Teoría de la Computación y Leguajes Formales

Prof. Hilda Y. Contreras
Departamento de Computación
hyelitza@ula.ve
hildac.teoriadelacomputacion@gmail.com

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

Contenido

Tema 0: Introducción y preliminares:

- **Conocimientos matemáticos previos**
- **Conceptos básicos**
  1. Símbolo
  2. Alfabeto
  3. Cadena (Palabra)
  4. Lenguaje
  5. Problema
- **Lenguaje y Jerarquía de Chomsky**

Preliminares Matemáticos

- Teoría de Conjuntos:
  - Notación
  - Operaciones
  - Cardinalidad (conjuntos infinitos)
- Relaciones
  - Propiedades
  - Relación de equivalencia
- Grafos, Grafos dirigidos

Preliminares Matemáticos

- Árboles
- Recursividad
- Lógica y matemática:
  - Lógica de primer orden
  - Demostraciones formales
  - Inducción, inducción estructural

Alfabeto

1. **Símbolo**: entidad abstracta, unidad mínima, no se define (números, letras, etc.)
2. **Alfabeto Σ**: conjunto finito de símbolos

- Notación:

  Mayúsculas para Alfabetos: A, B, C, ..., Σ, Λ, Δ

  Minúsculas para Símbolos: a, b, … o números

- Ejemplos:

  Alfabeto binario A = { 0, 1 }

  Alfabeto B = { aa, b, ba }

  Alfabeto C = { <0,0>, <0,1>, <1,0>, <1,1> }

Cadena (Palabra)

3. Cadena w (Palabra) sobre el alfabeto Σ

: es una sucesión finita de elementos de Σ

$w = a_1 \ldots a_n$, donde a_i pertenece a Σ, $i >= 1$

- Notación:
  - Minúsculas Palabra: w,u,v,x,y,…
- Ejemplo:

Para el alfabeto Σ = {0,1}

0111 es una palabra sobre Σ

Cadena

- **Cadena vacía λ**: contiene 0 símbolos
- **Longitud de una Cadena** |w|: número de posiciones ocupadas por símbolos de Σ

  $\Sigma = \{0,1\}$, $w = 01010$, y $|w| = 5$
- **Potencia de un Alfabeto Σ***: conjunto de todas las cadenas de un alfabeto

  Σ^* se define como - $\Sigma^0 = \{\lambda\}$

  - $\Sigma^i = \bigcup^{\infty}_{i\geq 1}\Sigma^i$

  Σ^k cadenas de longitud k formadas por símbolos de Σ

Cadena

Operación de Concatenación:

- Definición: Sea "w" y "x" cadenas "xw" denota la concatenación
  - p.e. $x = 010$ y $w = 1110$, $xw = 0101110$
- Propiedades:

  $|u.v| = |u| + |v|$, $\forall u,v$ cadenas en Σ^*

  Asociativa: $u.(v.w) = (u.v).w$, $\forall u,v,w$ en Σ^*

  Elemento Neutro: $u.\lambda = \lambda.u = u$, $\forall u$ en Σ^*

Cadena

Operación de Iteración:

- Definición: la iteración n-ésima de una cadena (w) es la concatenación con ella misma n veces

  Si w en Σ^* entonces:

  $w^0 = \lambda$

  $w^{i+1} = w^i.w, \forall i \geq 1$

- Ejemplo:

  Si w = 01, entonces $w^3 = 010101$

Cadena

Operación de Inversión, Reverso:

- Definición:

  Si $w = w_1 \ldots w_n$ en Σ^*, entonces la cadena inversa de w es la cadena $w^{-1} = w_n \ldots w_1$.

- Ejemplo:

Si $w = 0101$, entonces $w^{-1} = 1010$

Lenguaje

4. **Lenguaje L**: conjunto de cadenas formadas por los símbolos de un mismo alfabeto Σ. Donde L es subconjunto de Σ*
   - El lenguaje Σ* esta formado por todas las posibles cadenas de un alfabeto
   - Son lenguajes para cualquier alfabeto Σ:
     - Lenguaje vacío Φ
     - Lenguaje de la cadena vacía {λ}
   - **Notación**:
     - Mayúsculas para Lenguajes: L,M,N,…

Lenguaje

- Ejemplos: $\Sigma = \{a,b\}$

  $L_1 = \{aa, ba, \lambda\}$

  $L_2 = \{a^i b^i \mid i = 0, 1, 2, \ldots\}$

  ó $L_2 = \{\lambda, ab, aabb, aaabbb, aaaabbbb, \ldots.\}$

Operaciones sobre Lenguaje:

- Unión, intersección, complemento (Conjunto)
- Concatenación, Iteración
- Clausura de Kleene
- Homomorfirsmo

Operaciones

Concatenación:

- Definición:

  Dado dos lenguaje L y M, la concatenación LM se define: **LM = { uv | u en L, v en M }**

- Propiedades (estructura de monoide):
  - Elemento Neutro: $\{\lambda\}L = L\{\lambda\} = L$
  - Asociativa: $L(MN) = (LM)N$
  - Elemento Nulo: $\Phi L = L\Phi = \Phi$

Operaciones

- **Iteración**: del lenguaje L se define de forma recursiva:

  $L^0 = \{\lambda\}$,

  $L^{i+1} = L^i L$

- **Clausura de Kleene** (L^*) del lenguaje L del alfabeto Σ se define como:

  $L^* = \cup_{i \geq 0} L^i$

  $L^+ = \cup_{i \geq 1} L^i$

  Propiedades:

  $L^+ = L^*$ si λ en L

  $L^+ = L^* - \{\lambda\}$ si λ en L

Operaciones

- **Homomorfismo**: caso particular de sustitución 1 a 1. Un mapeo de un Alfabeto a una cadena de un Lenguaje.

  $h : \Sigma \rightarrow \Delta^*$

  $h(x) = \{ h(x) \mid h(x) \text{ en } \Delta^* \text{ y } x \text{ en } \Sigma \}$

  Por definición:

  $h(\lambda) = \lambda$

  Por ejemplo: $h(0) = ab$ y $h(1) = b$, $\Sigma = \{0,1\}$, $\Delta = \{a,b\}$

  $h(001) = h(0).h(0).h(1) = ababb$

Ejemplos

a) $L_1 = \{0^i 1^i : i \geq 0\}$, $L_2 = \{1^j 0^j : j \geq 0\}$

- $L_1 L_2 = \{0^i 1^i\, 1^j 0^j : i, j \geq 0\}$

b) $L_3 = \{0, 01\}$

- L_3^{*} = Conjunto de palabras sobre {0,1} en donde un uno va siempre precedido de al menos un cero. L = {λ, 0, 01,00, 001, 010,…}
- L_3^{+} = Conjunto de palabras sobre {0,1} en donde un uno va siempre precedido de un cero menos la cadena vacía λ. L = {0, 01,00, 001, 010,…}

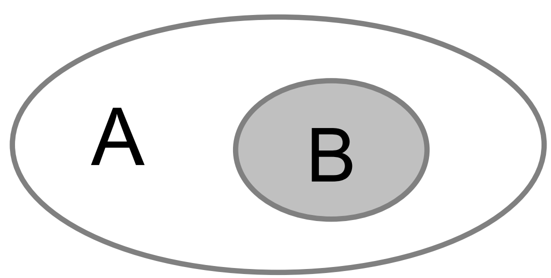
Problema

5. Problema:

- Problema de verificar pertenencia : Dado un elemento x verificar si pertenece al conjunto A
- Lenguaje = Conjunto de Cadenas
- Problema: verificar si una cadena w pertenece a un Lenguaje L
- La respuesta es si o no, positivo y negativo

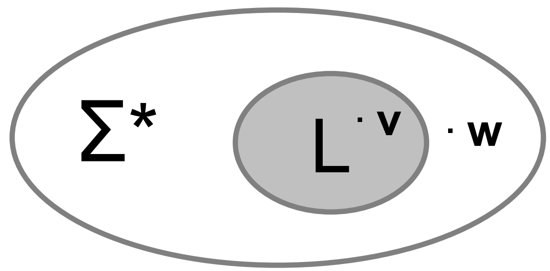
Problema

- Problema de decisión: función con salida binaria (si, no) aplicada a conjuntos.
- Define un conjunto:
  - A Conjunto de todas las posibles respuestas
  - B Conjunto que es subconjunto de A cuyos elementos son positivos (salida si)



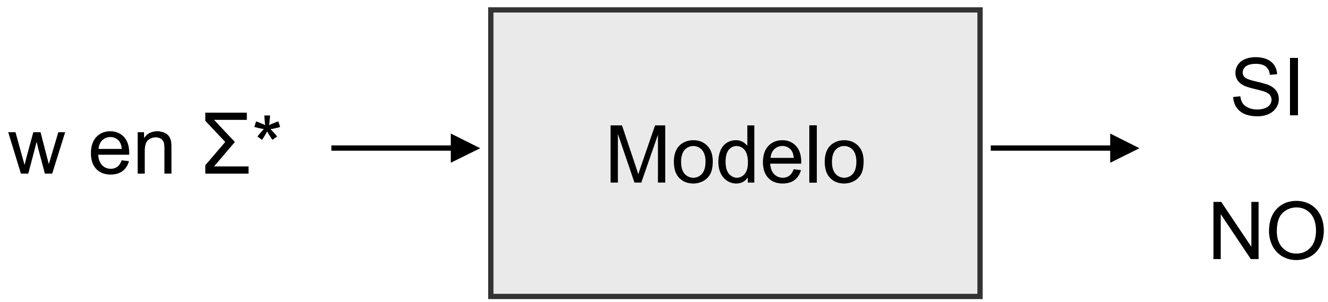
Problema

- Para el Lenguaje L formado por un Alfabeto Σ



- Por ejemplo:
  $\Sigma = \{0,1\}$, $L = \{0^i \mid i>0\}$ es decir $L = \{0,00,000, \ldots\}$ (B)
  $\Sigma^* = \{\lambda,0,1,00,01,10,11,000,001,010, \ldots\}$ (A)
  L es un subconjunto de Σ*, dado un w,v en Σ*
  w = 0010, ¿w pertenece a L?
  v = 00 ¿v pertenece a L?

Problema



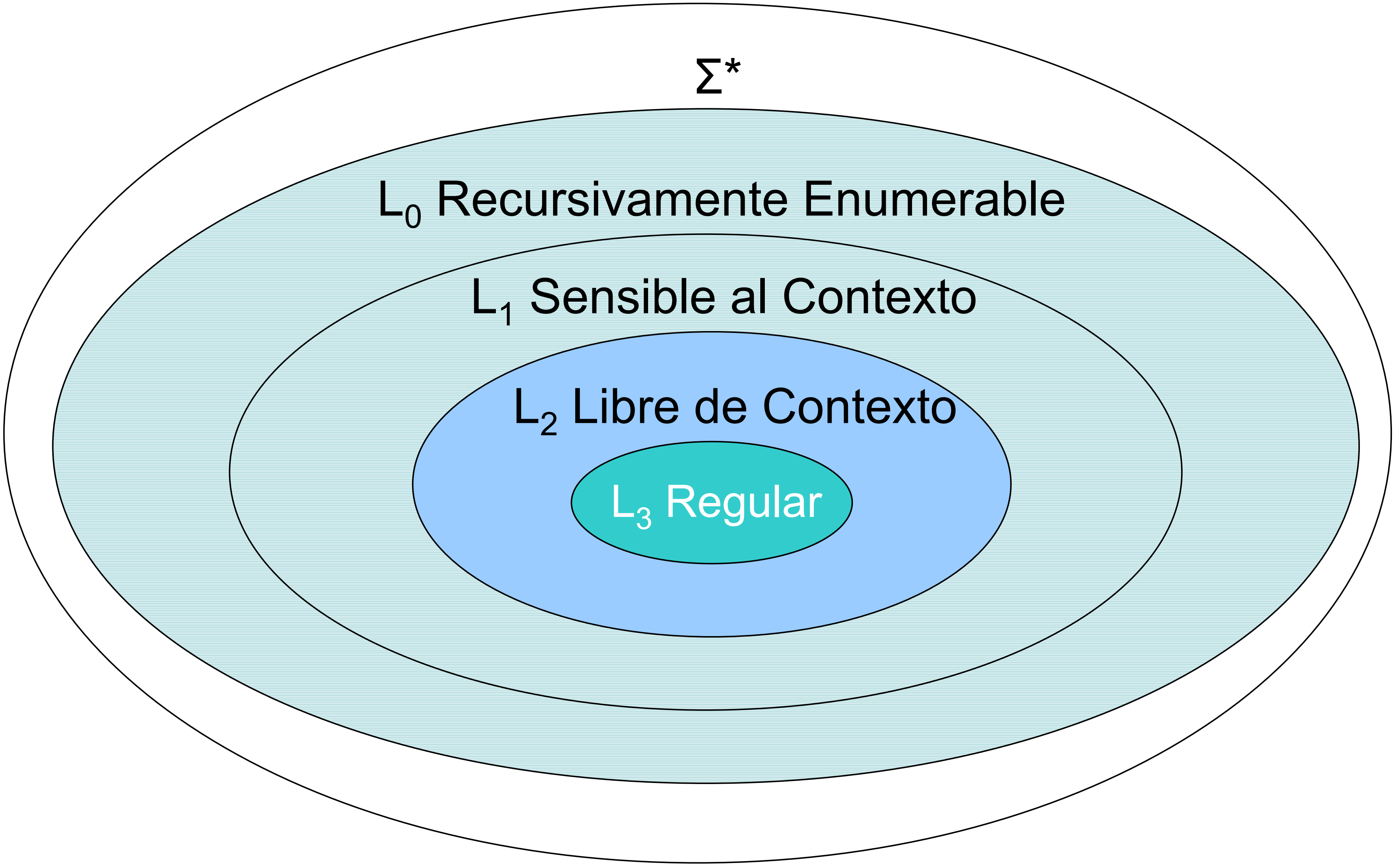
Definición del Lenguaje L con un Modelo formal

Jerarquía de Lenguajes

- **Jerarquía de Chomsky (1959):**

Tipo	**Lenguaje**	**Máquina**	**Gramática**
0	Recursivamente enumerable	Máquina de Turing	Sin restricciones
1	Dependiente del Contexto	Autómata linealmente acotado	$\alpha A\beta \rightarrow \alpha\gamma\beta$
2	Independiente del Contexto	Autómata de Pila	$A \rightarrow \gamma$
3	Regular	Autómata finito	$A \rightarrow aB$ $A \rightarrow a$

Lenguajes: $L_3 \leq L_2 \leq L_1 \leq L_0 \leq \Sigma^*$



Jerarquía de Lenguajes

Un lenguaje se dice que es de tipo i (i = 0, 1, 2, 3) si y solo si es generado por una gramática de tipo i. La clase o familia de lenguaje de tipo i se denota por L_i.

- Propiedad:
  $L_3 \leq L_2 \leq L_1 \leq L_0$

Máquina	**Gramática**
Reconoce, Verifica, Valida	Genera, Describe, Expresa

Conclusiones

- La Teoría de la Computación esta basada en definiciones matemáticas
- Los problemas en la Teoría de la Computación consisten en verificar la pertenencia de una cadena w a un Lenguaje L. Es equivalente a un problema de decisión: ¿w pertenece a L?
- Un Lenguaje es un conjunto de Cadenas formadas a partir de un Alfabeto.