Teoría de la Computación y Lenguajes Formales

Máquinas de Turing

Prof. Hilda Y. Contreras
Departamento de Computación
hyelitza@ula.ve
hildac.teoriadelacomputacion@gmail.com
UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

Máquinas de Turing
Contenido

- Introducción
- Historia e importancia
- Modelo básico de la MT
- Ejemplo
- Lenguajes tipo 0
- Variaciones de la MT
- Conclusiones

Máquinas de Turing
Introducción

Jerarquía de Chomsky

- Gramáticas
- “Poder generativo débil”
- Jerarquía implicativa (`tipo i incluye tipo i+1`)

Máquinas de Turing
Introducción

Tipo	Gramática	Lenguaje	Máquina
0	Irrestricta $\lambda_1, \lambda_2 \rightarrow \beta_1, \beta_2$	Recursivamente enumerables	Máquina de Turing
1	Dependiente del Contexto $x\lambda Z \rightarrow x\beta Z$	Dependiente del contexto	Autómatas linealmente acotados
2	Independiente del Contexto $A \rightarrow \beta$	Independiente del Contexto	Autómatas de Pila
3	Regulares $A \rightarrow aB; A \rightarrow a$	Regulares	Autómatas finitos

Máquinas de Turing
Historia

De la matemática a la computación:

- **Siglo XIX, D. Hilbert**

  Validación de fórmulas matemáticas
- **1931, K. Gödel**

  Teorema de la incompletitud
- **1936, A. Turing**

  Modelo de cualquier proposición posible

Máquinas de Turing
Historia

- Máquinas de Turing → Teoría Matemática de la Computación

- Tesis o hipótesis de Church-Turing

"Cualquier forma general de computación nos permitirá calcular únicamente las *funciones recursivas parciales*"

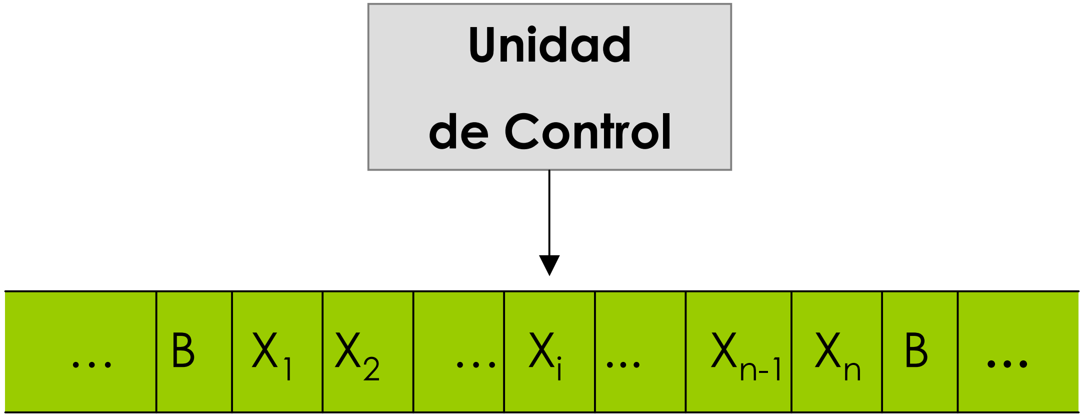
Máquinas de Turing
Importancia

- Modelo teórico
- Máquina simple, sencilla y precisa
- Generalidad
- Determinar características de los problemas
  - Decidible (existe un algoritmo)
  - Tratable (existe un algoritmo rápido)

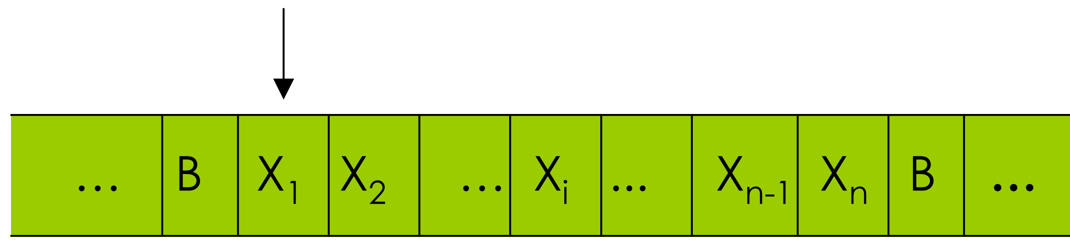
Máquinas de Turing
Modelo básico

Componentes:

- Unidad de Control (autómata finito)
- Cinta infinita



Máquinas de Turing
Modelo básico



- Cinta infinita
  - Infinita a ambos extremos
  - Dividida en casillas
  - Un símbolo por casilla, inicializada en B
  - Entrada w ubicada sobre la cinta infinita
  - Cabezal que indica posición actual. Inicia en el primer símbolo de la entrada.
  - Cabezal con movimiento secuencial infinidad de veces de izquierda a derecha
  - Leer/escribir en cada transición

UNIVERSIDAD
DE LOS ANDES

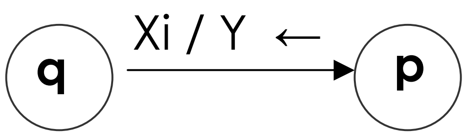
Máquinas de Turing
Modelo básico

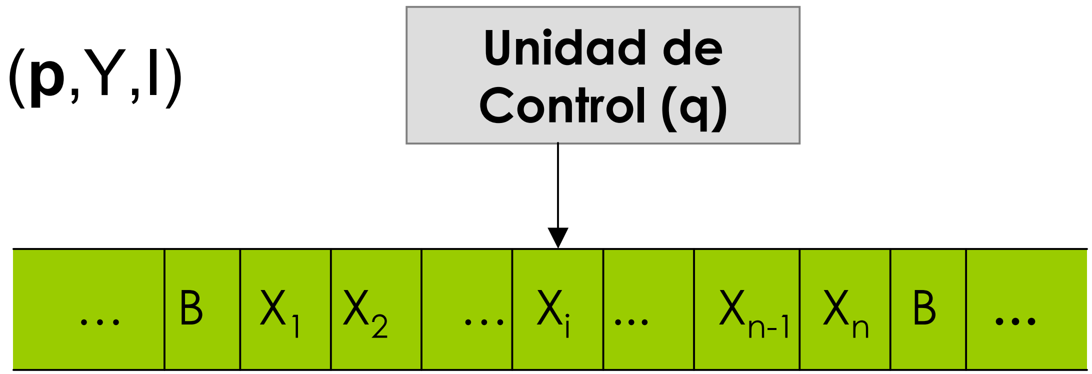
$$\mathbf{M} = (\mathbf{Q}, \Sigma, \Gamma, \delta, \mathbf{q_0}, \mathbf{B}, \mathbf{F})$$

- **Q**: conjunto de estados
- Σ: símbolos de entrada
- Γ: símbolos de la cinta. Γ contiene a Σ U B
- δ: Qx $\Gamma \rightarrow$ Qx Γx {D,I}
- $\mathbf{q_0}$: estado inicial
- **B**: símbolo espacio en blanco
- **F**: conjunto de estados de aceptación

Máquinas de Turing
Modelo básico

- **Transición** $\delta(\mathbf{q},X_i) = (\mathbf{p},Y,I)$





- **Entrada** (Σ^*)

  $X_1\ X_2 \dots X_{i-1}\ X_i\ X_{i+1}\ \dots\ X_n$

  Descripción instantánea: $X_1\ X_2 \dots X_{i-1}\ \mathbf{q}\ X_i\ X_{i+1}\ \dots\ X_n$

- **Movimiento** $\vdash$

  $X_1 \dots X_{i-1}\ \mathbf{q}\ X_i\ X_{i+1}\ \dots\ X_n \vdash X_1 \dots X_{i-2}\ \mathbf{p}\ X_{i-1}\ Y\ X_{i+1} \dots X_n$

- **Múltiples movimientos** $\vdash^*$

  $\mathbf{q}w \vdash^* \beta_1 \mathbf{p} \beta_2$

Máquinas de Turing
Ejemplo

- Diseñar una máquina de Turing que acepte el lenguaje:

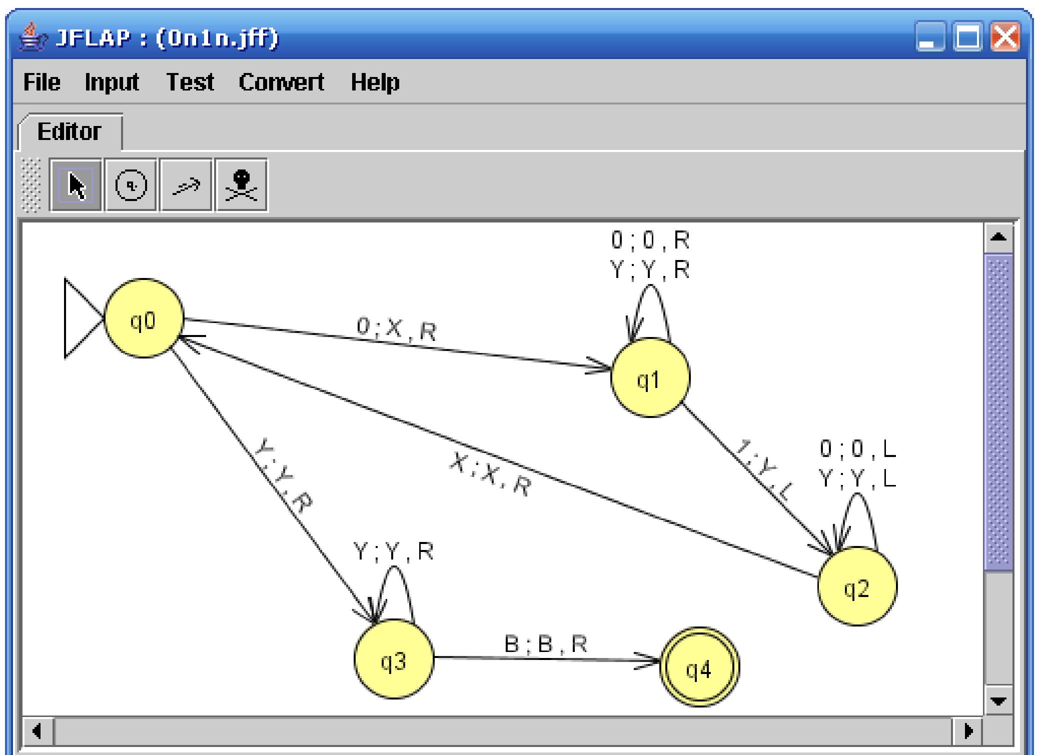
  $\mathbf{L = \{ 0^n 1^n \mid n \geq 1\}}$

Idea:

- Cambiar **0** por **X** y **1** por **Y** en una pasada
- Repetir hasta el final de la cadena de entrada
- Si hay $\mathbf{X^n Y^n}$ la máquina acepta
- $\Sigma = \{0,1\}$
- $\Gamma = \{0,1,X,Y,B\}$

Máquinas de Turing
Ejemplo

- La máquina de Turing que acepta el lenguaje: **$\{ 0^n 1^n \mid n \geq 1 \}$** (archivo 0n1n.jff)



UNIVERSIDAD
DE LOS ANDES

Máquinas de Turing

Ejemplo

	0	1	X	Y	B
$\rightarrow q_0$	(q_1,X,D)			(q_3,Y,D)	
q_1	$(q_1,0,D)$	(q_2,Y,I)		(q_1,Y,D)	
q_2	$(q_2,0,I)$		(q_0,X,D)	(q_2,Y,I)	
q_3				(q_3,Y,D)	(q_4,B,D)
$*q_4$					

para w = 01 se tiene $q_001 \vdash Xq_11 \vdash q_2XY \vdash Xq_0Y \vdash XYq_3B \vdash XYBq_4B$

¿Cuál es la secuencia de $\vdash$ para w= 0011 y w=0010 ?

Máquinas de Turing
Lenguaje tipo 0

Sea **M** = (**Q**, Σ, Γ, δ, $\mathbf{q_0}$, **B**, **F**) una Máquina de Turing

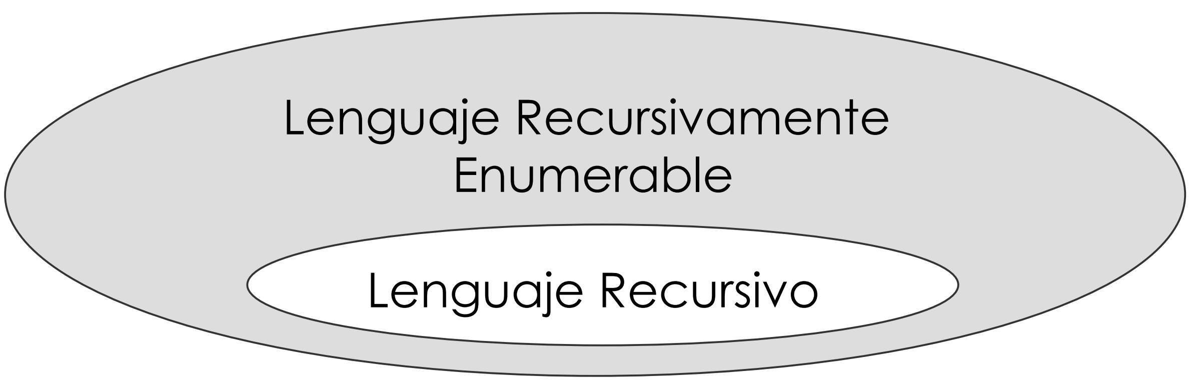
Lenguaje aceptado se define:

$$L(M) = \{ w \mid w \text{ en } \Sigma^{*},\ q_0 w \vdash^{*} \alpha_1 q \alpha_2,\ \alpha_1 \text{ y } \alpha_2 \text{ en } \Gamma^{*} \text{ y } q \text{ en } \mathbf{F} \}$$

L(M) es un lenguaje recursivamente enumerable

Máquinas de Turing
Lenguaje tipo 0

- Lenguaje **Recursivamente Enumerable**
  Existe una MT
- Lenguaje **Recursivo** (decidible = algoritmo)
  Existe una MT que siempre para



Máquinas de Turing
Utilidad

- **Aceptador** Lenguajes

  ¿w en L?
- **Generador** de Lenguajes

  01B0011B000111B…
- **Computador** de funciones matemáticas sobre enteros

  0^m10^n generar 0^{mxn}

Máquinas de Turing
Conclusiones

- MT es la máquina abstracta más **poderosa**
- MT consta de un **autómata finito** y una **cinta infinita**
- MT reconoce los lenguajes tipo 0 **recursivamente enumerables**
- Si MT se detiene para toda entrada, el **lenguaje es recursivo**

Jerarquía de Chomsky

Tipo	Lenguaje	Máquina	Gramática G = (V,T,P,S)
0	**Recursivamente enumerable**	**Máquina de Turing**	**Gramática sin restricciones** **$\alpha \rightarrow \beta$** (α, β en (V U T)*, α contiene una variables)
1	**Dependiente del Contexto**	**Autómata linealmente acotado**	***Gramática sensible al contexto*** **$\alpha \rightarrow \beta$** (α, β en (V U T)*, α contiene una variables, $\lvert\beta\rvert \geq \lvert\alpha\rvert$)
2	**Independiente del Contexto**	**Autómata de Pila**	***Gramática libre de contexto*** **$A \rightarrow \alpha$** (A en V y α en (V U T)*)
3	**Lenguaje Regular**	**Autómata finito**	***Gramática Regular*** **$A \rightarrow aB$** **$A \rightarrow a$** (A,B en V y a en T)

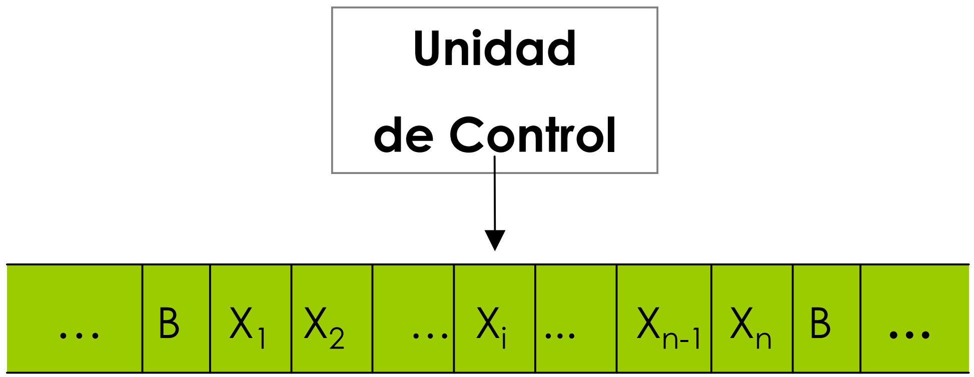
UNIVERSIDAD
DE LOS ANDES

Extensiones de MT y Lenguajes Recursivamente Enumerable

- Técnicas de construcción de la MT:
  - Memoria en la unidad de control
  - Multipistas
  - Multicintas
- MT generadora de lenguajes y MT calculadora de funciones
- Lenguajes recursivamente enumerables
- Lenguajes tipo 1
- Gramáticas sin restricciones

UNIVERSIDAD
DE LOS ANDES

Modelo básico de MT



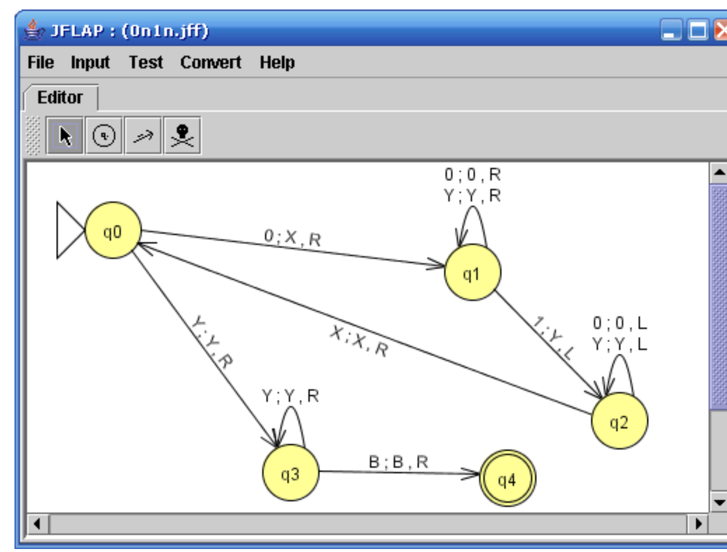
M = (**Q**, Σ, Γ, δ, $\mathbf{q_0}$, **B**, **F**)

δ: Qx Γ → Qx Γx {D,I}

$\delta(q,X_i) = (p,Y_j,D)$

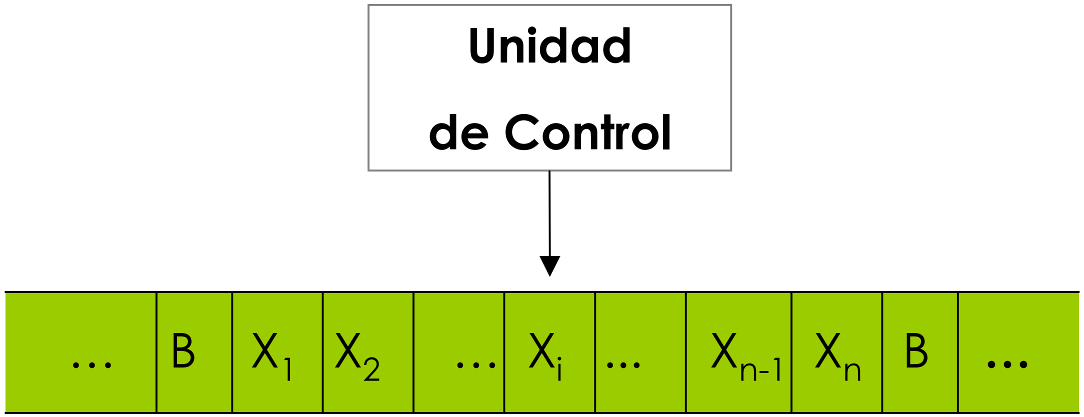
L= { 0^n1^n | n ≥ 1}

JFLAP: 0n1n.jff



UNIVERSIDAD
DE LOS ANDES

Técnicas de construcción de MT



- Extensiones del modelo básico (una cinta, una pista, sin memoria en el control)
- Ninguna técnica aumenta el poder de la MT
- Técnicas facilitan la programación, disminuye el número de transiciones, mejora la comprensión del algoritmo, etc.

UNIVERSIDAD
DE LOS ANDES

Almacenamiento en la UC

Unidad

de Control

0

$M = (Q', \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$

- Utiliza el estado de control para almacenar una cantidad **finita** de información.
- Conjunto Q de estados cambia

$Q = \{q_0, q_1\}$ y $\Delta = \{0,1\}$ (Δ información finita)

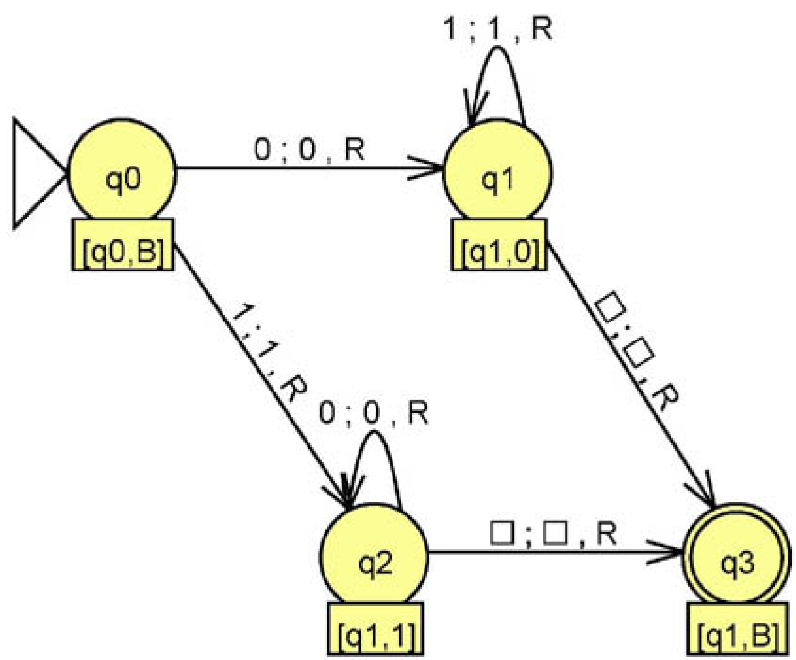
$Q' = Q_x\Delta = \{[q_0,0], [q_0,1], [q_1,0], [q_1,1]\}$

UNIVERSIDAD
DE LOS ANDES

Almacenamiento en la UC

Por ejemplo: $L = \{ 01^* + 10^* \}$

- Almacenar el primer símbolo leído
- $\Delta = \{0,1,B\}$
- JFLAP: 01a10a.jff



$\delta([q_0,B],0) = ([q_1,0],0,D)$
$\delta([q_1,0],1) = ([q_1,0],1,D)$
$\delta([q_1,0],B) = ([q_1,B],B,D)$
$\delta([q_0,B],1) = ([q_1,1],1,D)$
$\delta([q_1,1],0) = ([q_1,1],0,D)$
$\delta([q_1,1],B) = ([q_1,B],B,D)$

UNIVERSIDAD
DE LOS ANDES

MT con multiples pistas

- Un solo cabezal. La cinta está dividida en un número finito de k pistas, la función de transición tiene la siguiente forma:

$$\delta: Q \times \Gamma^k \rightarrow Q \times \Gamma^k \times \{D,I\}$$

Unidad de Control

$W_1 = [X_1,B,\ldots,B],[X_2,B,\ldots,B],\ldots\ [X_n,B,\ldots,B]$

$$\boldsymbol{\delta(q,[X_i,B,\ldots,B]) = (p,[Y_i,B,\ldots,B],D)}$$

…	B	X_1	X_2	…	X_i	…	X_{n-1}	X_n	B	…	Pista 1
…				…		…				…	…
…	B	B	B	…	B	…	B	B	B	…	Pista k

MT con multiples pistas

- Pistas múltiples (*multipistas*)
- La cinta almacena en cada celda un vector ***k*** dimensional de símbolos a los que se accede simultáneamente**.**

Un *movimiento* de la máquina implica:

- (a) Cambiar el estado del control finito
- (b) Escribir **k** símbolos en la celda analizada
- (c) Mover el cabezal de la cinta a la izquierda o a la derecha.

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

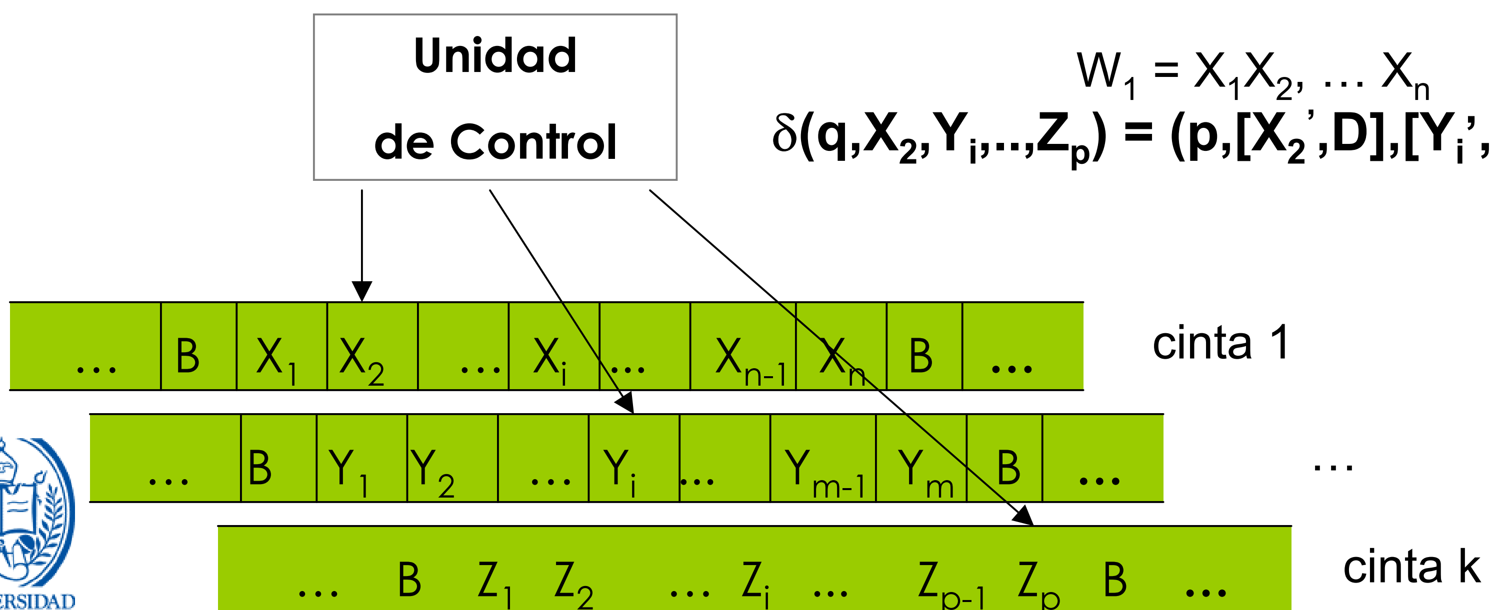
MT con mútiples cintas

- Hay k cintas diferentes y k cabezales. La función de transición para máquinas de Turing con n cintas:

$$\delta: Q \times \Gamma^k \rightarrow Q \times \Gamma^k \times \{D,I,E\}^k$$

$$W_1 = X_1X_2, \ldots X_n$$

$$\boldsymbol{\delta(q,X_2,Y_i,..,Z_p) = (p,[X_2',D],[Y_i',I]\ldots,[B,E])}$$



UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

MT con mútiples cintas

- Un movimiento de la máquina *multicinta* depende del estado del control finito y de los símbolos analizados por cada cabezal de cada cinta
- Un movimiento de la máquina *multicinta* implica:

(a) Cambiar el estado del control finito

(b) Escribir un símbolo en cada una de las celdas analizadas

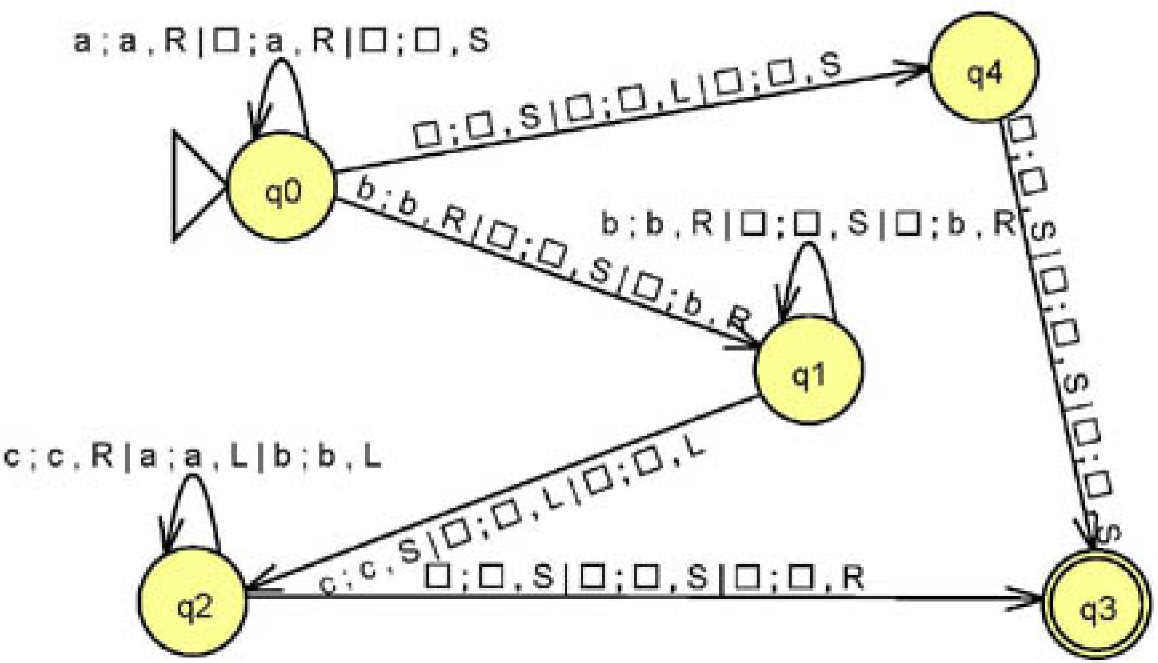
(c) Mover cada cabezal de cinta a la izquierda o a la derecha independientemente

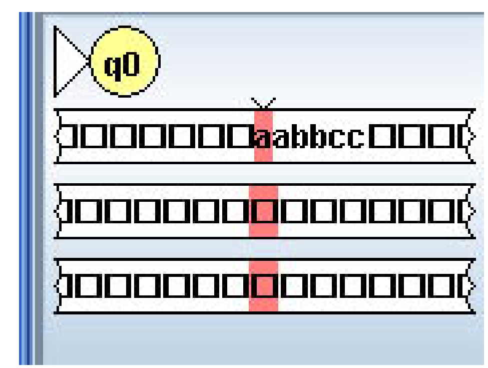
UNIVERSIDAD
DE LOS ANDES

MT con mútiples cintas

- Por ejemplo: $L = \{ a^n b^n c^n \mid n \geq 0 \}$

JFLAP: [turingAnBnCnMulti.jff]





UNIVERSIDAD
DE LOS ANDES

MT calculadora

- Calcula funciones f: $\Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$, es decir $f(w) = v$, donde w en Σ^* y v en Γ^*
- $q_0w \vdash^* q_fv$, donde $v = f(w)$
- Uso de notación "unaria" para codificar los valores del dominio y el rango.

  $X = 0^x$, p.e. $3 = 0^3 = 000$
- No tiene estados de aceptación

UNIVERSIDAD
DE LOS ANDES

MT calculadora

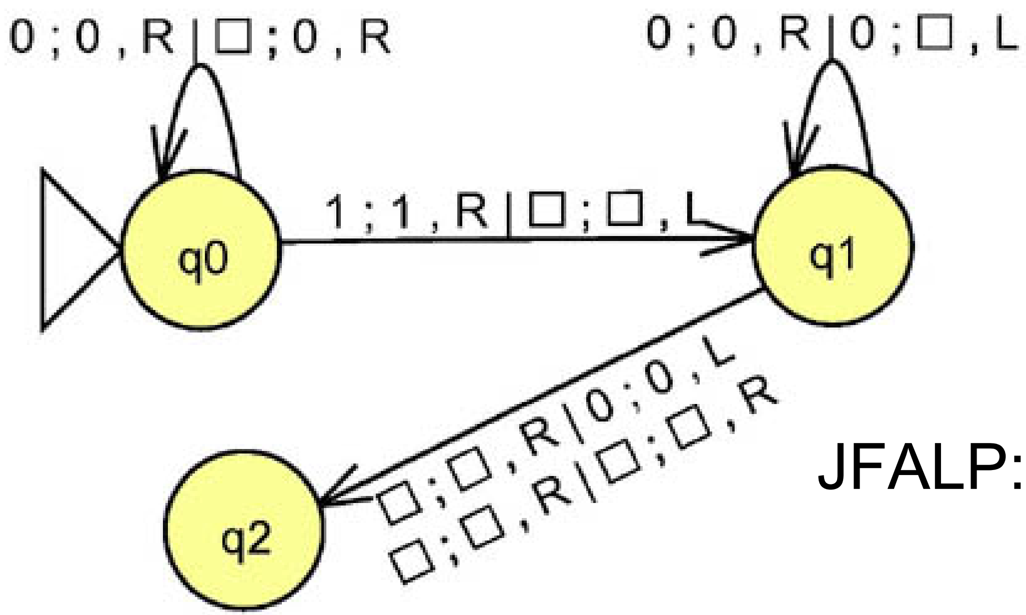
- Por ejemplo: sustracción propia

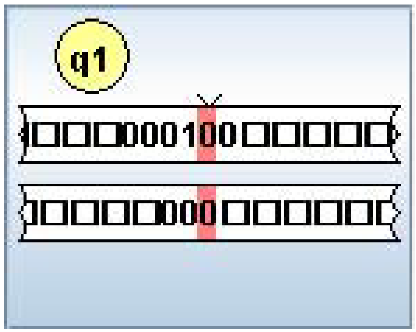
$$\mathbf{m - n} \begin{cases} m\text{-}n & \text{si } m \geq n \\ 0 & \text{si } m < n \end{cases}$$

p.e: operandos 3 y 2 para la operación 3 -2

Entrada = 000100

Salida = 0





JFALP: [calculam-nMulti.jff]

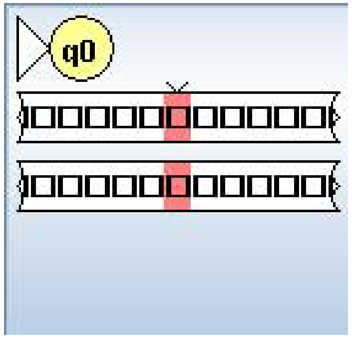
UNIVERS
DE LOS A

MT generadora de lenguajes

- MT no necesita cadena de entrada
- MT comienza a operar con la cinta en blanco en el estado inicial q_0.
- Cada vez que MT retorna al estado inicial q_0, hay una cadena w en L escrita sobre la cinta (salida de solo escritura).
- Todas las cadenas de L son, eventualmente, generadas por M.

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

MT generadora de lenguajes



Por ejemplo: L = { 0^{2n} | n > 0 }

MT de 2 cintas:

δ(q0,B,B) = (q1,(0,I),(#,D)) // inicio de la cadena salida

δ(q1,0,B) = (q1,(0,I),(B,E)) // busca inicio del contador n

δ(q1,B,B) = (q2,(B,D),(B,E)) // busca inicio del contador n

δ(q2,0,B) = (q3,(0,E),(0,D)) // coloca cinda 2 el 0 impar

δ(q3,0,B) = (q2,(0,D),(0,D)) // coloca cinda 2 el 0 par

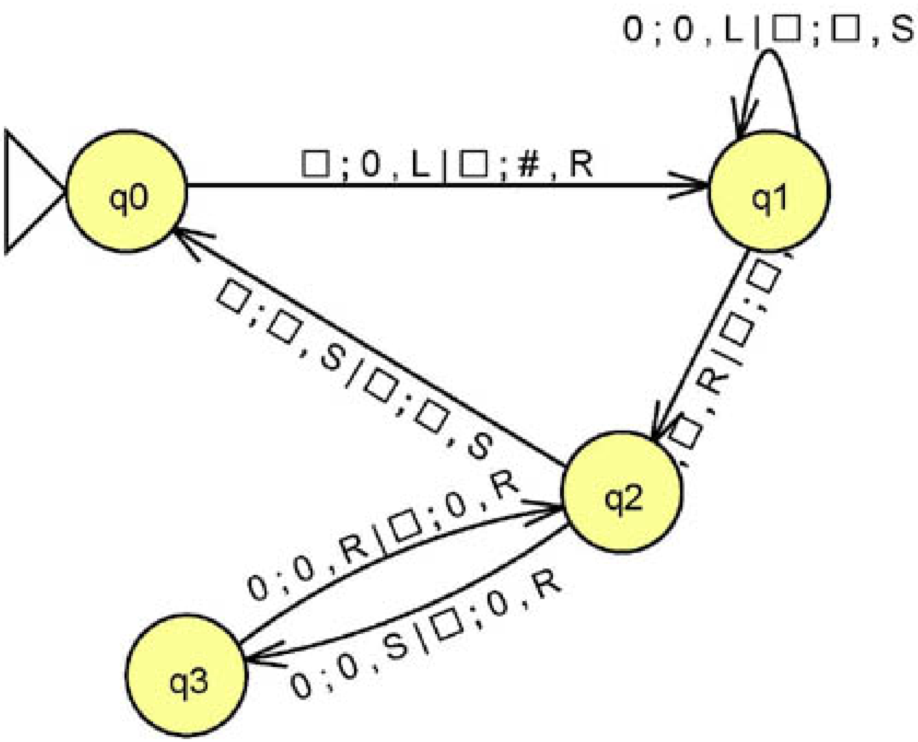
δ(q2,B,B) = (q0,(B,E),(B,E)) // fin del contador n, próxima cadena

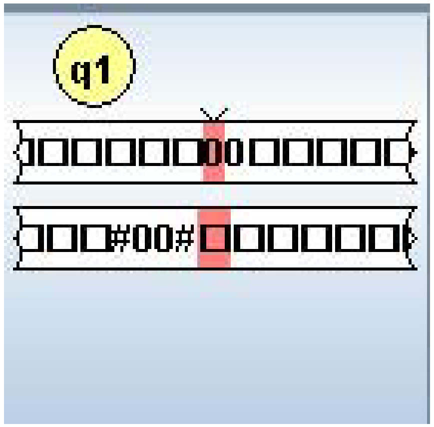
UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

MT generadora de lenguajes

Por ejemplo: L = { 0^{2n} | n > 0 }

JFLAP: [genera02nMulti.jff]

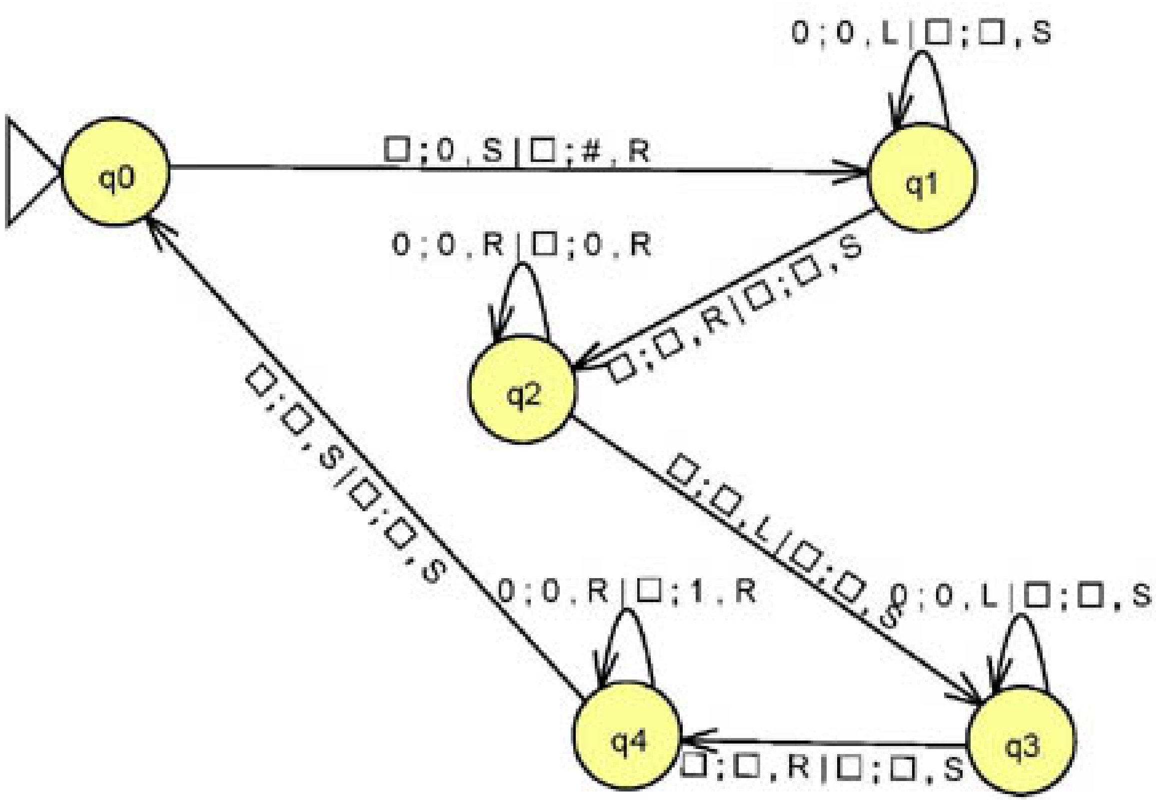


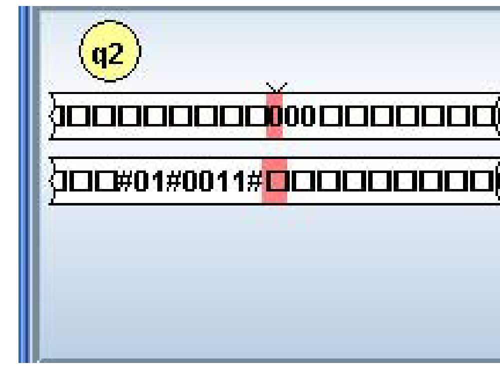


UNIVERSIDAD
DE LOS ANDES

MT generadora de lenguajes

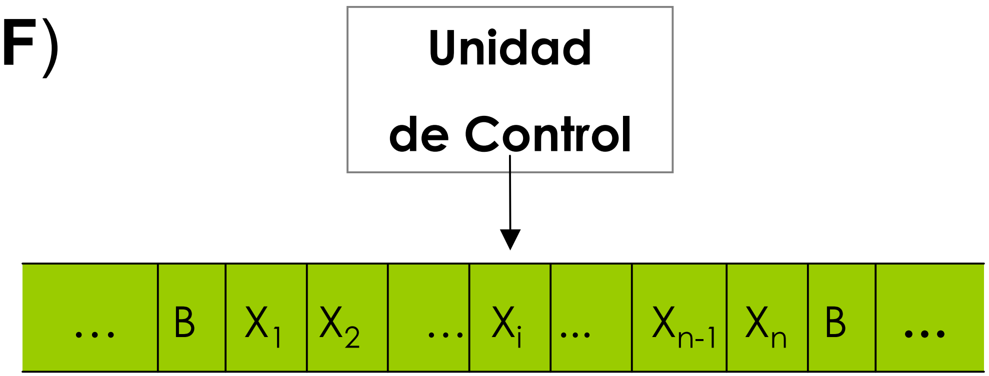
Por ejemplo: $L = \{ 0^n 1^n \mid n > 0 \}$





MT No determinista

$\mathbf{M} = (\mathbf{Q}, \Sigma, \Gamma, \delta, \mathbf{q_0}, \mathbf{B}, \mathbf{F})$



$\delta: Q x\ \Gamma \rightarrow (Q x\ \Gamma x\ \{D,I\})^*$

$\delta(q,X_i) = \{\ (p,Y_i,D),\ (r,Z_i,D),\ldots,(q,X_i,I)\ \}$

- *El indeterminismo* de MT se refiere a las opciones que la máquina pueda tener en cualquier configuración por la función δ
- M acepta *w* si existe un camino desde q_0 hasta un estado final

UNIVERSIDAD
DE LOS ANDES

Equivalencias de MT

Teorema: p*ara cualquier máquina de Turing* M_1 *con k cintas existe otra equivalente* M_2 *con una sola cinta*

Teorema: p*ara cualquier máquina de Turing* M_1 *no determinista existe otra equivalente* M_2 *determinista*

Teorema: p*ara cualquier máquina de Turing* M_1 *con cinta infinita en ambos sentidos existe otra equivalente* M_2 *con cinta limitada por la izquierda*

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

Lenguajes recursivamente enumerables

Lenguaje recursivamente enumerable: si existe una máquina de Turing M tal que L(M) = L. Define la clase *L*r.e.

Lenguaje recursivo: si existe una máquina de Turing M tal que L(M)=L y M se detiene ante cualquier entrada. Define la clase *L*rec

***L*rec es subconjunto de *L*r.e**

Una función es *computable* si puede ser calculada por una máquina de Turing.

UNIVERSIDAD
DE LOS ANDES

Propiedades de clausura

Propiedad	LR	LLC	LRE
U (unión)	S	S	S
∩ (intersección)	S	N	S
complemento	S	N	N
concatenación	S	S	S
∩ LR	S	S	S

UNIVERSIDAD
DE LOS ANDES

Propiedades de clausura

Propiedad	LR	LLC	LRE
Kleene-clausura	S	S	S
Reflejo	S	S	S
Morfismo	S	S	S
Morfismo^{-1}	S	S	S
Diferencia	S	N	S

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

Algoritmos de decisión

Problemas	LR	LLC	LRE
Equidad	D	N	N
Inclusión	D	N	N
Membresía	D	D	N
Vacuidad	D	D	N
Finitud	D	D	N

UNIVERSIDAD
DE LOS ANDES

Jerarquía de Chomsky

Tipo	Lenguaje	Máquina	Gramática G = (V,T,P,S)
0	**Recursivamente enumerable**	**Máquina de Turing**	**Gramática sin restricciones** **$\alpha \rightarrow \beta$** (α, β en (V U T)*, α contiene una variables)
1	**Dependiente del Contexto**	**Autómata linealmente acotado**	***Gramática sensible al contexto*** **$\alpha \rightarrow \beta$** (α, β en (V U T)*, α contiene una variables, $\lvert\beta\rvert \geq \lvert\alpha\rvert$)
2	**Independiente del Contexto**	**Autómata de Pila**	***Gramática libre de contexto*** **$A \rightarrow \alpha$** (A en V y α en (V U T)*)
3	**Lenguaje Regular**	**Autómata finito**	***Gramática Regular*** **$A \rightarrow aB$** **$A \rightarrow a$** (A,B en V y a en T)

UNIVERSIDAD
DE LOS ANDES

Lenguajes sensibles al contexto

Gramáticas sensibles al contexto

- Una gramática $G = (V,T,P,S)$ es una gramática sensible de contexto si todas las producciones son de la forma

$$\alpha \rightarrow \beta$$

- donde α, β en $(V+T)^*$ y $|\alpha| \leq |\beta|$, α contiene al menos una variable V

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

Lenguajes sensibles al contexto

Gramáticas sensibles al contexto

Por ejemplo: $L = \{ a^n b^n c^n \mid n > 0 \}$

$S \rightarrow A_0BCS_1 \mid A_0BC$

$S_1 \rightarrow ABCS_1 \mid ABC$

$BA \rightarrow AB$

$CA \rightarrow AC$

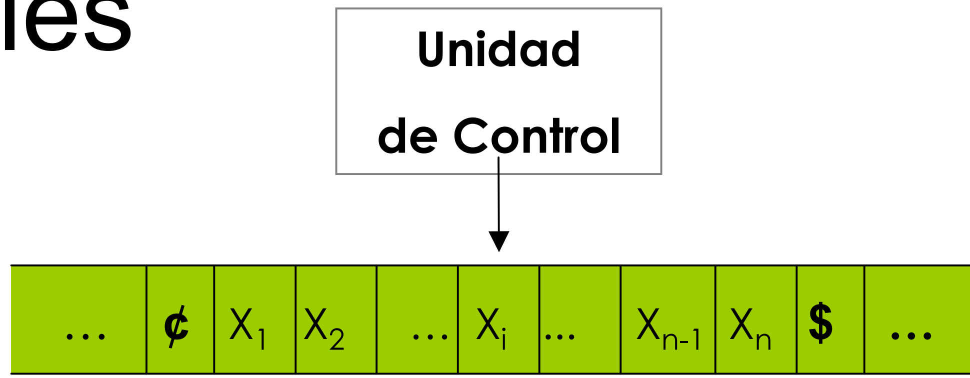
$CB \rightarrow BC$

$A_0 \rightarrow a$, $aA \rightarrow aa$, $aB \rightarrow ab$

$bB \rightarrow bb$, $bC \rightarrow bc$, $cC \rightarrow cc$

UNIVERSIDAD
DE LOS ANDES

Lenguajes sensibles al contexto



Autómatas linealmente acotadas

Un *autómata de memoria limitada linealmente* (ALL) es una máquina de Turing no determinista monocinta que satisface las siguientes condiciones:

1. El alfabeto de entrada incluye los limitadores ¢ (izquierda) y $ (derecha)
2. El ALL no mueve el cabezal de la cinta fuera de los limitadores ni escribe sobre ellos

<u>Teorema</u>: *L* es un lenguaje sensible al contexto (de tipo 1) sii *L* es aceptado por un ALL

UNIVERSIDAD
DE LOS ANDES

Gramáticas sin restricciones

- Una gramática G = (V,T,P,S) es una gramática de tipo 0 (irrestricta) si todas las producciones son de la forma

$$\alpha \rightarrow \beta$$

- donde α en $(V+T)^+$, β en $(V+T)^*$

Teorema: *L* es un lenguaje recursivamente enumerable sii *L*=L(G) donde G es de tipo 0.

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

Gramática irrestricta

Gramáticas irrestricta

Por ejemplo: $L = \{ ww \mid w \text{ en } (a+b)^* \}$

$S \to FM$

$F \to FaA \mid FbB$

$Aa \to aA$, $Ab \to bA$, $Ba \to aB$, $Bb \to bB$

$AM \to Ma$, $BM \to Mb$

$F \to \lambda$, $M \to \lambda$

UNIVERSIDAD
DE LOS ANDES