SEGUNDA PARTE.
TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS

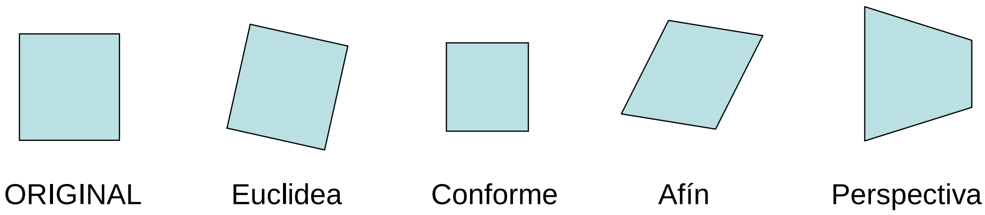


Figura 2.1. Transformaciones 2D.

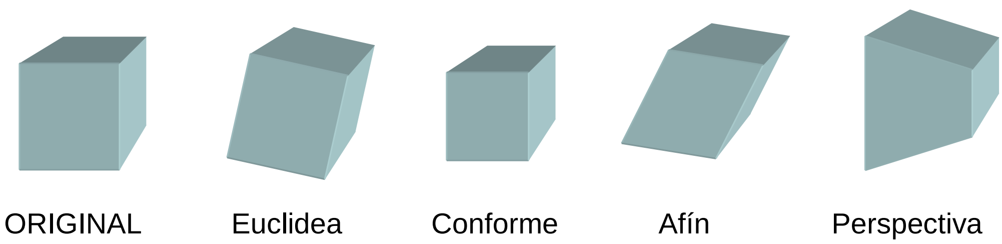


Figura 2.2. Transformaciones 3D.

	TRANSFORMACIONES			
	Euclidiana	**Conforme**	**Afín**	**Proyectiva**
MODIFICACIONES				
Rotación	X	X	X	X
Traslación	X	X	X	X
Escalado uniforme		X	X	X
Escalado variable			X	X
Truncamiento			X	X
Perspectiva				X
Composición de proyecciones				X
INVARIANTES				
Longitud	X			
Angulo	X	X		
Radios	X	X	X	
Paralelismo	X	X	X	X
Razón doble/incidencia	X	X	X	X

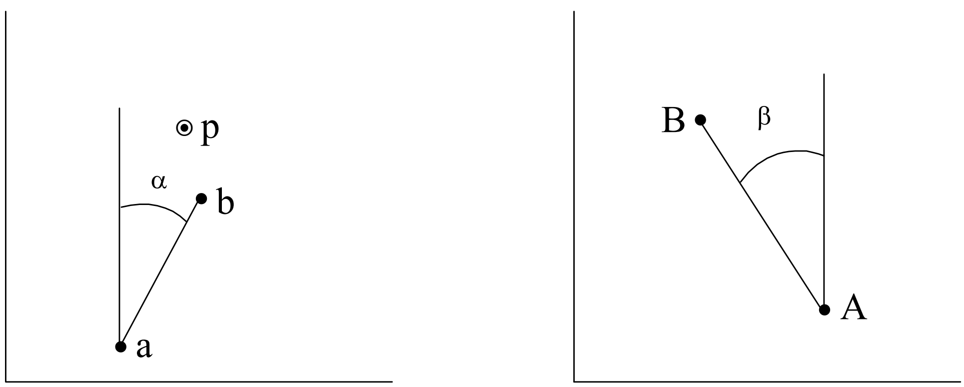
TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS BIDIMENSIONALES

En disciplinas como la topografía y la fotogrametría es frecuente la necesidad de convertir un sistema de coordenadas rectangulares en otro. La topografía hace uso de la transformación de coordenadas planas en el caso de convertir un sistema arbitrario al sistema nacional o a otro sistema arbitrario de algún trabajo realizado con anterioridad. En el caso de la fotogrametría, muchas veces es necesario usar transformaciones en el espacio, debido a las características de sus mediciones. Para llevar a cabo este procedimiento es necesario disponer de puntos en ambos sistemas, los cuales se denominan puntos de control.
Cuando la transformación se realiza en el plano, recibe el nombre de transformación bidimensional. Esta puede ser lineal conforme si la forma se mantiene en ambos sistemas o afín cuando no se mantiene.

Transformación lineal conforme
Para realizar esta transformación es necesario disponer de dos puntos con coordenadas conocidas en ambos sistemas, de preferencia lo mas lejano posibles entre sí, para optimizar la precisión. Si se tienen varios puntos con coordenadas comunes, la transformación lineal conforme se puede resolver por mínimos cuadrados, con lo que se obtiene un mejor resultado. Los pasos para llevar a cabo esta transformación son: escalado, rotación y traslación.

Escalado
En gran cantidad de casos, la escala de ambos sistemas es diferente, por lo que se determina el factor de escala entre ambos sistemas mediante la razón entre distancias. En que caso elemental de tener dos puntos, esta relación es de la forma siguiente:

$$s = \frac{\sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2}}{\sqrt{(x_b - x_a)^2 + \sqrt{(y_b - y_a)^2}}} = \frac{\text{distancia AB}}{\text{distancia ab}} \qquad \text{(ec.1)}$$



(a) Figura 2.3. a. Alineación del sistema xy

(b) Figura 2.3.b. Alineación del sistema XY

Rotación

Cuando el sistema xy ya escalado, se superpone al sistema XY, y se obtiene el caso de la figura 2. La rotación se realiza mediante la ecuación:

$$X'_p = x_p \times \cos(\theta) + y_p \times \operatorname{sen}(\theta)$$
$$Y'_p = y_p \times \cos(\theta) - x_p \times \operatorname{sen}(\theta) \qquad \text{(ec. 2)}$$

El ángulo de rotación total θ se obtiene de la suma de los ángulos α y β indicados en la figura 1a y 1b.

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{x_a - x_b}{y_a - y_b}\right) \qquad \beta = \tan^{-1}\left(\frac{X_a - X_b}{Y_a - Y_b}\right) \qquad \theta = \alpha + \beta \qquad \text{(ec. 3)}$$

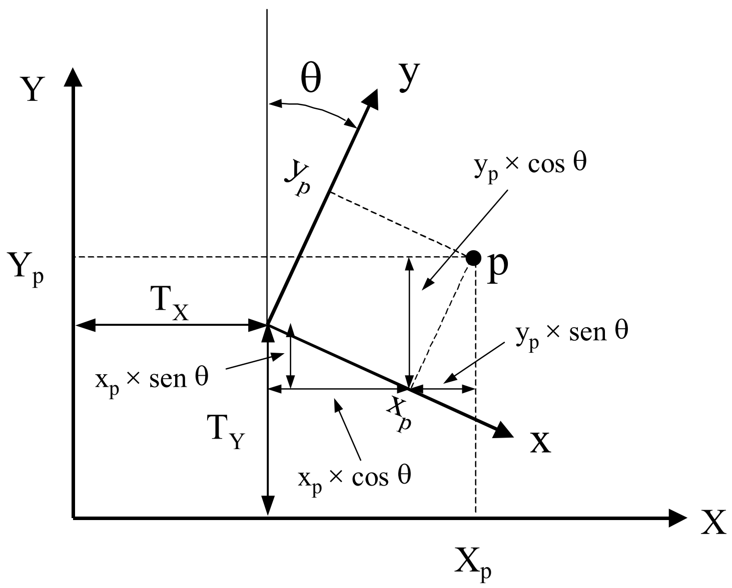


Figura 2.4. Esquema de la transformación lineal conforme.

Traslación

El paso final en la transformación de coordenadas consiste el trasladar el origen del sistema xy para que coincida con el del sistema XY:

$$Xp = X'p + T_{Xp}$$
$$Yp = Y'p + T_{Yp} \qquad \text{(ec. 4)}$$

Por lo que:

$$T_{Xp} = Xp - X'p$$
$$T_{Yp} = Yp - Y'p \qquad \text{(ec. 5)}$$

Finalmente, haciendo cos(θ) = a y sen(θ) = b, nos queda:

$$X_p = ax_p + by_p + T_{Xp}$$
$$Y_p = ay_p - bx_p + T_{Yp} \qquad \text{(ec. 6)}$$

Transformación lineal conforme con redundancia

Este es el caso mas común de transformación de coordenadas bidimensionales, siendo las ecuaciones de transformación las siguientes:

$$X_i + \nu_{Xi} = ax_i + by_i + T_X$$
$$Y_i + \nu_{Yi} = ay_i - bx_i + T_Y \qquad \text{(ec. 7)}$$

Donde ν representa el residual.

Si expresamos las ecuaciones de la transformación lineal en forma matricial tendremos:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ . \\ . \\ X_n \\ Y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \upsilon_{X_1} \\ \upsilon_{Y_1} \\ \upsilon_{X_2} \\ \upsilon_{Y_2} \\ . \\ . \\ \upsilon_{X_n} \\ \upsilon_{Y_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & -y_1 & 1 & 0 \\ y_1 & x_1 & 0 & 1 \\ x_2 & -y_2 & 1 & 0 \\ y_2 & x_2 & 0 & 1 \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ x_n & -y_n & 1 & 0 \\ y_n & x_n & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a \\ b \\ T_x \\ T_y \end{bmatrix} \qquad \text{(ec.8)}$$

Cuando la transformación se realiza con redundancia, el factor de escala se obtiene mediante la ecuación: $s = \sqrt{a^2 + b^2}$ (ec. 9)

La rotación se expresa de la forma:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) \qquad \text{(ec.10)}$$

Cuando se tienen solamente dos puntos comunes en ambos sistemas, la forma de resolver la transformación es la siguiente:

1.- Se calculan las diferencias de coordenadas ΔX, ΔY, Δx, Δy.

2.- Se hace la diferencia entre las ecuaciones 1 para despejar los coeficientes a y b:

$$\Delta X = a\Delta x + b\Delta y \qquad \text{(ec.11a)}$$

$$\Delta Y = a\Delta y - b\Delta x \qquad \text{(ec.11b)}$$

Donde, despejando b de la segunda ecuación obtenemos:

$$b = \frac{a\Delta y - \Delta Y}{\Delta x} \qquad \text{(ec.12)}$$

Reemplazando "b" en la ecuación 11a se obtiene:

$$\Delta X = a\Delta x + \frac{a\Delta y^2 - \Delta y\Delta Y}{\Delta x} \qquad \text{(ec. 13)}$$

Luego,

$$a = \frac{\Delta X\Delta x + \Delta y\Delta Y}{\Delta x^2 + \Delta y^2} \qquad \text{(ec. 14)}$$

Reemplazando "a" en la ecuación 11b:

$$\Delta Y = \frac{\Delta X\Delta y - b\Delta y^2}{\Delta x} - b\Delta x \qquad \text{(ec. 15)}$$

Luego,

$$b = \frac{\Delta X\Delta y + \Delta x\Delta Y}{\Delta x^2 + \Delta y^2} \qquad \text{(ec. 16)}$$

Transformación afín

La transformación afín es una modificación ligeramente diferente de la conforme, donde se añaden diferentes factores de escala para X y para Y para compensar la no perpendicularidad entre los ejes del sistema.

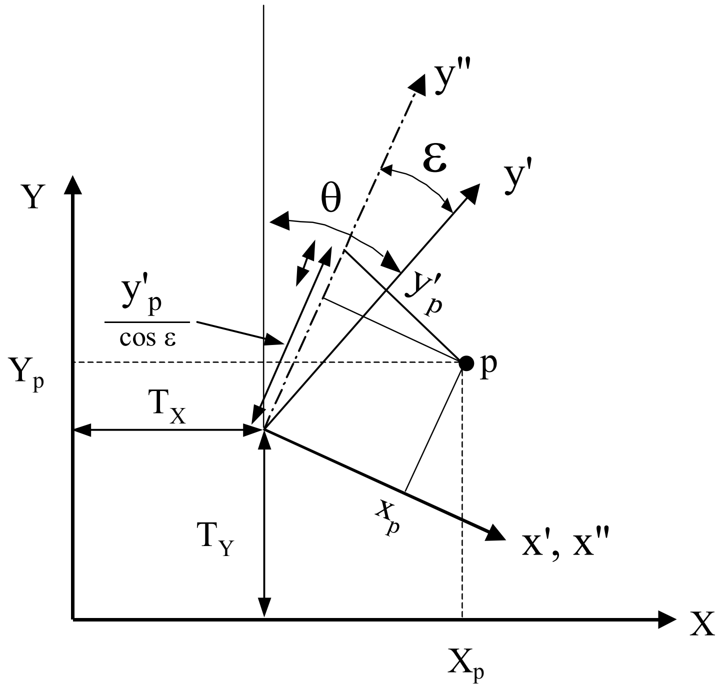


Figura 2.5. Esquema de la transformación afín.

Quedando las ecuaciones de la forma:
$X = a_0 + a_1x + a_2y$
$Y = b_0 + b_1x + b_2y$

Si expresamos las ecuaciones de la transformación lineal en forma matricial tendremos:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ . \\ . \\ X_n \\ Y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \upsilon_{X_1} \\ \upsilon_{Y_1} \\ \upsilon_{X_2} \\ \upsilon_{Y_2} \\ . \\ . \\ \upsilon_{X_n} \\ \upsilon_{Y_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 1 & x_n & y_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_n & y_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \qquad \text{(ec.28)}$$

LISTADO DE PUNTOS PARA TRANSFORMAR

PUNTO	X	Y	x	y
66a	5637,79	11153,88	104,87	168,00
66b	5368,17	12576,61	67,37	455,12
70b	9282,86	14067,76	833,76	101,97
54b	9908,74	12740,13	979,57	431,35
57b	12133,79	13166,49	1432,35	490,72
72b	11995,64	11517,44	1385,08	160,36
61b	15638,94	12327,64	2142,11	480,09
77b	16306,19	12433,45	2263,91	252,61

FORMATO PARA LA TRANSFORMACIÓN LINEAL CONFORME CON DOS PUNTOS

PUNTO	X	Y	x	y
Diferencia (Δ)				

$I = \Delta x \Delta X + \Delta y \Delta Y =$	
$II = \Delta y \Delta X - \Delta x \Delta Y =$	
$III = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 =$	
$a = \dfrac{I}{III} =$	

$b = \dfrac{II}{III} =$	
$T_X = X - ax - by =$	
$T_Y = Y - ay + bx =$	

Transformación proyectiva 2D.

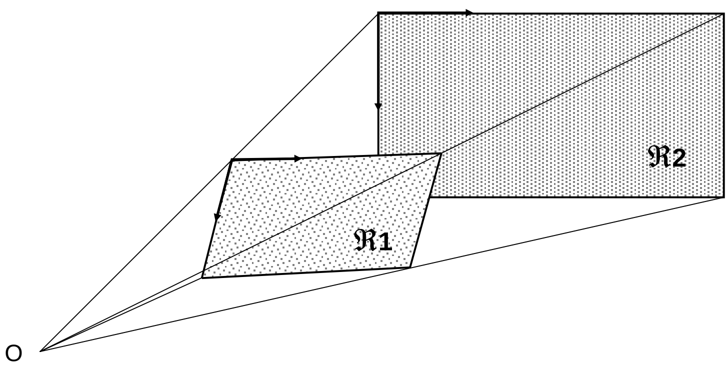


Figura 2.7. Esquema de la proyección en 2D.

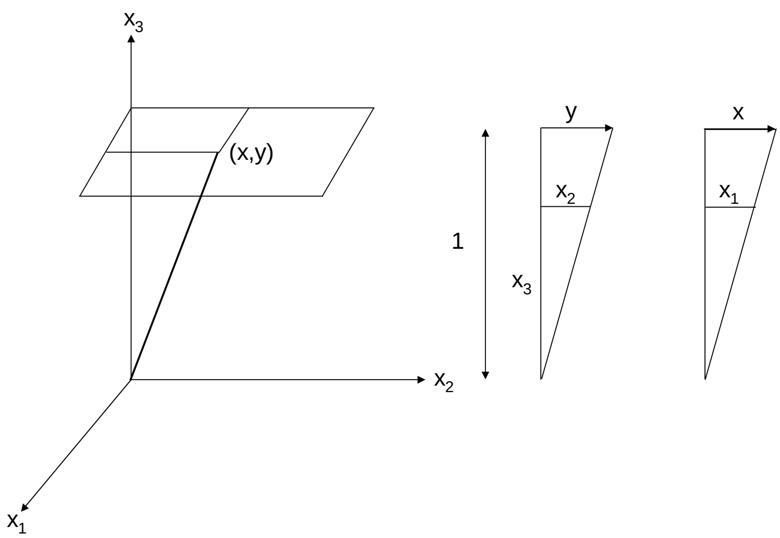


Figura 2.8. Proyección (x1, x2, x3) en (x,y).

De la figura podemos deducir:

$$\frac{x}{x_1} : \frac{y}{x_2} : \frac{1}{x_3}$$

Luego, $x = \frac{x_1}{x_3}$ $y = \frac{x_2}{x_3}$

$$x = \frac{x_1'}{x_3'} = \frac{h_{11}X + h_{12}Y + h_{13}}{h_{31}X + h_{32}Y + h_{33}}$$

$$y = \frac{x_2'}{x_3'} = \frac{h_{21}X + h_{22}Y + h_{23}}{h_{31}X + h_{32}Y + h_{33}}$$

Operando tenemos:

$$x(h_{31}X + h_{32}Y + h_{33}) = h_{11}X + h_{12}Y + h_{13}$$

$$y(h_{31}X + h_{32}Y + h_{33}) = h_{21}X + h_{22}Y + h_{23}$$

$$xh_{33} = h_{11}X + h_{12}Y + h_{13} - xh_{31}X - xh_{32}Y$$

$$yh_{33} = h_{21}X + h_{22}Y + h_{23} - yh_{31}X - yh_{32}Y$$

Dividiendo todo por h_{33}:

$$x = g_{11}X + g_{12}Y + g_{13} - xg_{31}X - xg_{32}Y$$

$$y = g_{21}X + g_{22}Y + g_{23} - yg_{31}X - yg_{32}Y$$

Lo que se puede expresar como:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X & Y & 1 & 0 & 0 & 0 & -xX & -xY \\ 0 & 0 & 0 & x & y & 1 & -yX & -yY \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} g_{11} \\ g_{12} \\ g_{13} \\ g_{21} \\ g_{22} \\ g_{23} \\ g_{31} \\ g_{32} \end{bmatrix}$$

Por analogía:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 & 0 & 0 & 0 & -Xx & -Xy \\ 0 & 0 & 0 & x & y & 1 & -Yx & -Yy \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} G_{11} \\ G_{12} \\ G_{13} \\ G_{21} \\ G_{22} \\ G_{23} \\ G_{31} \\ G_{32} \end{bmatrix}$$