

# RECTIFICACIÓN PROYECTIVA PLANA DE IMÁGENES FOTOGRAFICAS DIGITALES

Jáuregui, Manuel      Jáuregui, Luis  
Chacón, Leira,      Vilchez, José

**Resumen:** Una fotografía desde el punto de vista de la geometría proyectiva es una proyección central del terreno sobre el plano del negativo. La formación de la imagen se asume que tiene lugar por intermedio de líneas rectas que partiendo desde el objeto pasan a través de un punto común (centro de proyección), el cual corresponde con una posición dentro del lente de la cámara, y continúan hasta el plano del negativo. La rectificación proyectiva plana consiste en la proyección de puntos desde un plano a otro plano, mediante líneas proyectivas que atraviesan un centro de proyección. Este tipo de rectificación es de sencilla aplicación, se utiliza en zonas de relieve plano, no requiriéndose el Modelo Digital de Elevación del Terreno (MDET) en el caso de fotografías aéreas. Su aplicación más importante es la producción de fotoplanos digitales de la superficie del terreno, como sustitutos de los planos lineales convencionales. En la actualidad, la mayoría de los programas de tratamiento digital de fotografías realizan rectificación proyectiva plana de forma gráfica directamente sobre el monitor, ajustando la imagen visualmente en forma aproximada, sin basarse en puntos de control terrestre. En este artículo se presenta un procedimiento para la rectificación proyectiva plana de una imagen fotográfica aérea, haciendo uso de puntos de control terrestre, y se muestra un ejemplo de aplicación.

**Palabras clave:** Fotogrametría digital/ Transformación proyectiva plana/ Rectificación digital/ Proyección central/ Fotoplanos digitales.

## FLAT PROJECTIVE RECTIFICATION OF DIGITAL PHOTOGRAPHIC IMAGES

**Abstract:** From the point of view of the projective geometry, a photograph is a central projection of the terrain surface onto the negative plane. The image is assumed to be created by means of straight lines starting in the object surface, crossing through a common point, named central point, which is somewhere inside the camera lens, and finally intersecting the negative plane. The projective rectification is based in the projection of points from a reference plane to another plane, through projective lines crossing a projection center. This type of rectification can be used in flat areas, therefore it is not required to have the corresponding Digital Terrain Elevation Model (DTEM) when using aerial photographs. The most important application is the production of digital photomaps of the terrain surface, in place of the conventional lineal maps. Nowadays most of the software for digital image processing perform the projective transformation in a graphical way, directly on the monitor screen. The image is visually adjusted without using control points. This paper shows a procedure for performing the digital projective rectification of an aerial photograph using terrestrial control points, and an example is shown in its application.

**Key words:** Digital Photogrammetry/ Projective Transformation/ Digital Rectification/ Central Projection/ Digital Photomaps.

### I. INTRODUCCIÓN

La rectificación proyectiva plana establece la relación que permite la proyección de puntos entre dos planos no paralelos entre sí. Mediante el uso de fotografías aéreas y su procesamiento digital aplicando la transformación proyectiva, es posible la generación en forma rápida y simple de fotoplanos de la superficie del terreno. Un

fotoplano es una representación fotográfica de la superficie del terreno realizada a partir de fotografías aéreas verticales del mismo, equivalente a un plano topográfico en cuanto a sus características geométricas [4]. A diferencia de los planos lineales, el fotoplano muestra toda la información de la superficie del terreno en forma fotográfica. Este tipo de representación es muy favorable en aquellas zonas donde no se tienen o existen escasos

Manuscrito finalizado el 2007/05/21, recibido el 2007/04/17, en su forma final (aceptado) el 2007/05/23. Los autores del presente artículo desempeñan sus actividades en el Instituto de Fotogrametría, Facultad de Ingeniería, Universidad de los Andes, Mérida, Venezuela, fax (0274) 2403012, correos electrónicos manuel@ula.ve, iluis@ula.ve, leirac@ula.ve y vilchez@ula.ve, respectivamente.

elementos culturales (carreteras, edificaciones, obras de ingeniería, etc.), ya que los aspectos naturales (vegetación, pantanos, etc.) son más difíciles de representar sobre los mapas lineales por su variedad y la indefinición de sus límites. Adicionalmente, el fotoplano permite la extracción de información de las características del terreno a partir de la fotointerpretación de la imagen fotográfica. La importancia de este producto cartográfico es que grandes extensiones de nuestro país corresponden a zonas de topografía plana, escasamente desarrolladas, donde la solución cartográfica más eficiente está en la elaboración de fotoplanos digitales.

En este artículo se presenta un procedimiento que permite la rectificación proyectiva plana de una imagen fotográfica aérea, con el fin de obtener la base para la elaboración de fotoplanos digitales de la superficie del terreno.

## II. DESARROLLO

### 1. La rectificación proyectiva plana

Una imagen fotográfica es una representación de la superficie del terreno mediante una proyección central sobre el plano del negativo de la cámara. Al comparar una fotografía aérea vertical con el plano topográfico de la misma zona, observamos que en la imagen fotográfica existen desplazamientos debidos al relieve topográfico y a la inclinación de la cámara en el momento de la toma fotográfica.

Si la imagen fotográfica corresponde a una zona de relieve plano o aproximadamente plano, su proyección sobre un plano topográfico requiere de una rectificación proyectiva para corregir las deformaciones de la imagen fotográfica por efecto de escala, e inclinación de la cámara fotográfica. Para fines proyectivos, un terreno puede considerarse plano cuando el desplazamiento por relieve sea menor a 0,2 mm a la escala de representación de la fotografía. En el caso de zonas no planas, la imagen presenta desplazamientos por efecto del relieve que se corrigen a través del proceso de ortorectificación, el cual se basa en una transformación rigurosa (ecuaciones de colinealidad) y en el Modelo Digital de Elevación del Terreno (MDET)[2,3].

En la Figura 1, se puede observar que los puntos A, B, C, D del plano topográfico se proyectan sobre el plano imagen de la fotografía no inclinada en las posiciones a, b, c, d, y en el plano imagen de la fotografía inclinada en las posiciones a', b', c', d'. El modelo matemático para rectificar la imagen de la fotografía inclinada en relación al plano topográfico es la transformación proyectiva, la cual proyecta un plano sobre otro plano no paralelo.

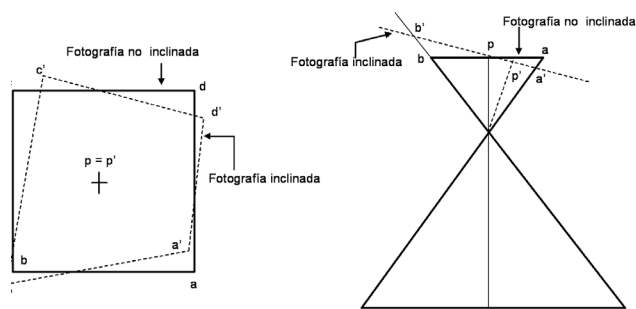


Figura 1. El desplazamiento por inclinación de la cámara.

Esta transformación se expresa mediante las ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} X &= \frac{h_{11}x + h_{12}y + h_{13}}{h_{31}x + h_{32}y + h_{33}} \\ Y &= \frac{h_{21}x + h_{22}y + h_{23}}{h_{31}x + h_{32}y + h_{33}} \end{aligned} \quad (1)$$

Donde,

X,Y: son las coordenadas de los puntos en el plano topográfico o terreno

x,y: son las coordenadas de los puntos en la imagen fotográfica

$h_{ij}$ : son los parámetros de transformación desde el plano de la fotografía al plano topográfico o terreno ( $i, j=1,2,3$ ).

Dividiendo las ecuaciones 1 entre  $h_{33}$ , se tiene

$$\begin{aligned} X &= \frac{g_{11}x + g_{12}y + g_{13}}{g_{31}x + g_{32}y + 1} \\ Y &= \frac{g_{21}x + g_{22}y + g_{23}}{g_{31}x + g_{32}y + 1} \end{aligned} \quad (2)$$

Operando se tiene:

$$\begin{aligned} X(g_{31}x + g_{32}y + 1) &= g_{11}x + g_{12}y + g_{13} \\ Y(g_{31}x + g_{32}y + 1) &= g_{21}x + g_{22}y + g_{23} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} X &= g_{11}x + g_{12}y + g_{13} & g_{31}Xx & g_{32}Xy \\ Y &= g_{21}x + g_{22}y + g_{23} & g_{31}Yx & g_{32}Yy \end{aligned} \quad (4)$$

Lo que se puede expresar como:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 & 0 & 0 & 0 & Xx & Xy \\ 0 & 0 & 0 & x & y & 1 & Yx & Yy \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} g_{11} \\ g_{12} \\ g_{13} \\ g_{21} \\ g_{22} \\ g_{23} \\ g_{31} \\ g_{32} \end{bmatrix} \quad (5)$$

Para determinar los parámetros  $g_{ij}$  de la Ecuación 5, se requiere un mínimo de cuatro puntos de control, aunque idealmente debería disponerse de mayor número de puntos para resolverla mediante mínimos cuadrados, con el fin de obtener información de exactitud de la transformación y de los parámetros incógnitas. Una vez conocidos los parámetros de la transformación proyectiva, se puede proyectar los detalles de la fotografía inclinada al plano topográfico, mediante la Ecuación 5.

## 2. Procedimiento

En el esquema mostrado en la Figura 2 se especifican las fases a seguir para la elaboración de una imagen rectificada.

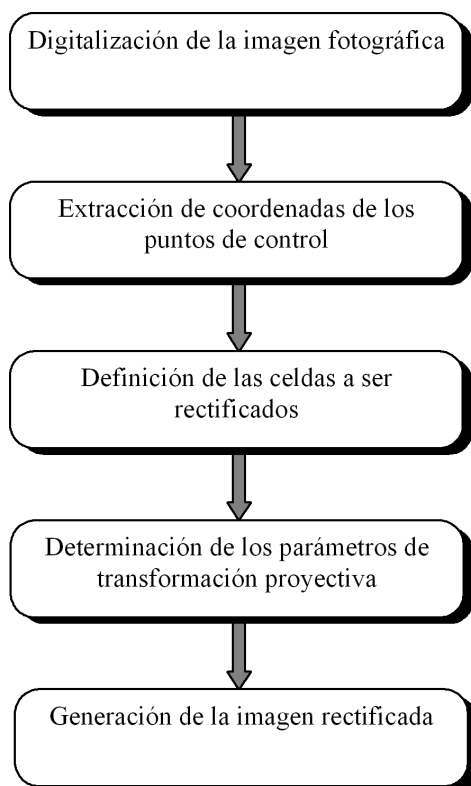


Figura 2. Esquema del procedimiento

A continuación se describe cada una de estas fases.

### 2.1 Digitalización de la imagen fotográfica.

El procedimiento de transformación proyectiva planteado en este artículo se basa en imágenes digitales, ya que el proceso de rectificación prevé el remuestreo de los píxeles de la imagen original para crear la imagen rectificada. Si se dispone de imágenes analógicas (como es el caso de las fotografías aéreas convencionales tomadas sobre nuestro país), es necesario convertirlas a un formato digital.

En esta fase es necesario tener en cuenta dos aspectos, los errores del dispositivo de digitalización y la resolución de la imagen. En la imagen digital pueden estar presentes errores sistemáticos como la falta de perpendicularidad entre los ejes de coordenadas de referencia y/o la no coincidencia de los factores de escala de estos ejes de referencia del dispositivo empleado (escáner). Estos errores se corrigen con la aplicación de la transformación proyectiva.

En la digitalización de una imagen fotográfica pueden usarse la resolución óptica o la resolución interpolada. Sin embargo, para fines de rectificación de la imagen debe usarse la primera, ya que con la resolución interpolada se remuestran las tonalidades de los píxeles, produciéndose una pérdida de la información geométrica, restringiendo su uso para propósitos de visualización.

La resolución de la imagen rectificada depende de la relación entre su escala de representación y la escala de la imagen original. Esta se expresa en ppp (puntos por pulgada).

### 2.2 Extracción de las coordenadas de los puntos de control

En todo proceso de rectificación digital se requiere disponer de una red de puntos de control, identificables tanto en la imagen fotográfica digital como en el terreno, y cuyas coordenadas estén perfectamente definidas en el sistema de coordenadas de la imagen (fila y columna expresado en píxeles) y en el sistema de coordenadas del terreno (en este caso puede ser un sistema de coordenadas arbitrario o coordenadas REGVEN).

Las coordenadas de los puntos de control pueden obtenerse por lectura directa de mapas existentes a escala adecuada de la zona o por determinación de los puntos mediante la triangulación fotogramétrica, los levantamientos topográficos o por el Sistema de Posicionamiento Global (GPS).

### 2.3 Definición de las celdas a ser rectificadas

En un terreno aproximadamente plano pueden presentarse zonas donde la pendiente varía ligeramente. Por lo tanto, a fin de obtener buenos resultados con la transformación proyectiva éste debe dividirse en celdas cuya extensión corresponda con zonas de pendiente uniforme, y de dimensiones medianas. La definición de las celdas se efectúa a partir de una red de puntos vértices (cuatro vértices por celda) debidamente seleccionados (Figura 3). Posteriormente, estas celdas rectificadas pueden ser ensambladas en una sola unidad para así elaborar un fotoplano de dimensiones mayores.

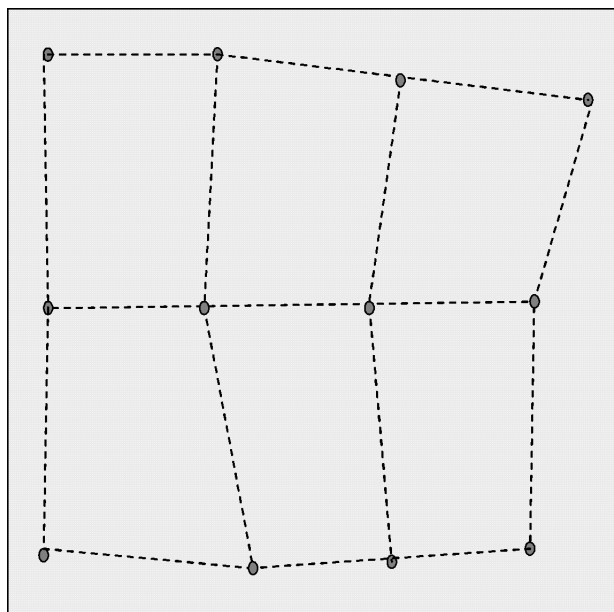


Figura 3. Imagen fotográfica dividida en celdas

### 2.4 Determinación de parámetros de transformación proyectiva

A partir de las coordenadas de los puntos de control tanto en el sistema de la imagen digital, como en el sistema del terreno, se determinan los parámetros de transformación proyectiva ( $g_{ij}$ ) de imagen a terreno, utilizando un mínimo de cuatro puntos de control y aplicando la Ecuación 5. Así mismo, se calcula la posición rectificada en unidades de terreno de los cuatro vértices que determinan la celda a rectificar, y las ecuaciones de las líneas rectas que las definen.

En esta parte también se determinan los parámetros de transformación inversos  $g'_{ij}$  (de terreno a imagen), los cuales serán utilizados más adelante, mediante la siguiente ecuación:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X & Y & 1 & 0 & 0 & 0 & X_x & X_y \\ 0 & 0 & 0 & X & Y & 1 & Y_x & Y_y \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} g'_{11} \\ g'_{12} \\ g'_{13} \\ g'_{21} \\ g'_{22} \\ g'_{23} \\ g'_{31} \\ g'_{32} \end{bmatrix} \quad (6)$$

### 2.5 Generación de la imagen rectificada

La elaboración de la imagen rectificada se realiza siguiendo los pasos siguientes:

- i) Se crea una imagen vacía cuya extensión estará dada por los valores de las coordenadas  $X_{max}, Y_{max}, X_{min}, Y_{min}$ , obtenidos a partir de la transformación de los cuatro vértices de la celda original, como se muestra en la Figura 3.

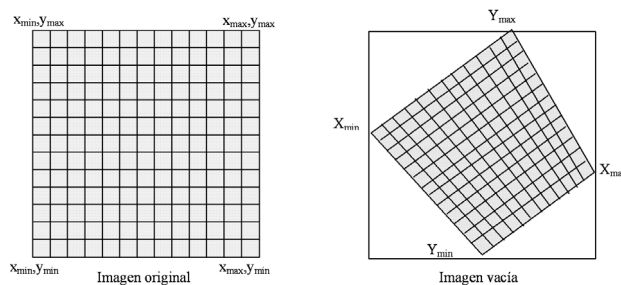


Figura 3. Definición de la extensión de la imagen vacía.

- ii) Se define el tamaño de píxel a utilizar en función de la escala del fotoplano a elaborar.

$$Tp_r = (mb_o / mb_r) * Tp_o$$

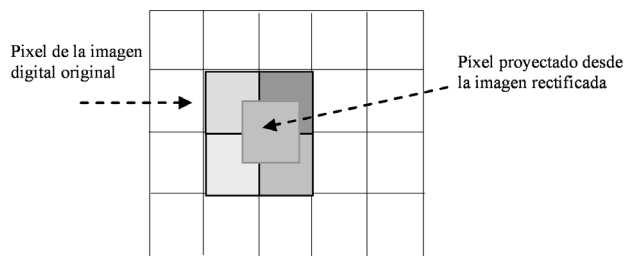
Donde:

- $Tp_r$ : tamaño de píxel de la imagen rectificada o fotoplano  
 $mb_o$ : denominador de la escala de la imagen original  
 $mb_r$ : denominador de la escala de la imagen rectificada  
 $Tp_o$ : tamaño de píxel de la imagen original

- iii) Dado que se tienen la extensión de la imagen vacía expresada en metros y el tamaño de píxel a utilizar, se calculan el número de filas ( $i=1,2, \dots, n$ ) y columnas ( $j=1,2, \dots, m$ ), expresadas en unidades de píxel, de esta imagen. Cada posición  $i, j$  de la imagen está relacionada con una posición  $Y, X$  sobre el terreno.

- iv) A cada uno de los píxeles de la imagen vacía se le asigna un valor inicial de tono, por ejemplo el tono negro.
- v) Se definen los límites de la celda transformada dentro de la imagen vacía.
- vi) Para la determinación del tono gris de los píxeles de la imagen rectificadora se debe tener en cuenta lo siguiente:

- Para cada píxel de la imagen vacía se determina si se encuentra dentro del área a rectificar; si este es el caso, se ubica su posición en la imagen original utilizando los parámetros de transformación inversos (terreno-imagen) en la Ecuación 6, para asignarle el tono gris correspondiente. Si el píxel está fuera del área, entonces se mantiene su tono negro.
- Generalmente, no hay coincidencia en la posición de los píxeles de la imagen original con los proyectados desde la imagen rectificadora. Lo más común es que exista una superposición parcial sobre varios de ellos tal como se muestra en la Figura 4. En consecuencia, se hace necesario realizar una interpolación del tono de gris a partir de los valores de los píxeles de la imagen digital original superpuestos por el píxel transformado desde la imagen vacía, para así obtener el valor de gris. El método de interpolación usado es el conocido como el vecino más próximo, el cual consiste en asignar al píxel el tono de gris del píxel más cercano.



**Figura 4. Proyección del píxel de la imagen rectificadora sobre la imagen digital original.**

A continuación se muestra el algoritmo usado para la rectificación proyectiva de una imagen fotográfica digital.

#### Entrada:

- ✓ Imagen original  $I_o$ , con un tamaño de píxel  $Tp_o$ .
- ✓ Parámetros de la transformación proyectiva desde imagen a terreno

- ✓ Parámetros inversos (terreno a imagen)
- ✓ Denominador de la escala de la imagen original  $mb_o$
- ✓ Denominador de la escala de la imagen a rectificar  $mb_r$
- ✓ Coordenadas de los puntos que definen la extensión de la imagen original  $x_{min}, y_{min}$  y  $x_{max}, y_{max}$
- ✓ Coordenadas de los vértices de las celdas en la que se ha dividido la imagen a rectificar  $x[k]_{min}, y[k]_{min}$  y  $x[k]_{max}, y[k]_{max}$ , para  $k = 1, 2, \dots, maxceldas$

#### Salida:

- ✓ Imagen rectificadora  $I_r$ , con un tamaño de píxel  $Tp_r$ .

#### Algoritmo

1. Inicio
2. Calcular el tamaño del píxel  $Tp_r$  de la imagen rectificadora

$$Tp_r \leftarrow (mb_o / mb_r) * Tp_o$$

3. Determinar para las coordenadas imagen  $x_{min}, y_{min}$  y  $x_{max}, y_{max}$  su correspondiente en el terreno  $X_{min}, Y_{min}$  y  $X_{max}, Y_{max}$ , usando los parámetros de transformación proyectiva.
4. Crear una imagen vacía  $I_r$ , de  $numfila$  filas y  $numcol$  columnas, es decir,  $numfila * numcol$  píxeles

$$numfila \leftarrow (Y_{max} - Y_{min}) / Tpr$$

$$numcol \leftarrow (X_{max} - X_{min}) / Tpr$$

5. Asignar a cada píxel de la imagen vacía  $I_r$  el tono negro

Repita para  $i = 1$  hasta  $numfila$

Repita para  $j = 1$  hasta  $numcol$

$$I_r[i, j] \leftarrow 0$$

Fin del repita para

Fin del repita para

6. Repita para  $k = 1$  hasta  $maxceldas$

- 6.1 Determinar para las coordenadas imagen de los vértices de la celda  $k$ , es decir  $x[k]_{min}, y[k]_{min}$  y  $x[k]_{max}, y[k]_{max}$  su correspondiente en el terreno  $X[k]_{min}, Y[k]_{min}$  y  $X[k]_{max}, Y[k]_{max}$ , usando los parámetros de transformación proyectiva.

- 6.2 Determinar la filas y columnas asociadas a la celda  $k$ ,  $minfilacelda$ ,  $mincolumnacelda$ ,  $maxfilacelda$ ,  $maxcolumnacelda$

- 6.3 Determinar para cada píxel de la celda en la imagen  $I_r$  de coordenadas  $X(columna j)$ ,  $Y(fila i)$ , el tono de gris correspondiente

Repita para  $i = \text{minfilacelda}$  hasta  $\text{maxfilacelda}$

Repita para  $j = \text{mincolumnacelda}$  hasta  $\text{maxcolumnacelda}$

Determinar las coordenadas imagen  $x, y$  del píxel  $i, j$  (cuyas coordenada de terreno son  $Y, X$ ), mediante la transformación proyectiva terreno a imagen (usando parámetros inversos)

Ubicar la posición  $x, y$  en la imagen original  $I_o$ , para obtener el tono de gris que tiene el píxel o los píxeles en dicha posición.

Asignar el tono de gris  $tg$ , obtenido interpolando en el caso de que se tengan varios píxeles en la posición  $x, y$ , en el píxel de  $I_r$

$I_r[i, j] \leftarrow tg$

Fin del repita para

Fin del repita para

Fin del repita para

7. Fin

Para desarrollar todo este procedimiento se elaboró un conjunto de programas que permiten su ejecución paso a paso, el cual también puede ser utilizado con fines didácticos.

### 3. Ejemplo

Para ilustrar la aplicación del procedimiento aquí descrito se seleccionó un área adyacente al Hospital Universitario de Los Andes (HULA), ubicado en la ciudad de Mérida, Venezuela, cuya topografía es plana con variaciones de elevación no significativas a los efectos del desplazamiento por relieve. La imagen fotográfica de la zona usada fue tomada en el año 1996, a escala 1:5.000, y se digitalizó a una resolución óptica de 600 ppp (Figura 5).



Figura 5. Imagen original

Las coordenadas en el sistema de terreno de los cuatro puntos de control utilizados (Tabla I) fueron extraídas del mapa existente a escala 1:2.500, elaborado en el año 1974 por parte del Instituto de Fotogrametría de la Universidad de Los Andes. La escala seleccionada para la imagen rectificadora fue de 1:5.000, la cual se muestra en la Figura 6. La escala del fotoplano generado fue de 1:5.000. Los resultados de la transformación proyectiva plana se muestran en la Tabla II.

Tabla I. Coordenadas de los puntos de control en el sistema de terreno y sistema de la imagen

Punto	Sistemas de coordenadas de la imagen (píxel)		Sistemas de coordenadas del terreno (m)	
	X	Y	Este	Norte
1	1.411	2.490	50.890	17.842
2	1.370	922	51.100	17.556
3	304	2.668	50.657	17.721
4	69	736	50.890	17.338
5	1.015	1.382	50.974	17.589
6	441	958	50.928	14.431
7	265	1.641	50.799	17.528

Parámetros de transformación

$g_{11} = 1,08403439$

$g_{12} = -0,64776169$

$g_{13} = 50981,45980148$

$g_{21} = 0,45206101$

$g_{22} = 0,00362883$

$g_{23} = 17198,01793398$

$g_{31} = 0,00001793$

$g_{32} = -0,00000997$

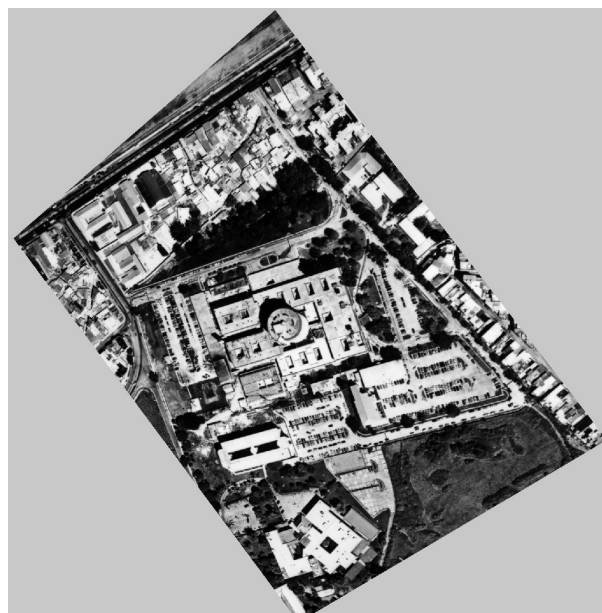


Figura 6. Imagen rectificadora

**Tabla II: Coordenadas resultantes de la transformación proyectiva plana.**

Punto	Coordenadas del mapa (m)		Coordenadas transformadas (m)		Discrepancias (m)	
	Este	Norte	Este	Norte	Este	Norte
1	50.890	17.842	50.890,2	17.842,1	0,2	0,1
2	51.100	17.556	51.100,1	17.556,3	0,1	0,3
3	50.657	17.721	50.657,2	17.721,0	0,2	0,0
4	50.890	17.338	50.890,6	17.337,8	0,6	-0,2
5	50.974	17.589	50.973,0	17.588,2	-1,0	-0,8
6	50.928	17.431	50.927,7	17.431,2	-0,3	0,2
7	50.799	17.528	50.798,3	17.528,2	-0,7	0,2

RMSE = 0,48 m

RMSN = 0,20 m

### III. CONCLUSIONES

El procedimiento descrito permite la rectificación de imágenes fotográficas, usando una transformación proyectiva con puntos de control, con exactitudes del orden de 0,5 m, lo cual se acepta para mapas de escala 1:5.000. La importancia de éste radica, en que por tratarse de zonas planas se puede rectificar las imágenes de forma simple, sin recurrir a programas de ortorectificación rigurosa que se basan en el Modelo de Elevación de la zona y de técnicas más complejas.

A partir de las imágenes fotográficas rectificadas, el método

presentado permite la generación de productos cartográficos como los fotoplanos y planos digitales de la zona, sirviendo de base para la actualización de bases de datos espaciales.

Se construyeron un conjunto de programas para implementar el procedimiento aquí descrito, los cuales forman parte de un sistema para la compilación fotogramétrica, el cual se encuentra en desarrollo.

### IV. BIBLIOGRAFÍA

1. Mikhail E. y Bethel J. *Introduction to modern photogrammetry*. John New York., Wiley & Sons. 2001.
2. Kasser M. y Egels Y. *Digital photogrammetry*. New York., Taylor & Francis. 2002.
3. Jauregui M. Vilchez J. y Chacón L.. Digital orthophoto generation IAPRS, Vol XXXIII, Amsterdam, 2000.
4. Ackerman F. Structural changes in Photogrammetry. Proceedings of the 43th Photogrammetry week, Stuttgart University, Sep, 1991.

### Agradecimientos

Este artículo es el resultado de un proyecto financiado por el Consejo de Desarrollo Científico Humanístico y Tecnológico (CDCHT) de la Universidad de Los Andes. Este soporte es altamente agradecido.