Teoría de Juegos

Teoría de Juegos

"La teoría de juegos es el estudio matemático de la interacción entre agentes independientes y 'auto-interesados'". Así lo define el libro Essentials of Game Theory: A concise, multidisciplinary introduction, de Kevin Leyton-Brown y Yoav Shoham, 2008, un texto que se usa en la Universidad de Stanford para apoyar algunos cursos y que voy a citar en algunos comentarios posteriores.

http://www.gtessentials.org/resources.html

Teoría de Juegos

El texto fundacional de la disciplina es:

Theory Of Games And Economic Behavior (1944)
Authors: Neumann, John Von and Morgenstern, Oskar
Publisher: Princeton University Press.
Language: English

que pueden descargar desde acá:

http://archive.org/details/theoryofgamesand030098mbp

http://cesimo.ing.ula.ve/~jacinto/abiertos/teoria-de-juegos-cap-01-a.pdf
http://cesimo.ing.ula.ve/~jacinto/abiertos/teoria-de-juegos-cap-01-b.pdf

Theory Of Games And Economic Behavior (1944)

(traducido por Jacinto Dávila)

“Sección 2.1.1 (segundo párrafo) Las dificultades prácticas y conceptuales de la noción de utilidad, y particularmente de los intentos de describirla como un número, son bien conocidas y su tratamiento no está entre los objetivos primarios de este trabajo. Nos veremos forzados, no obstante, a discutirlos en algunos casos, particularmente en 3.3 y 3.5

[…] Asumiremos por tanto que el objetivo de todos los participantes en el sistema económico, tanto consumidores como emprendedores, es el dinero, o en forma equivalente, un mismo bien económico. Este se supone divisible sin restricciones y sustituible, libremente transferible e idéntico, incluso en el sentido cualitativo, con cualquier “satisfacción” o “utilidad” que desee cada participante.

Sección 2.1.2. El individuo que intenta obtener esos respectivos máximos se dice también que actúa “racionalmente”. “

Theory Of Games And Economic Behavior (1944)

(traducido por Jacinto Dávila)

“2.2.2. A Crusoe le son dados ciertos datos físicos (deseos y bienes elementales) y su tarea es combinarlos y aplicarlos de tal forma que obtenga una satisfacción resultante máxima. No puede haber duda de que él controla exclusivamente todas las variables de las que depende ese resultado – sea la asignación de recursos, la determinación de los usos del mismo artículo para diferentes deseos, etc. (2).

Así que Crusoe se enfrenta con el problema ordinario de maximización, cuyas dificultades son de naturaleza técnica – y no conceptual – como se ha dicho.

(2) Algunas veces también intervienen factores incontrolables, e.g. el clima en la agricultura. Estos, sin embargo, son fenómenos puramente estadísticos. En consecuencia se les puede eliminar con el conocido procedimiento del cálculo de probabilidades, es decir, determinando las probabilidades de las diversas alternativas e introduciendo la noción de “expectativa matemática”.”

Theory Of Games And Economic Behavior (1944)

(traducido por Jacinto Dávila)

“2.2.3 Considere ahora un participante en una economía social. Su problema tiene, por supuesto, muchos elementos en común con un problema de maximización. Pero también contiene algunos elementos esenciales de una naturaleza completamente diferente. Él también trata de obtener un resultado óptimo. Pero para obtenerlo, debe entrar en relaciones de intercambio con otros. Si dos o más personas intercambian bienes entonces el resultado para cada una dependerá, en general, no únicamente de sus propias acciones sino de las de los otros también. De manera que cada participante intenta maximizar una función (su “resultado”) en las que no controla todas las variables. Ciertamente, este no es un problema de maximización, sino una mezcla peculiar y desconcertante de varios problemas de maximización en conflicto entre ellos. Cada participante está guiado por otro principio y ninguno determina todas las variables que afectan sus intereses.”

Theory Of Games And Economic Behavior (1944)

(traducido por Jacinto Dávila)

“Este tipo de problema no es resuelto para nada en la matemática clásica. Enfatizamos, al riesgo de ser pedantes, que este no es una problema de maximización condicional, ni un problema del cálculo de variaciones, o del análisis funcional o algún otro. Surge con toda claridad, incluso en las más “elementales” situaciones e.g. cuando todas las variables pueden asumir sólo un conjunto finito de valores.

Una particularmente aguda expresión de la confusión popular acerca de este pseudo-problema de maximización es la famosa declaración de acuerdo a la cual el propósito del esfuerzo social es el “mayor beneficio posible para el mayor número posible”. Un principio guía no puede ser formulado con el requerimiento de maximizar dos (o más) funciones al mismo tiempo.

Tal principio, literalmente, es autocontradictorio (en general, una función no tendrá un máximo donde la otra lo tenga). No es mejor que decir, e.g., que una firma debe obtener precios máximos con el máximo ingreso, o el máximo beneficio con la mínima producción. Si algún orden de importancia de estos principios o promedio ponderado se pretende, se debe declarar. Sin embargo, en la situación de los participantes en una economía social, nada de eso se pretende, sino que todos los máximos se desean al mismo tiempo – por todos los participantes. “

Theory Of Games And Economic Behavior (1944)

(traducido por Jacinto Dávila)

“Uno se equivocaría si cree que esto puede se obviado, como la dificultad de Crusoe descrita en (2), recurriendo simplemente a los recursos de la teoría de la probabilidad. Cada participante puede determinar las variables que describen sus propias acciones pero no las de otros. Sin embargo, esas variables “extranjeras” no pueden ser, desde su punto de vista, descritas por suposiciones estadísticas. Esto es debido a que los otros son guiados, tal como él mismo, por principios racionales – sea lo que sea lo que esto signifique – y ningún *modus procedendi* puede estar bien si no intenta entender esos principios y las interacciones de los intereses conflictivos de todos los participantes.

Algunas veces esos intereses van más o menos de la mano – entonces estamos más cerca a un problema de maximización simple. Pero también pueden oponerse. Una teoría general debe cubrir todas estas posibilidades, todos las etapas intermedias y todas sus combinaciones”

Theory Of Games And Economic Behavior (1944)

(traducido por Jacinto Dávila)

“2.2.4. La diferencia entre la perspectiva de Crusoe y la de un participante en una economía social puede ser ilustrada también de esta manera: Aparte de esas variables que él controlará, a Crusoe le es dada una cantidad de datos que están “muertos”; son un soporte físico inalterable de la situación (incluso cuando son aparentemente variables, como se dice en (2) y están gobernados por leyes estadísticas fijas). Ni un sólo dato que le es dado tiene que dar cuenta de la voluntad o intención económica de alguna otra persona – basándose en motivos económicos como lo suyos. Un participante en una economía de intercambio social, por otro lado, se enfrenta también a datos de este tipo: son el resultado de la acciones y voluntades de los otros participantes (como los precios). Sus acciones estarán influenciadas por sus expectativas y estas, a su vez, reflejan las expectativas de los otros participantes respecto a sus acciones. “

Theory Of Games And Economic Behavior (1944)

(traducido por Jacinto Dávila)

“Así que el estudio de la economía de Crusoe y el uso de métodos que se apliquen a ella es de un valor mucho más limitado para la teoría económica que lo que se ha creído hasta ahora, incluso por los críticos más radicales. Las razones de estas limitaciones descansan no en el campo de esas relaciones sociales que hemos mencionado antes – aún cuando no cuestionamos su importancia – sino que surgen de las diferencias conceptuales entre el problema de maximización original (de Crusoe) y el problema más complejo que se bosquejó aquí.

Confiamos que el lector quede convencido por este texto que ahora y acá enfrentamos una dificultad realmente conceptual – y no meramente técnica. Y es para enfrentar este problema para lo que se diseña la teoría de “juegos de estrategia”.

El dilema del prisionero

	C	D
C	$-1, -1$	$-4, 0$
D	$0, -4$	$-3, -3$

Formalizando el juego

Juego = (Agentes, Acciones, Resultados)

Agente = (Metas, Creencias, Observaciones, Acciones)

Essentials of Game Theory: A concise, multidisciplinary introduction, de Kevin Leyton-Brown y Yoav Shoham, 2008

Definition 1.2.1 (Normal-form game). *A (finite,* n-*person)* normal-form game *is a tuple* (N, A, u)*, where:*

- N *is a finite set of* n *players, indexed by* i*;*
- $A = A_1 \times \ldots \times A_n$*, where* A_i *is a finite set of* actions *available to player* i*.*

Each vector $a = (a_1, \ldots, a_n) \in A$ *is called an* action profile*;*

- $u = (u_1, \ldots, u_n)$ *where* $u_i : A \mapsto \mathbb{R}$ *is a real-valued* utility *(or* payoff*)* function *for player* i*.*

La esencia del dilema del prisionero

	C	D
C	a, a	b, c
D	c, b	d, d

: Any $c > a > d > b$ define an instance of Prisoner's Dilemma.

Respuestas al dilema

“[La teoría de juegos] nos dice que cualquier usuario racional que se enfrenta con ese escenario una vez optará por D sin importar lo que el otro agente haga. Nos dice que permitir a los usuarios comunicarse por adelantado no cambiará el resultado. Nos dicen que con agentes perfectamente racionales, la decisión seguirá siendo la misma incluso si juegan muchas veces; Sin embargo, si el número de veces que los agentes van a jugar es infinito o incierto, puede que adopten C.”[Kevin Leyton-Brown y Yoav Shoham, 2008]

Juegos de Coordinación

	Left	Right
Left	$1, 1$	$0, 0$
Right	$0, 0$	$1, 1$

Suma Cero

	Heads	Tails
Heads	$1, -1$	$-1, 1$
Tails	$-1, 1$	$1, -1$

Piedra, Papel o Tijera

	Rock	Paper	Scissors
Rock	$0, 0$	$-1, 1$	$1, -1$
Paper	$1, -1$	$0, 0$	$-1, 1$
Scissors	$-1, 1$	$1, -1$	$0, 0$

Batalla de los sexos

		Husband	
		LW	WL
Wife	LW	2, 1	0, 0
	WL	0, 0	1, 2

De acciones a estrategias

Una **estrategia pura** es seleccionar una acción particular y jugarla.

La selección de una estrategia pura para cada agente es **un perfil** de estrategias puras

De acciones a estrategias

Una **estrategia mixta o combinada** es seleccionar una acción del conjunto posible siguiendo alguna distribución de probabilidad

Estrategias mixtas, perfiles y soportes

Definition 1.4.1 (Mixed strategy). *Let* (N, A, u) *be a normal-form game, and for any set* X *let* $\Pi(X)$ *be the set of all probability distributions over* X*. Then the set of* mixed strategies *for player* i *is* $S_i = \Pi(A_i)$.

Definition 1.4.2 (Mixed-strategy profile). *The set of* mixed-strategy profiles *is simply the Cartesian product of the individual mixed-strategy sets,* $S_1 \times \cdots \times S_n$.

By $s_i(a_i)$ we denote the probability that an action a_i will be played under mixed strategy s_i. The subset of actions that are assigned positive probability by the mixed strategy s_i is called the *support* of s_i.

Definition 1.4.3 (Support). *The* support *of a mixed strategy* s_i *for a player* i *is the set of pure strategies* $\{a_i | s_i(a_i) > 0\}$.

Utilidad esperada de una estrategia mixta

Definition 1.4.4 (Expected utility of a mixed strategy). *Given a normal-form game* (N, A, u), *the expected utility* u_i *for player* i *of the mixed-strategy profile* $s = (s_1, \ldots, s_n)$ *is defined as*

$$u_i(s) = \sum_{a \in A} u_i(a) \prod_{j=1}^{n} s_j(a_j).$$

Ejemplos locales

		Trabajadores Universitarios protestan (o se paran)		
		Mucho	**Poco**	**Nada**
	Mucho	Guerra (ruptura definitiva)	Paz	Paz
Gobierno aumenta	**Poco**	Guerra	Paz	Paz
	Nada	Desastre	Desastre	Desastre

El juego por el conocimiento

Jacinto Dávila <jacinto@ula.ve> versión α 1.0

		Abierto	
		Calidad	Excelencia
Cerrado	Calidad	Gana Abierto	Gana Abierto
	Excelencia	Gana Cerrado	Gana Cerrado

Entre optimalidad y equilibrio

Una estrategia óptima es una que maximice el beneficio esperado del agente en el ambiente en el que opera. En el contexto multiagente, sin embargo, este problema se torna complejo porque los otros agentes en el juego también están tratando de maximizar sus beneficios. Así que hablar de una estrategia óptima para un agente no tiene sentido.

Los teóricos de juegos hablan, en lugar de ese concepto, de formas para seleccionar ciertos subconjuntos de resultados a los que denominan conceptos solución. Dos de los conceptos solución más importantes son

La optimalidad de Paremo

El equilibrio de Nash

Dominación y optimalidad de Pareto

Definition 2.1.1 (Pareto domination). *Strategy profile s* Pareto dominates *strategy profile s′ if for all* $i \in N$, $u_i(s) \geq u_i(s')$, *and there exists some* $j \in N$ *for which* $u_j(s) > u_j(s')$.

Definition 2.1.2 (Pareto optimality). *Strategy profile s is* Pareto optimal, *or* strictly Pareto efficient, *if there does not exist another strategy profile* $s' \in S$ *that Pareto dominates s.*

Sobre la optimalidad de Pareto

1.- Todo juego debe tener al menos un perfil de estrategias óptimo de Pareto, y debe haber siempre al menos uno de esos óptimos en el que todos los jugadores adopten estrategias puras.

2.- Algunos juegos tendrás varios óptimos. En juegos de suma cero, por ejemplo, todos los perfiles de estrategias son estrictamente Pareto-eficientes

Equilibro de Nash

Mirando el juego desde la perspectiva de uno de los agentes (i los demás son -i)

Definition 2.2.1 (Best response). *Player i's* best response *to the strategy profile* s_{-i} *is*
b
a mixed strategy $s_i^* \in S_i$ *such that* $u_i(s_i^*, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i})$ *for all strategies* $s_i \in S_i$.

Pero este NO es un concepto solución

Equilibrio de Nash

Definition 2.2.2 (Nash equilibrium). *A strategy profile* $s = (s_1, \ldots, s_n)$ *is a* Nash equilibrium *if for all agents i,* s_i *is a best response to* s_{-i}.

Definition 2.2.3 (Strict Nash). *A strategy profile* $s = (s_1, \ldots, s_n)$ *is a if for all agents i and for all strategies* $s'_i \neq s_i$, $u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s'_i, s_{-i})$.

Definition 2.2.4 (Weak Nash). *A strategy profile* $s = (s_1, \ldots, s_n)$ *is a if for all agents i and for all strategies* $s'_i \neq s_i$, $u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s'_i, s_{-i})$*, and s is not a strict Nash equilibrium.*

Equilibrio de Nash

Definition 2.2.2 (Nash equilibrium). *A strategy profile* $s = (s_1, \ldots, s_n)$ *is a* Nash equilibrium *if for all agents i,* s_i *is a best response to* s_{-i}*.*

Definition 2.2.3 (Strict Nash). *A strategy profile* $s = (s_1, \ldots, s_n)$ *is a if for all agents i and for all strategies* $s'_i \neq s_i$, $u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s'_i, s_{-i})$.

Definition 2.2.4 (Weak Nash). *A strategy profile* $s = (s_1, \ldots, s_n)$ *is a if for all agents i and for all strategies* $s'_i \neq s_i$, $u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s'_i, s_{-i})$*, and s is not a strict Nash equilibrium.*