array}
$$

Nos queda la ecuación $x^2 + 3x - 1 = 0$, entonces $a = 1$, $b = 3$ y $c = -1$.

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+4}}{2} \\
&= \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-3+\sqrt{13}}{2} \\ \\ x_2 = \frac{-3+\sqrt{13}}{2} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, la ecuación tiene dos soluciones racionales $x = 1$, $x = -1$ y dos soluciones irracionales $x = \frac{-3+\sqrt{13}}{2}$, $x = \frac{-3-\sqrt{13}}{2}$.

2.1.4. Teorema de la Factorización Lineal

Terminaremos esta sección enunciado un teorema que generaliza todos los casos de factorización presentados en la sección 2.0.4.

Teorema 2.42 (Teorema de la factorización lineal)
Sea $P(x)$ un polinomio de grado n, esto es

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0.$$

Supongamos además que $P(x)$ tiene n raíces reales, algunas repetidas; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Entonces, $P(x)$ se factoriza como:

$$P(x) = a_n (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n).$$

Este teorema afirma que si conocemos las soluciones de la ecuación

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0,$$

entonces también conocemos la factorización del polinomio.

Ejemplo 2.43 *Factoriza el polinomio $x^4 - x^3 - 11x^2 + 9x + 18$.*

Solución. Para poder factorizar este polinomio es necesario resolver la siguiente ecuación (es decir, encontrar las raíces del polinomio)

$$x^4 - x^3 - 11x^2 + 9x + 18 = 0$$

Para ello, aplicamos el teorema 2.36 junto con la Regla de Ruffini y obtenemos el siguiente resultado

$$
\begin{array}{r|rrrrrl}
 & 1 & -1 & -11 & 9 & 18 & \\
-1 & & -1 & 2 & 9 & -18 & \\
\hline
 & 1 & -2 & -9 & 18 & \boxed{0} & \Rightarrow \text{x} = -1 \text{ es solución} \\
2 & & 2 & 0 & -18 & 0 & \\
\hline
 & 1 & 0 & -9 & \boxed{0} & & \Rightarrow \text{x} = 2 \text{ es solución} \\
3 & & 3 & 9 & & & \\
\hline
 & 1 & 3 & \boxed{0} & & & \Rightarrow \text{x} = 3 \text{ es solución} \\
-3 & & -3 & & & & \\
\hline
 & 1 & \boxed{0} & & & & \Rightarrow \text{x} = -3 \text{ es solución}
\end{array}
$$

Por lo tanto, las raíces del polinomio son -1, 2, 3 y -3, por ende la factorización del polinomio es

$$x^4 - x^3 - 11x^2 + 9x + 18 = (x+1)(x-2)(x-3)(x+3).$$

Ejemplo 2.44 *Factorizar el polinomio* $2x^3 + 5x^2 - 4x - 12$.

Solución. Primero busquemos las soluciones de la ecuación

$$2x^3 + 5x^2 - 4x - 12 = 0.$$

Al aplicar el teorema 2.36 junto con la Regla de Ruffini obtenemos

$$
\begin{array}{r|rrrrl}
 & 2 & 5 & -4 & -12 & \\
-2 & & -4 & -2 & 12 & \\
\hline
 & 2 & 1 & -6 & \boxed{0} & \Rightarrow \text{x} = -2 \text{ es solución} \\
-2 & & -4 & 6 & & \\
\hline
 & 2 & -3 & \boxed{0} & & \Rightarrow \text{x} = -2 \text{ es solución} \\
3/2 & & 3 & & & \\
\hline
 & 2 & \boxed{0} & & & \Rightarrow \text{x} = 3/2 \text{ es solución}
\end{array}
$$

La factorización del polinomio es

$$2x^3 + 5x^2 - 4x - 12 = 2(x+2)(x+2)(x-3/2) = 2(x+2)^2\left(\frac{2x-3}{2}\right) = (x+2)^2(2x-3).$$

Ejemplo 2.45 *Factorizar el polinomio* $x^4 - x^3 - 27x + 27$

Solución. Nuevamente al aplicar el teorema 2.36 junto con la Regla de Ruffini para encontrar las soluciones de la ecuación

$$x^4 - x^3 - 27x + 27 = 0$$

obtenemos el siguiente resultado:

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & -1 & 0 & -27 & 27 \\
1 & & 1 & 0 & 0 & -27 \\
\hline
 & 1 & 0 & 0 & -27 & \boxed{0} \\
3 & & 3 & 9 & 27 & \\
\hline
 & 1 & 3 & 9 & \boxed{0} &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\Rightarrow x = 1 \text{ es solución} \\
\\
\Rightarrow x = 3 \text{ es solución}
\end{array}
$$

Sólo dos soluciones racionales, las otras dos soluciones asumimos que son irracionales. Por lo tanto aplicamos la resolvente para encontrar las demás soluciones, en este caso; $a = 1$, $b = 3$ y $c = 9$.

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(1)(9)}}{2(1)} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 36}}{2} \\
&= \frac{-3 \pm \sqrt{-27}}{2}.
\end{aligned}
$$

Como se puede notar, las otras dos soluciones en realidad no corresponde a números reales. En consecuencia, la ecuación tiene sólo dos soluciones reales, o lo que es igual, el polinomio sólo tiene dos raíces reales. Su factorización es

$$x^4 - x^3 - 27x + 27 = (x - 1)(x - 3)(x^2 + 3x + 9).$$

2.2. Inecuaciones y Valor Absoluto

2.2.1. Relación de orden

Todo número (exceptuando al cero) es de una de dos clases: Es positivo o es negativo. Es decir, dado un número real a, entonces a está a la derecha de cero (es positivo) o está a la izquierda de cero (es negativo). Cuando decimos que un número esta a la derecha de cero se expresa en términos matemáticos

$$a > 0.$$

De manera similar, cuando a está a la izquierda de cero se escribe

$$a < 0.$$

Muchas veces es necesario determinar cuando dados dos números uno es mayor que el otro. Intuitivamente, sabemos que 5 es menor que 7 y que 2 es menor que 3. Esta idea intuitiva se formaliza en la siguiente definición

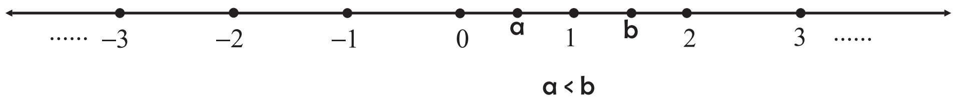
Definición 2.46 (Relación $<$)
Dados dos números reales a y b, decimos que a es menor que b y se expresa $a < b$ si la diferencia $b - a$ es positiva. En símbolos

$$a < b \quad si \quad b - a > 0.$$

Esta definición confirma lo que intuitivamente habíamos deducido

- $5 < 7$ ya que $7 - 5 = 2 > 0$
- $2 < 3$ ya que $3 - 2 = 1 > 0$

Otra manera más intuitiva de pensar en el símbolo $<$, es relacionándolo con la recta real. De esta manera, decir $a < b$ significa que a está a la izquierda de b en la recta real.



El símbolo $<$ tiene un hermano gemelo, que se denota por $>$ y que se lee "es mayor que". Si sabemos como se comporta $<$, automáticamente sabemos como se comporta $>$. Por esto, no necesitamos decir mucho sobre $>$. Es suficiente observar que $b > a$ significa exactamente lo mismo que $a < b$. Las relaciones $a < b$ y $b > a$ se llaman **desigualdades**.

Propiedades de la relación <

1. **Transitividad:**
$$\text{Si } a < b \text{ y } b < c \text{ entonces } a < c$$
2. **Suma:**
$$\text{Si } a < b \text{ entonces } a + c < b + c$$
3. **Multiplicación:**
$$\text{Si } a < b \text{ y } c > 0 \text{ entonces } a \cdot c < b \cdot c$$
$$\text{Si } a < b \text{ y } c < 0 \text{ entonces } a \cdot c > b \cdot c$$

La propiedad 2 dice que se puede sumar al mismo número a ambos lados de la desigualdad sin afectar la desigualdad y el número puede ser positivo o negativo. La propiedad 3 tiene su complicación. Nótese que si multiplicamos ambos lados por un número positivo, se preserva el sentido de la desigualdad; sin embargo, si multiplicamos por un número negativo, se invierte la desigualdad.

La relación ≤

Además del gemelo $>$, el símbolo $<$ tiene otro relacionado con él. Se denota por $\leq$ y se lee "menor o igual que". Decimos que

$$a \leq b \quad \text{si } b - a \text{ es positivo o cero}$$

Por ejemplo, es correcto decir $2 \leq 3$; también es correcto decir $2 \leq 2$. Esta nueva relación se comporta de manera muy parecida a $<$. De hecho, si ponemos una barra debajo de $<$ y $>$ en las propiedades de las desigualdades enunciadas antes, las afirmaciones resultantes serán correctas. Es obvio que $b \geq a$ significa lo mismo que $a \leq b$.

2.2.2. Intervalos

Si a y b son dos números cualquiera tales que por ejemplo $a < b$, y los queremos situar en la recta real, a cada uno de estos números le corresponde un punto de la recta. Digamos que al número a le corresponde el punto A y al número b le corresponde el punto B.

En este gráfico, al conjunto de los números reales comprendidos entre los números a y b se le llama **intervalo** que en la recta real esta representado por el conjunto de puntos comprendidos entre A y B. A los números a y b los llamaremos extremos del intervalo.

Típos de intervalos

Varias clases de intervalos surgirán en nuestro trabajo e introducimos una terminología y notación especiales para ellos. Considerando las características de los extremos del intervalo tenemos:

1. **Intervalo Cerrado:** Cuando los extremos del intervalo se incluyen decimos que el intervalo es cerrado. Se denota como $[a, b]$ y se define:
$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \ : \ a \leq x \leq b\}.$$

2. **Intervalo Abierto:** Cuando los extremos del intervalo se excluyen decimos que el intervalo es abierto. Se denota como (a, b) y se define:
$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ a < x < b\}.$$

3. Abierto en a y cerrado en b, se denota como $(a, b]$ y se define:
$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \ : \ a < x \leq b\}.$$

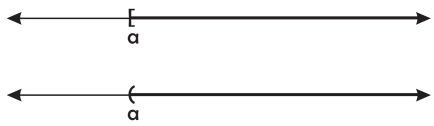
4. Cerrado en a y abierto en b, se denota como $[a, b)$ y se define:
$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ a \leq x < b\}.$$

Un número cualquiera a cuya representación en la recta es el punto A divide la recta real en dos partes llamadas semirrectas de origen el punto A.

La semirrecta; de origen A y extremo el lado derecho de $\mathbb{R}$, formada por todos aquellos puntos cuyos números son mayores que a define dos nuevos intervalos:

$$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \geq a\}.$$

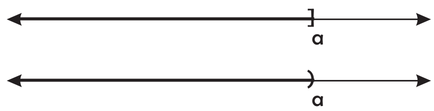
$$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x > a\}.$$



La semirrecta; de origen A y extremo el lado izquierdo de $\mathbb{R}$, formada por todos aquellos puntos cuyos números son menores que a define otros dos nuevos intervalos:

$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \leq a\}.$$

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x < a\}.$$



En adelante, usaremos las letras mayúsculas I, J, K, L,... del abecedario para denotar un intervalo.

Operaciones con intervalos

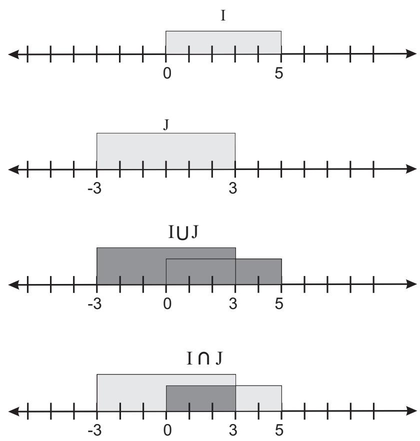
En este trabajo sólo definiremos dos operaciones que se pueden realizar con intervalos: La unión y la intersección.

1. **Unión:** Sean I, J dos intervalos, la unión I∪J, es un subconjunto de la recta real formado por todos los números que se encuentran en el intervalo I o en el intervalo J o en ambos intervalos.

$$\mathrm{I} \cup \mathrm{J} = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \in \mathrm{I} \text{ o } x \in \mathrm{J}\}$$

2. **Intersección:** Sean I, J dos intervalos, la intersección I∩J, es un subconjunto de la recta real formado por todos los números que se encuentran en el intervalo I y en el intervalo J.

$$\mathrm{I} \cap \mathrm{J} = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \in \mathrm{I} \text{ y } x \in \mathrm{J}\}$$



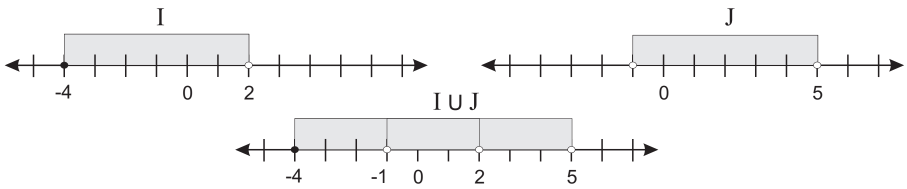
Ejemplo 2.47 *Considera los siguientes intervalos*

$$I = [-4, 2) \ , \quad J = (-1, 5) \ , \quad K = [0, 6] \ , \quad L = (-2, \infty) \ , \quad M = (-\infty, 4]$$

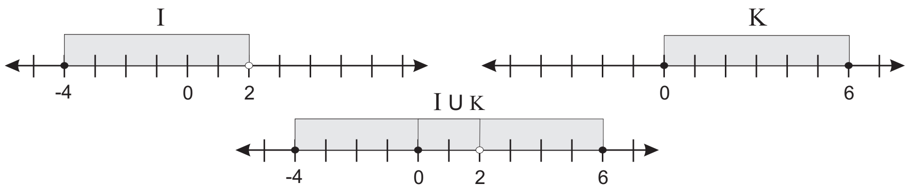
Determinar gráficamente pero dando la respuesta en forma de intervalo, cada una de las siguientes operaciones.

$$I \cup J\ , \quad I \cup K\ , \quad I \cap J\ , \quad L \cap M.$$

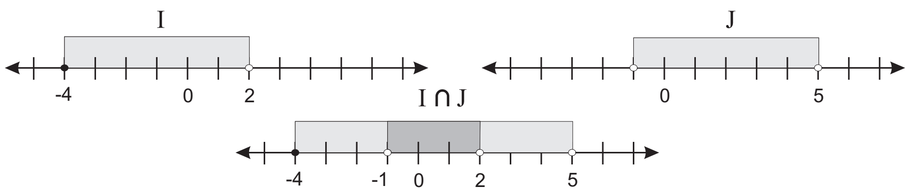
Solución. $I \cup J$.



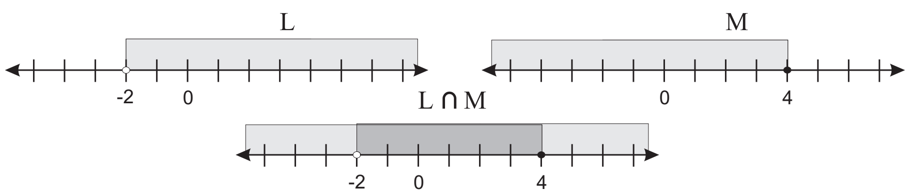
La solución es $I \cup J = [-4, 5)$.
Solución. $I \cup K$.



La solución es $I \cup K = [-4, 6]$.
Solución. $I \cap J$



La solución es $I \cap J = (-1, 2)$.
Solución. $L \cap M$



La solución es $L \cap M = (-2, 4]$.

2.2.3. Inecuaciones

Lo primero es aclarar el término **inecuaciones**. Al inicio de la sección 2.1 vimos que con el símbolo $=$ construimos identidades y ecuaciones ya que lo usamos para comparar dos cantidades. Ahora usaremos los símbolos $<$, $>$, $\leq$ y $\geq$ también para comparar cantidades, pero esta vez, en un sentido diferente.

La expresión

$$x + 1 = 4$$

simboliza la siguiente pregunta ¿Cuál o cuáles son los números que aumentado en uno es igual a cuatro?. La respuesta es $x = 3$, como podemos notar solo existe un único número con tal condición. Por otro lado, la expresión

$$x + 1 > 4$$

representa la siguiente pregunta ¿Cuál o cuáles son los números que aumentado en uno es mayor que cuatro?. La respuesta es $x > 3$, es decir todos los números mayores que 3 son números que verifican la desigualdad planteada. Como podemos notar existen infinitos números que verifican la desigualdad. A este tipo de planteamientos los llamaremos inecuaciones. Es decir, una inecuación es una expresión en la que se comparan dos cantidades por medio de una desigualdad. A diferencia de una ecuación, el conjunto solución de una inecuación esta conformado por infinitas soluciones.

Una inecuación que es válida para todo valor de la variable se llama **inecuación incondicional**. Por ejemplo, la inecuación

$$x^2 + 1 \geq 0$$

es una inecuación incondicional ya que la expresión $x^2 + 1$ es siempre positivo para todo valor de x. la mayor parte de las inecuaciones (por ejemplo, $x + 1 > 4$) son válidas sólo para algunos valores de la variable, estas se conocen como **ecuaciones condicionales**. La tarea principal de esta sección es resolver inecuaciones condicionales, esto es, encontrar el conjunto que hace válida la desigualdad.

Resolución de inecuaciones

Como en las ecuaciones, el procedimiento para resolver una inecuación consiste en transformar la inecuación, hasta que el conjunto solución sea obvio o dispongamos de un método para resolverla. Sin embargo, hay riesgos si se procede de forma demasiado mecánica. Es importante pensar en cada paso que se va a dar teniendo en cuenta las propiedades de las desigualdades presentadas en la sección 2.2.1, que podemos resumir en las siguientes reglas:

Reglas para resolver inecuaciones

1.- Podemos sumar el mismo número a ambos lados de una desigualdad.

2.- Podemos multiplicar ambos lados de una desigualdad por un número positivo.

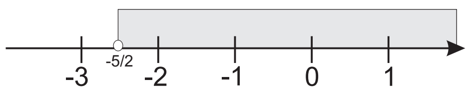
3.- Podemos multiplicar ambos lados de una desigualdad por un número negativo, pero entonces debemos invertir el sentido de la desigualdad.

Ejemplo 2.48 *Resuelva la siguiente inecuación y muestre gráficamente el conjunto solución.*

$$2x - 7 < 4x - 2.$$

Solución.

Inecuación dada:	$2x - 7$	$<$	$4x - 2$
Sumamos $-4x$:	$-2x - 7$	$<$	-2
Sumamos 7:	$-2x$	$<$	5
Multiplicamos $-1/2$:	x	$>$	$-5/2$



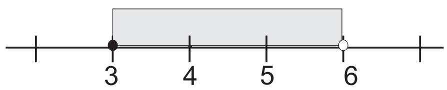
La solución es el intervalo $(-5/2, \infty)$

Ejemplo 2.49 *Resuelva la siguiente inecuación y muestre gráficamente el conjunto solución.*

$$-1 \leq 2x - 7 < 5.$$

Solución.

Inecuación dada:	-1	$\leq$	$2x - 7$	$<$	5
Sumamos 7:	6	$\leq$	$2x$	$<$	12
Multiplicamos por $1/2$:	3	$\leq$	x	$<$	6



La solución es el intervalo $[3, 6)$

Resolución de algunos tipos de inecuaciones

No pretendemos, en este momento, hacer una clasificación de las inecuaciones del mismo modo como se clasifican las ecuaciones polinomiales. Lo que pretendemos, es distinguir algunas inecuaciones de otras, cuyas soluciones, se obtienen de modo muy distinto. Por esta razón, vamos a considerar tres "tipos" de inecuaciones.

1. Inecuaciones de la forma:

$$ax + b > 0 \; ; \quad ax + b < 0 \; ; \quad ax + b \leq 0 \; ; \quad ax + b \geq 0.$$

2. Inecuaciones de la forma:

$$P(x) > 0 \; ; \quad P(x) < 0 \; ; \quad P(x) \leq 0 \; ; \quad P(x) \geq 0$$

donde $P(x)$ es un polinomio de grado $n > 1$.

3. Inecuaciones de la forma:

$$\frac{ax+b}{cx+d} > 0 \; ; \quad \frac{ax+b}{cx+d} < 0 \; ; \quad \frac{ax+b}{cx+d} \leq 0 \; ; \quad \frac{ax+b}{cx+d} \geq 0.$$

Inecuaciones de la forma:

$$ax+b > 0 \; ; \quad ax+b < 0 \; ; \quad ax+b \leq 0 \; ; \quad ax+b \geq 0.$$

Para resolver este tipo de inecuaciones se sigue exactamente el mismo procedimiento empleado para resolver ecuaciones lineales, teniendo en cuenta las reglas antes descritas.

Ejemplo 2.50 *Retomemos la ecuación del ejemplo 2.22, pero esta vez en lugar de plantear una ecuación, planteamos la siguiente inecuación*

$$(3x-1)^2 - 5(x-2) - (2x+3)^2 - (5x+2)(x-1) \geq 0.$$

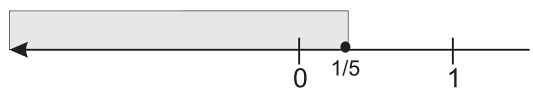
Solución. Aplicaremos el mismo procedimiento que en el Ejemplo 2.22, a pesar de ser una inecuación.

$$\begin{aligned} 9x^2 - 6x + 1 - 5x + 10 - (4x^2 + 12x + 9) - (5x^2 - 3x - 2) &\geq 0 \Rightarrow \\ 9x^2 - 11x + 11 - 4x^2 - 12x - 9 - 5x^2 + 3x + 2 &\geq 0 \Rightarrow \\ -20x + 4 &\geq 0 \end{aligned}$$

ahora simplemente despejamos siguiendo las reglas

$$-20x + 4 \geq 0 \Rightarrow -20x \geq -4 \Rightarrow x \leq \frac{-4}{-20} \Rightarrow x \leq \frac{1}{5} \cdot$$

Por lo tanto la solución es el intervalo $(-\infty, 1/5]$.



Ejemplo 2.51 *Resolver la inecuación*

$$3(2x+1)(-x+3) - (2x+5)^2 > -[-\{-3(x+5)\} + 10x^2]$$

Solución. Seguimos el mismo procedimiento empleado para resolver la ecuación del ejemplo 2.23.

$$\begin{aligned}
3(2x+1)(-x+3)-(2x+5)^2 &> -[-\{-3(x+5)\}+10x^2] \\
3(-2x^2+6x-x+3)-(4x^2+20x+25) &> -[-\{-3x-15\}+10x^2] \\
-6x^2+15x+9-4x^2-20x-25 &> -[3x+15+10x^2] \\
-10x^2-5x-16 &> -3x-15-10x^2 \\
-10x^2+10x^2-5x+3x &> -15+16 \\
-2x &> 1 \\
x &< -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto la solución es el intervalo $(-\infty, -1/2)$.

Inecuaciones de la forma:

$$P(x) > 0\ ; \quad P(x) < 0\ ; \quad P(x) \leq 0\ ; \quad P(x) \geq 0$$

donde $P(x)$ es un polinomio de grado $n > 1$. Aplicaremos el siguiente procedimiento para resolver este tipo de inecuaciones

1. Factorizamos el polinomio.
2. Investigamos para que valores de la variable cada factor lineal, de la factorización anterior, es **positivo**. Los negativos estarán en el complemento de la solución.
3. Hacemos una tabla en donde estudiamos el producto de los signos de los factores.

Ejemplo 2.52 *Resolver la inecuación* $x^2 - x - 6 < 0$.

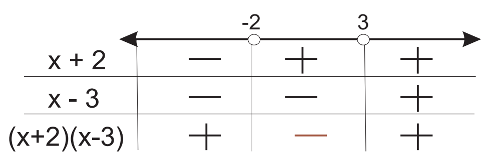
Solución. Factorizamos el polinomio $x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$ y planteamos la inecuación

$$(x+2)(x-3) < 0.$$

Ahora investigamos para que valores de x cada factor es positivo

- $x + 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > -2$. El factor $x+2$ es positivo a la derecha de -2 y es negativo a la izquierda de -2.
- $x - 3 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > 3$. El factor $x-3$ es positivo a la derecha de 3 y es negativo a la izquierda de 3.

En la tabla adjunta representamos esta información y realizamos el producto de los signos. Como queremos saber para que valores de x la expresión $(x+2)(x-3) < 0$ la solución es el intervalo $(-2, 3)$.



Ejemplo 2.53 *Resolver la inecuación*

$$5 - 3\left(x + \frac{2}{3}\right) < 2x - 5 < 3x + x^2 - 25$$

Solución. Primero separamos esta inecuación en dos inecuaciones:

Inecuación S_1: $5 - 3\left(x + \frac{2}{3}\right) < 2x - 5$

Inecuación S_2: $2x - 5 < 3x + x^2 - 25$

La solución total de este tipo de inecuaciones viene dada por

$$S = S_1 \cap S_2.$$

Buscamos la solución de S_1.

$$\begin{aligned} 5 - 3\left(x + \frac{2}{3}\right) &< 2x - 5 \\ 5 - 3\left(\frac{3x + 2}{3}\right) &< 2x - 5 \\ 5 - 3x - 2 &< 2x - 5 \\ -5x &< -8 \\ x &> 8/5 \end{aligned}$$

De modo que $S_1 = (8/5, \infty)$.

Buscamos la solución de S_2.

$$\begin{aligned} 2x - 5 &< 3x + x^2 - 25 \\ x^2 + x - 20 &> 0 \end{aligned}$$

Se trata de una inecuación cuadrática, entonces factorizamos el polinomio y nos queda la inecuación

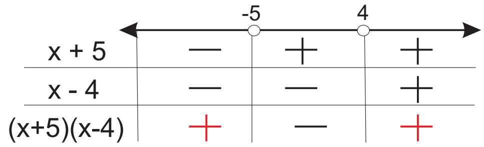
$$(x + 5)(x - 4) > 0$$

Ahora investigamos para que valores de x cada factor es positivo

- $x + 5 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > -5$. El factor $x + 5$ es positivo a la derecha de -5 y es negativo a la izquierda de -5.

- $x - 4 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > 4$. El factor $x - 4$ es positivo a la derecha de 4 y es negativo a la izquierda de 4.

En la tabla adjunta representamos esta información y realizamos el producto de los signos. Como queremos saber para que valores de x la expresión $(x+5)(x-4) > 0$ la solución es $S_2 = (-\infty, -5) \cup (4, \infty)$.



La solución total es $S = S_1 \cap S_2 = (8/5, \infty) \cap [(-\infty, -5) \cup (4, \infty)]$. Representamos para ver la intersección

De modo que $S = (4, \infty)$.

Ejemplo 2.54 *Resolver la inecuación* $x^4 - 16 \leq 0$.

Solución. Factorizamos el polinomio

$$x^4 - 16 = (x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4).$$

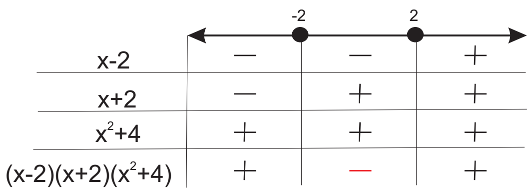
Nos queda la inecuación

$$(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4) \leq 0.$$

Investigamos el signo de cada de uno de los factores que forman la factorización:

- $x - 2 \geq 0 \quad \Rightarrow x \geq 2$
- $x + 2 \geq 0 \quad \Rightarrow x \geq -2$
- $x^2 + 4 \geq 0$, es una inecuación incondicional.

Representamos esta información en la tabla adjunta e investigamos el signo del producto de los tres factores. Como nos interesa saber para qué valores de x el producto de los tres factores es negativo la solución es el intervalo $[-2, 2]$.



Inecuaciones de la forma:

$$\frac{ax+b}{cx+d} > 0 \ ; \quad \frac{ax+b}{cx+d} < 0 \ ; \quad \frac{ax+b}{cx+d} \leq 0 \ ; \quad \frac{ax+b}{cx+d} \geq 0.$$

Para resolver este tipo de inecuaciones investigamos, por separado, para que valores de la variable el numerador es positivo y para que valores de la variable el denominador es positivo. Luego, en un tabla representamos esta información e investigamos cual es el signo de la fracción (el signo de la fracción es el producto de los signos del numerador y denominador).

Ejemplo 2.55 *Resolver la inecuación* $\dfrac{9-3x}{2x+1} \leq 0.$

Solución. Veamos para que valores de x el numerador y denominador son positivos:

- $9 - 3x \geq 0 \Rightarrow -3x \geq -9 \Rightarrow x \leq 3.$
- $2x + 1 > 0 \Rightarrow 2x > -1 \Rightarrow x > -1/2$. (Usamos $>$ en lugar de $\geq$ porque el denominador no puede ser cero)

Representamos esta información en la tabla adjunta e investigamos el signo de la fracción. Como nos interesa saber para qué valores de x la fracción es negativa la solución es $(-\infty, -1/2) \cup [3, \infty)$.

		-1/2		3	
9 - 3x	$+$		$+$		$-$
2x+1	$-$		$+$		$+$
9 - 3x / 2x+1	$-$		$+$		$-$

Ejemplo 2.56 *Resolver la inecuación* $\dfrac{2x-5}{3x+6} \leq 2$

Solución. Como es costumbre, cuando se resuelven ecuaciones se pasa a multiplicar lo que se encuentra en el denominador del otro lado de la igualdad para obtener una expresión como:

$$2x - 5 \leq 2(3x + 6).$$

Pero al hacer esto estamos suponiendo que $3x + 6$ debe ser positivo, algo claramente inadecuado, ya que el signo de $3x + 6$ depende del valor de la variable x. En lugar de esto se reescribe la inecuación de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\frac{2x-5}{3x+6} - 2 &\leq 0 && \text{sumando } -2 \text{ de ambos lados} \\
\frac{2x-5-2(3x+6)}{3x+6} &\leq 0 && \text{sumando fracciones} \\
\frac{2x-5-6x-12}{3x+6} &\leq 0 && \text{realizamos las operaciones en el numerador} \\
\frac{-4x-17}{3x+6} &\leq 0 && \text{agrupando términos semejantes}
\end{aligned}$$

Como podemos ver nos queda una inecuación como la del ejemplo anterior, entonces la resolvemos siguiendo el mismo procedimiento.

- $-4x - 17 \geq 0 \Rightarrow -4x \geq 17 \Rightarrow x \leq -17/4.$
- $3x + 6 > 0 \Rightarrow 3x > -6 \Rightarrow x > -2$. (Usamos $>$ en lugar de $\geq$ porque el denominador no puede ser cero)

Representamos esta información en la tabla adjunta e investigamos el signo de la fracción. Como nos interesa saber para qué valores de x la fracción es negativa la solución es $(-\infty, -4/17] \cup (-2, \infty)$.

	-4/17	-2	
-4x - 17	$+$	$+$	$-$
3x+6	$-$	$+$	$+$
-4x - 17 / 3x+6	$-$	$+$	$-$

Ejemplo 2.57 *Resolver la inecuación* $\dfrac{-2}{x-1} \geq 0$.

Solución. Como nos interesa saber para que valores de x la fracción es positiva debemos investigar para que valores de x el denominador es negativo (el numerador es negativo). De modo que sólo resolvemos la inecuación

$$x - 1 < 0 \Rightarrow x < 1.$$

Por lo tanto la solución es $S = (1, \infty)$.

Ejemplo 2.58 *Resolver la inecuación*

$$\frac{10x-7}{15x+3} \leq \frac{3x+8}{12} - \frac{5x^2-4}{20x+4}$$

Solución. Observa el Ejemplo 2.28. Aplicando el mismo procedimiento que aplicamos en dicho ejemplo llegamos al siguiente resultado

$$\frac{4(10x-7) - (5x+1)(3x+8) + 3(5x^2-4)}{12(5x+1)} \leq 0$$

Después de simplificar el numerador nos queda

$$\frac{-3x-48}{12(5x+1)} \leq 0.$$

- $-3x - 48 \geq 0 \Rightarrow -3x \geq 48 \Rightarrow x \leq -16$.
- $5x + 1 > 0 \Rightarrow 5x > -1 \Rightarrow x > -1/5$. (Usamos $>$ en lugar de $\geq$ porque el denominador no puede ser cero)
- El número 12 por ser positivo no afecta el resultado, por lo tanto no lo consideramos en la tabla.

Representamos esta información en la tabla adjunta e investigamos el signo de la fracción. Como nos interesa saber para qué valores de x la fracción es negativa la solución es $(-\infty, -16] \cup (-1/5, \infty)$.

	-16	-1/5	
-3x - 48	$+$	$-$	$-$
5x+1	$-$	$-$	$+$
-3x - 48 /12(5x+1)	$-$	$+$	$-$

Ejemplo 2.59 *Resolver la inecuación*

$$\frac{x^4 + x^3 - 8x - 8}{x^2 - 9} < 0.$$

Solución. Primero factorizamos ambos polinomios (numerador y denominador).

- El numerador se factoriza por factor común agrupando términos

  $$x^4+x^3-8x-8 = x^3(x+1)-8(x+1) = (x+1)(x^3 - 8) = (x+1)(x+2)(x^2-2x+4)$$

  Comentario. El polinomio azul es una diferencia de cubos. El factor x^2-2x+4 es positivo para todo valor de x (ver el ejemplo 2.19 y la observación 2.20).

- El denominador es una diferencia de cuadrados.

  $$x^2 - 9 = (x-3)(x+3).$$

Luego verificamos para que valores de x cada uno de los factores encontrados es positivo:

- $x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1.$
- $x + 2 > 0 \Rightarrow x > -2.$
- $x + 3 > 0 \Rightarrow x > -3.$
- $x - 3 > 0 \Rightarrow x > -3.$
- $x^2 - 2x + 4 > 0$ es una inecuación incondicional.

Representamos esta información en la tabla adjunta e investigamos el signo de la fracción. Como nos interesa saber para qué valores de x la fracción es negativa la solución es $(-3,-2) \cup (-1,3)$.

-3 -2 -1 3

x+1	−	−	−	+	+
x+2	−	−	+	+	+
x+3	−	+	+	+	+
x - 3	−	−	−	−	+
x^2 - 2x + 4	+	+	+	+	+
Resultado	+	−	+	−	+

2.2.4. Valor Absoluto

Muchas veces se desea describir el tamaño de un número sin importar si es positivo o negativo. Para hacerlo, se introduce el concepto de valor absoluto que se simboliza con dos barras verticales $|\ |$. Este concepto se define como

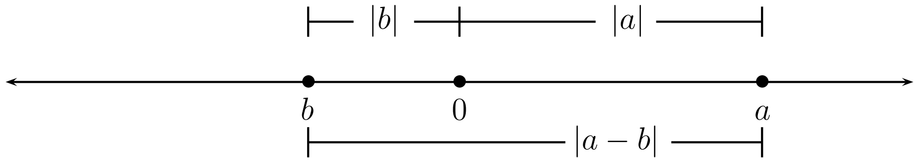
$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

Esta definición mostrada en dos partes puede causar confusión. Dice que si un número es positivo o cero, su valor absoluto es él mismo. Pero, si un número es negativo, entonces su valor absoluto es su opuesto aditivo. Por ejemplo,

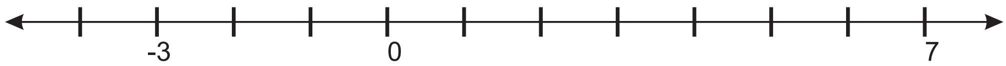
- $|7| = 7$ ya que $a = 7$ es positivo.
- $|-7| = -(-7) = 7$.
- Obsérvese que $|0| = 0$.

Geométricamente

También podemos pensar en $|a|$ en forma geométrica. El valor absoluto de a ($|a|$) representa la distancia entre a y 0 en la recta real. De manera más general, $|a - b|$ es la distancia entre a y b. El número $|b - a|$ representa la misma distancia.



Por ejemplo, observe que $|7 - (-3)|$ representa la distancia entre 7 y -3.



En efecto, $|7 - (-3)| = |7 + 3| = |10| = 10$.

Propiedades del valor absoluto

Las propiedades del valor absoluto son directas y fáciles de recordar.

1. $|0| = 0$
2. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
3. $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$
4. $|a + b| \leq |a| + |b|$
5. $|-a| = |a|$
6. $|a|^2 = a^2$

Existe una importante conexión entre el valor absoluto y la raíz cuadrada, a saber

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

Como ejemplos de esta afirmación

- $\sqrt{36} = \sqrt{6^2} = |6| = 6$ en este caso $a = 6$.
- $\sqrt{36} = \sqrt{(-6)^2} = |-6| = 6$ en este caso $a = -6$.

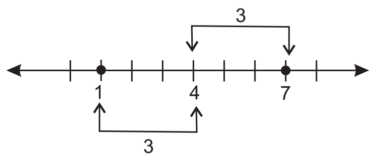
2.2.5. Ecuaciones con valor absoluto

Consideremos la siguiente ecuación

$$|x-4|=3.$$

En esta igualdad se encuentra implícita la siguiente pregunta ¿Cuál o cuáles son los números cuya distancia a 4 es igual a 3?.

Podemos resolver esta ecuación usando un razonamiento gráfico basado en su interpretación geométrica. En la figura adjunta notamos que los números que verifican esta propiedad son $x=1$ y $x=7$.



No todas las ecuaciones con valor absoluto se pueden resolver aplicando un razonamiento gráfico, por ejemplo la ecuación

$$\left|\frac{x+6}{3x-5}\right|=6$$

representa un tipo de estas inecuaciones. En general, resolver una ecuación conociendo su valor absoluto significa que nos dan el valor absoluto, que siempre es positivo, por lo tanto, tenemos que considerar que todo lo que esta entre las barras puede ser positivo o negativo. Lo que significa que tenemos que resolver dos ecuaciones; una considerando el valor positivo y otra considerando el valor negativo.

Ejemplo 2.60 *Resolver la ecuación* $|x-4|=3$.

Solución. Cuando $x-4$ es positivo nos queda la ecuación

$$x-4=3 \Rightarrow x=7.$$

Cuando $x-4$ es negativo nos queda la ecuación

$$-(x-4)=3 \Rightarrow -x=-1 \Rightarrow x=1.$$

Las soluciones son $x=1$, $x=7$.

Ejemplo 2.61 *Resolver la ecuación*

$$\left|\frac{x+6}{3x-5}\right|=6.$$

Solución. Cuando $\frac{x+6}{3x-5}$ es positivo nos queda la ecuación

$$\frac{x+6}{3x-5} = 6 \Rightarrow x+6 = 18x-30 \Rightarrow -17x = -36 \Rightarrow x = 36/17.$$

Cuando $\frac{x+6}{3x-5}$ es negativo nos queda la ecuación

$$-\frac{x+6}{3x-5} = 6 \Rightarrow -x-6 = 18x-30 \Rightarrow -19x = -24 \Rightarrow x = 24/19.$$

Las soluciones son $x = 36/17$, $x = 24/19$.

Ejemplo 2.62 *Resolver la ecuación*

$$3|x+1| = 4x - |10-2x|$$

Solución. Como la ecuación tiene dos valores absolutos tenemos cuatro posibilidades a considerar:

1. Cuando $x+1$ es positivo y $10-2x$ es positivo, tenemos la ecuación
$$3(x+1) = 4x - (10-2x) \Rightarrow -3x = -13 \Rightarrow x = 13/3.$$
2. Cuando $x+1$ es positivo y $10-2x$ es negativo, tenemos la ecuación
$$3(x+1) = 4x + (10-2x) \Rightarrow x = 7.$$
3. Cuando $x+1$ es negativo y $10-2x$ es positivo, tenemos la ecuación
$$-3(x+1) = 4x - (10-2x) \Rightarrow -9x = -7 \Rightarrow x = 7/9.$$
4. Cuando $x+1$ es negativo y $10-2x$ es negativo, tenemos la ecuación
$$-3(x+1) = 4x + (10-2x) \Rightarrow -5x = 13 \Rightarrow x = -13/5.$$

Las soluciones son: $x = 13/3$, $x = 7$, $x = 7/9$ y $x = -13/5$.

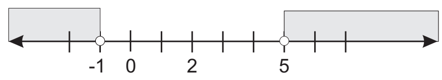
2.2.6. Inecuaciones con valor absoluto

Consideremos el siguiente planteamiento

$$|x-2| > 3.$$

En él se establece la siguiente pregunta: ¿Cuáles son los números cuya distancia al número 2 es mayor que 3?. Podemos responder esta pregunta por medio de un simple razonamiento gráfico.

En la figura adjunta observamos que los números cuya distancia a 2 es mayor que 3, son todos aquellos números mayores que 5 o menores que -1. Es decir, son aquellos números que se encuentran en el intervalo $(5, +\infty)$ o en el intervalo $(-\infty, -1)$. Por lo tanto la solución del planteamiento anterior es $S = (-\infty, -1) \cup (5, +\infty)$

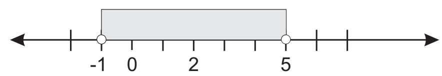


Análogamente, consideremos el siguiente planteamiento

$$|x - 2| < 3.$$

¿Cuáles son los números cuya distancia al número 2 es menor que 3?. Nuevamente usaremos un razonamiento gráfico para responder esta pregunta.

En la figura adjunta podemos observar que los números cuya distancia a 2 es menor que 3, son todos los números que se encuentran en el intervalo $(-1, 5)$. Por lo tanto la solución del planteamiento anterior es $S = (-1, 5)$.



En ambos casos hemos resuelto inecuaciones con valores absolutos y nos hemos apoyado en un criterio gráfico para resolver dichas inecuaciones. Este criterio gráfico esta basado en la interpretación gráfica que tiene el valor absoluto. Sin embargo, no todas las inecuaciones con valor absoluto se pueden resolver utilizando un criterio gráfico. Por ejemplo:

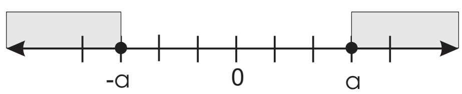
$$|x + 3| - 2|x - 1| \geq 3.$$

Para resolver este tipo de inecuaciones usaremos propiedades del valor absoluto que vienen inspiradas de su interpretación gráfica.

Las propiedades del valor absoluto que usaremos son las siguientes:

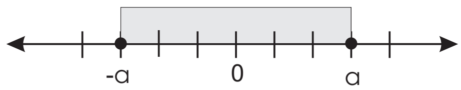
[P1] Sea $a > 0$, $|x| \geq a$ si, y sólo si $x \geq a$ o $x \leq -a$

Comentario. $|x| \geq a$ significa: Para qué valores de x la distancia a cero es mayor o igual a a. Claramente, esto es válido para x tales que $x \geq a$ o para $x \leq -a$. Esto es,



[P2] Sea $a > 0$, $|x| \leq a$ si, y sólo si $x \leq a$ y $x \geq -a$

Comentario. $|x| \leq a$ significa: Para qué valores de x la distancia a cero es menor o igual a a. Claramente, esto es válido para x tales que $x \leq a$ y a la vez para $x \geq -a$. Esto es,



Observación 2.63 *Aunque las propiedades P1 y P2 se establecen para los símbolos $\geq$ y $\leq$, respectivamente, las misma también son válidas si intercambiamos $\geq$ por $>$ en P1 y $\leq$ por $<$ en P2.*

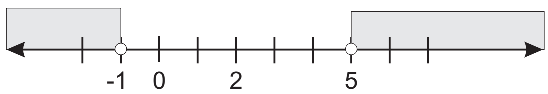
Ejemplo 2.64 *Resolver la inecuación*

$$|x - 2| > 3.$$

Solución. Usaremos la propiedad $[P1]$ para resolver esta inecuación.

$$\begin{aligned} |x-2| > 3 \quad \Leftrightarrow \quad & x - 2 > 3 \quad \text{o} \quad x - 2 < -3 \\ & x > 5 \qquad \text{o} \qquad x < -1 \end{aligned}$$

Esto es



Por lo tanto la solución es $S = (-\infty, -1) \cup (5, +\infty)$.

Comentario. Compare este ejemplo con la inecuación que resolvimos al inicio de esta sección.

Ejemplo 2.65 *Resolver la inecuación*

$$|x + 3| - 2|x - 1| \geq 3.$$

Solución. Para saber cual de las dos propiedades vamos a utilizar despejamos uno de los dos valores absolutos que se encuentran del lado izquierdo de la desigualdad y nos queda

$$|x + 3| \geq 3 + 2|x - 1|.$$

Claramente el lado derecho de la desigualdad es positivo (se trata de una suma de números positivos), por lo tanto aplicamos la propiedad [P1].

$$|x+3| \geq 3 + 2|x-1| \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{x + 3 \geq 3 + 2|x-1|}_{S_1} \quad \text{o} \quad \underbrace{x + 3 \leq -(3 + 2|x - 1|)}_{S_2}$$

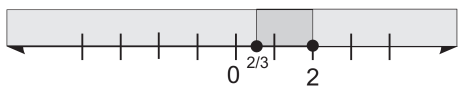
Resolvemos S_1 y S_2 por separado y luego la solución total es $S = S_1 \cup S_2$ (la letra o en la propiedad nos indica unión).

Solución S_1**:**

$$\begin{array}{rcl} x+3 & \geq & 3+2|x-1| \\ -2|x-1| & \geq & 3-x-3 \\ |x-1| & \leq & \dfrac{x}{2} \end{array}$$

Ahora aplicamos la propiedad [P2]

$$\begin{array}{rccc} |x-1| \leq \frac{x}{2} \quad \Leftrightarrow & x-1 \leq \frac{x}{2} & \text{y} & x-1 \geq -\frac{x}{2} \\ & x-\frac{x}{2} \leq 1 & \text{y} & x+\frac{x}{2} \geq 1 \\ & \frac{x}{2} \leq 1 & \text{y} & \frac{3x}{2} \geq 1 \\ & x \leq 2 & \text{y} & x \geq 2/3 \end{array}$$



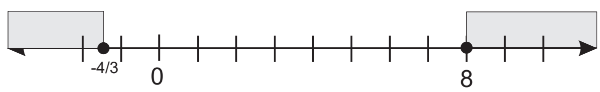
Por lo tanto $S_1 = [2/3, 2]$.

Solución S_2**:**

$$\begin{array}{rcl} x+3 & \leq & -(3+2|x-1|) \\ x+3 & \leq & -3-2|x-1| \\ -2|x-1| & \leq & -3-3-x \\ |x-1| & \geq & \dfrac{6+x}{2} \end{array}$$

Ahora aplicamos la propiedad [P1]

$$\begin{array}{rccc} |x-1| \geq \frac{6+x}{2} \quad \Leftrightarrow & x-1 \geq \frac{6+x}{2} & \text{o} & x-1 \leq -\frac{6+x}{2} \\ & 2x-2 \geq 6+x & \text{o} & 2x-2 \leq -6-x \\ & x \geq 8 & \text{o} & 3x \leq -4 \\ & x \geq 8 & \text{o} & x \leq -4/3 \end{array}$$



Por lo tanto $S_2 = (-\infty, -4/3] \cup [8, +\infty)$. Como la solución total viene dada por $S = S_1 \cup S_2$ entonces la solución de la inecuación es

$$S = (-\infty, -4/3] \cup [2/3, 2] \cup [8, +\infty).$$

Ejemplo 2.66 *Resolver la inecuación*

$$|2x + 3| \leq 2 - (x + 3)$$

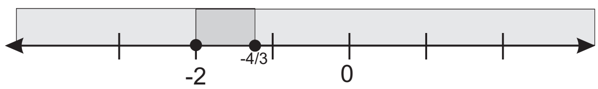
Solución. Para poder aplicar la propiedad [P2] debemos primero investigar para que valores de x la expresión del lado derecho de la desigualdad es positiva. De modo que resolvemos la siguiente desigualdad

$$2 - (x + 3) > 0 \Rightarrow 2 - x - 3 > 0 \Rightarrow -x > 3 - 2 \Rightarrow x < -1.$$

Por lo tanto, la inecuación se resuelve sujeta a la condición: $x < -1$.
Aplicamos la propiedad [P2].

$$\begin{array}{rcccc} |2x+3| \leq 2-(x+3) & \Leftrightarrow & 2x+3 \leq 2-(x+3) & \text{y} & 2x+3 \geq -2+x+3 \\ & & 3x \leq -4 & \text{y} & x \geq -2 \\ & & x \leq -4/3 & \text{y} & x \geq -2 \end{array}$$

Buscamos la intersección de estos intervalos y la solución de la inecuación será la intersección de dicho intervalo con la condición. Veamos



La intersección es $[-2, -4/3]$. Por lo tanto la solución es

$$S = [-2, -4/3] \cap \underbrace{(-\infty, -1)}_{\text{condición}} = [-2, -4/3].$$

Ejemplo 2.67 *Resolver la inecuación*

$$\left| \frac{2x - 3}{4 - x} \right| \leq 3.$$

Solución. Esta inecuación se resuelve aplicando la propiedad P[2].

$$\left| \frac{2x - 3}{4 - x} \right| \leq 3 \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\frac{2x - 3}{4 - x} \leq 3}_{S_1} \quad \text{y} \quad \underbrace{\frac{2x - 3}{4 - x} \geq -3}_{S_2}$$

La solución viene dada por $S = S_1 \cap S_2$ (la letra y en la propiedad nos indica una intersección entre ambas soluciones). Para encontrar las soluciones S_1 y S_2 se le sugiere al lector que revise el Ejemplo 2.56 en el cual se muestra un procedimiento paso a paso para resolver este tipo de inecuaciones.

Resolución de inecuaciones con valor absoluto usando la definición

Hasta el momento hemos usado las propiedades [P1] y [P2] para resolver inecuaciones con valor absoluto. Mostraremos un ejemplo de como se utiliza la definición de valor absoluto (la fórmula (2.3)) para resolver inecuaciones.

Ejemplo 2.68 *Resolver la inecuación*

$$|2x + 4| < 3|x - 6|.$$

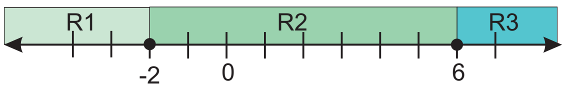
Solución. Lo primero es desigualar a cero, es decir reescribir la ecuación como

$$|2x + 4| - 3|x - 6| < 0.$$

Luego investigamos para que valor de x cada factor con valor absoluto es cero:

- $2x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4/2 \Rightarrow x = -2$
- $x - 6 = 0 \Rightarrow x = 6$

Estos puntos separan la recta en tres regiones



Caso 1: Supongamos que $x \in R1 = (-\infty, -2)$. En este caso escogemos un valor arbitrario para x en R1 y lo sustituimos en cada valor absoluto;

- Si $x = -3$ entonces $2(-3) + 4 = -6 + 4 = -2$. Como el resultado es negativo, de la definición de valor absoluto (fórmula (2.3)) se tiene que

$$|2x + 4| = -(2x + 4).$$

- Si $x = -3$ entonces $-3 - 6 = -9$. Como el resultado es negativo, de la definición de valor absoluto se tiene que

$$|x - 6| = -(x - 6).$$

Por lo tanto la inecuación se transforma en

$$-(2x+4) - 3(-(x-6)) < 0 \Rightarrow x + 14 < 0 \Rightarrow x < -14.$$

La primera solución (S_1) viene dada por la intersección entre la solución de la inecuación y la región R1.

$$S_1 = (-\infty, -14) \cap (-\infty, -2) = (-\infty, -14).$$

Caso 2: Supongamos que $x \in R2 = [-2, 6]$. Seguimos el mismo procedimiento que empleamos en el caso 1.

- Si $x = 0$ entonces $2(0) + 4 = 4$. Como el resultado es positivo, de la definición de valor absoluto se tiene que

$$|2x+4| = 2x+4.$$

- Si $x = 0$ entonces $0 - 6 = -6$. Como el resultado es negativo, de la definición de valor absoluto se tiene que

$$|x-6| = -(x-6).$$

Por lo tanto la inecuación se transforma en

$$2x + 4 - 3(-(x-6)) < 0 \Rightarrow 5x + 22 < 0 \Rightarrow x < -22/5.$$

La segunda solución (S_2) viene dada por la intersección entre la solución de la inecuación y la región R2.

$$S_2 = (-\infty, -22/5) \cap [-2, 6] = \emptyset.$$

Caso 3: Supongamos que $x \in R3 = (6, +\infty)$. Seguimos el mismo procedimiento que empleamos en los casos anteriores.

- Si $x = 7$ entonces $2(7) + 4 = 18$. Como el resultado es positivo, de la definición de valor absoluto se tiene que

$$|2x+4| = 2x+4.$$

- Si $x = 7$ entonces $7 - 6 = 1$. Como el resultado es positivo, de la definición de valor absoluto se tiene que

$$|x-6| = x-6.$$

Por lo tanto la inecuación se transforma en

$$2x + 4 - 3(x-6) < 0 \Rightarrow -x + 22 < 0 \Rightarrow x > 22.$$

La tercera solución (S_3) viene dada por la intersección entre la solución de la inecuación y la región R3.

$$S_3 = (22, +\infty) \cap (6, +\infty) = (22, +\infty).$$

La solución total viene dada como la unión de las soluciones S_1, S_2, S_3, esto es

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = (-\infty, -14) \cup (22, +\infty).$$