Análisis Dimensional y Semejanza

Jesús Muñoz

Análisis Dimensional y Semejanza

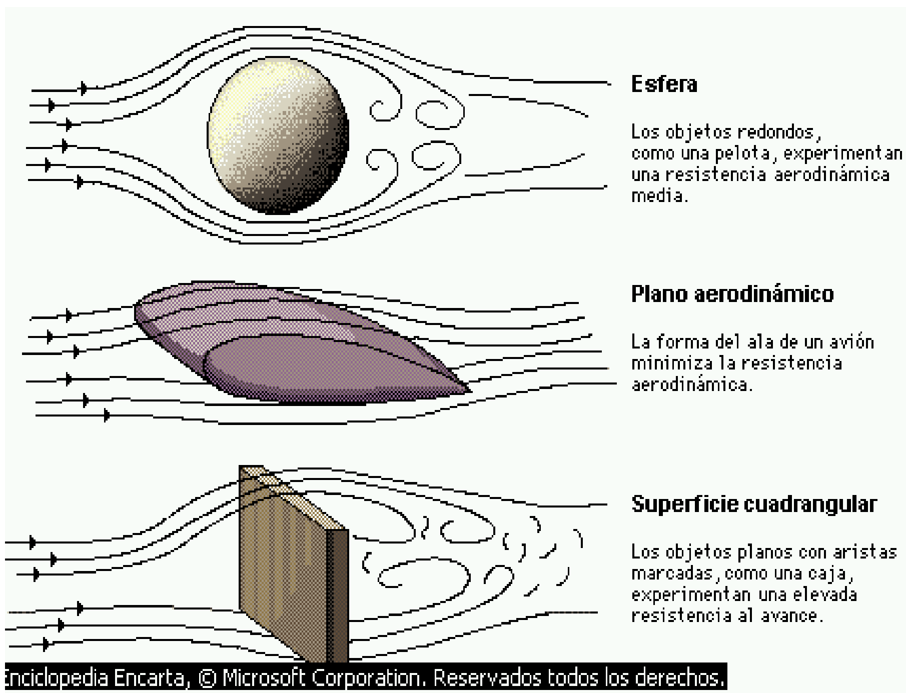
Análisis Dimensional: es un método o técnica para estudiar el flujo de fluidos que permite reducir el número y complejidad de las variables que intervienen en la descripción de un fenómeno físico

- Es importante para planificar experimentos y presentar los resultados en forma compacta, así como también se utiliza en los estudios teóricos.
- Permite reducir las variables y agruparlas en forma adimensional, lo que representa un enorme ahorro de tiempo y dinero.

Análisis Dimensional y Semejanza

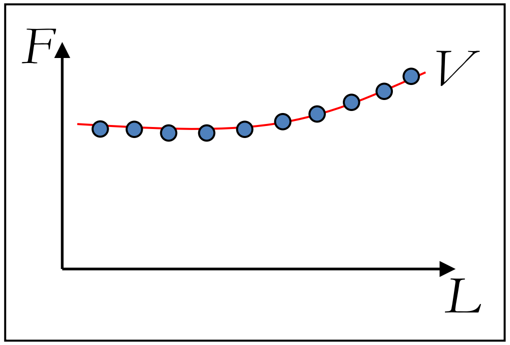
Fuerza sobre un cuerpo inmerso en la corriente de un fluido:

$$F = f\left(L, V, \rho, \mu\right)$$

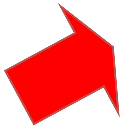


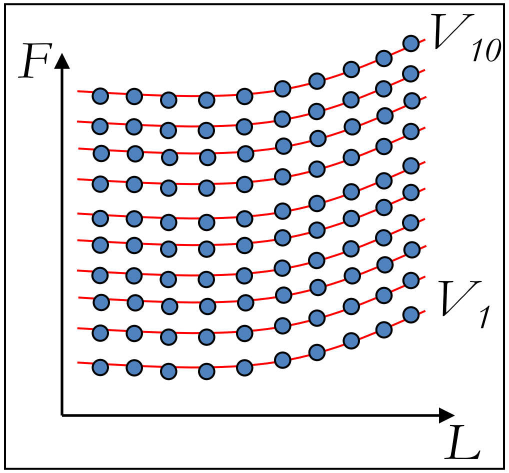
Análisis Dimensional y Semejanza

10x10=100 experimentos

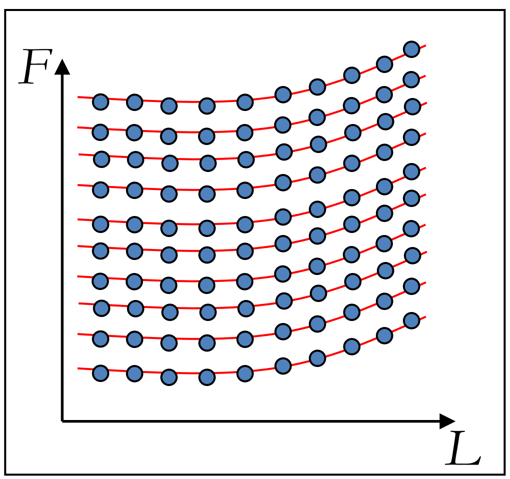


10 experimentos con 10 cuerpos distintos

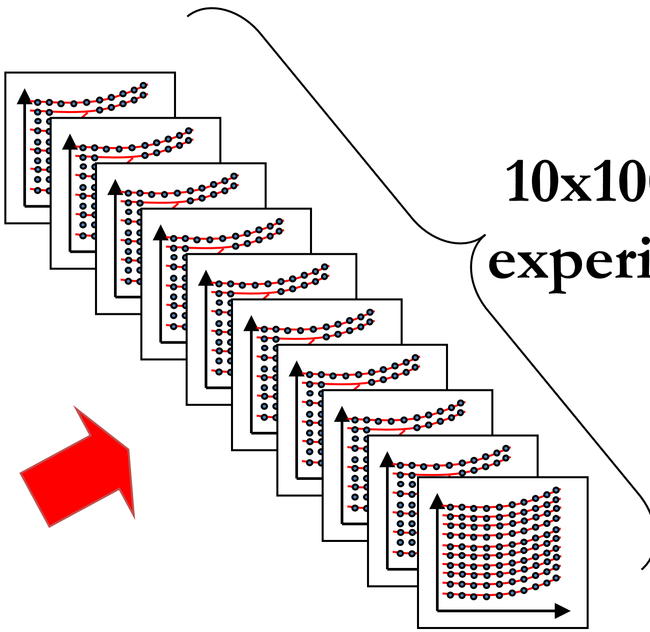




Análisis Dimensional y Semejanza



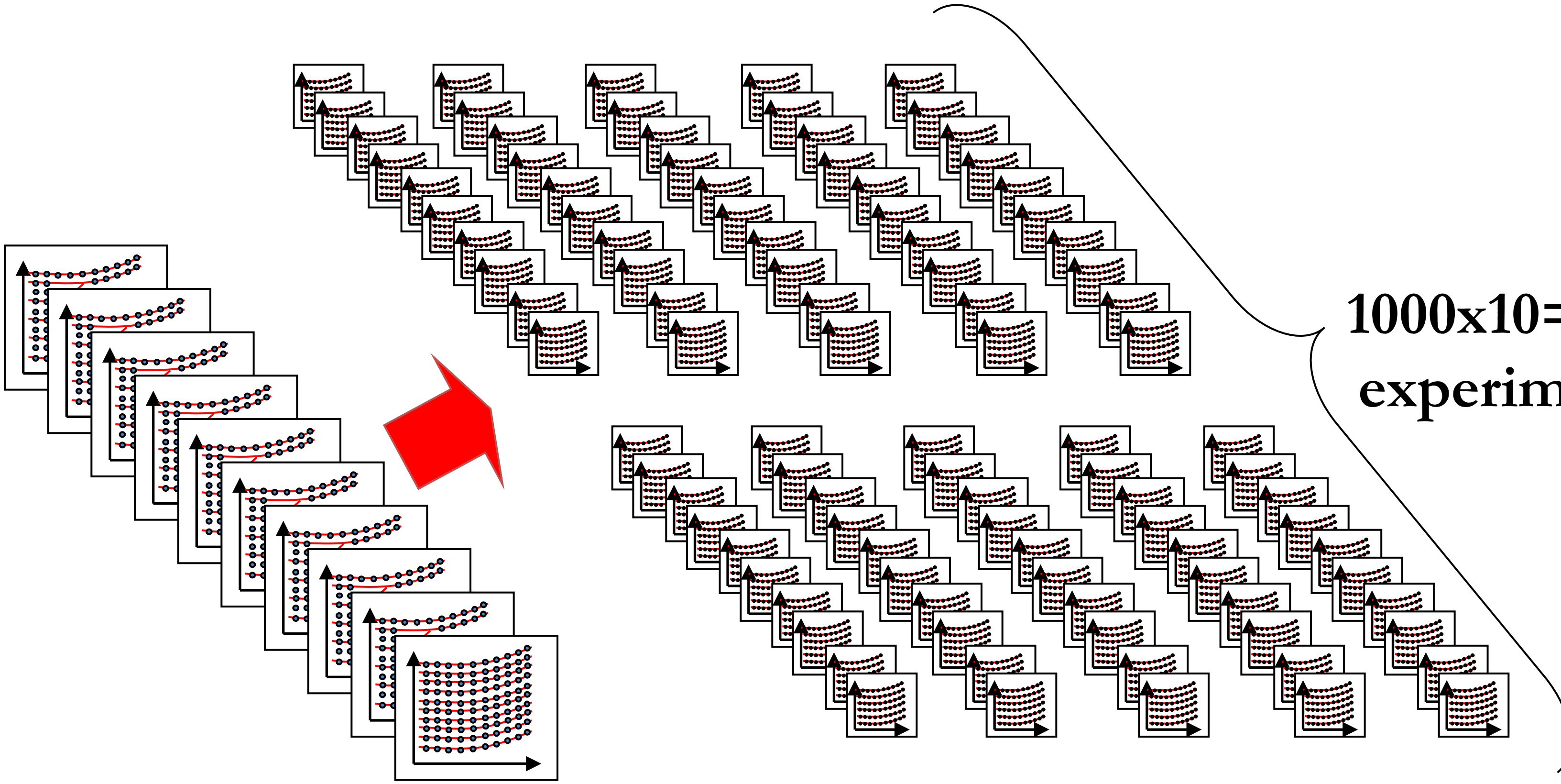
10x10=100 experimentos



10x100=1000 experimentos

10 fluidos distintos

Análisis Dimensional y Semejanza



1000x10=10000 experimentos

10x100=1000 experimentos

10 fluidos con distintas viscosidades. Total: 100 fluidos

Análisis Dimensional y Semejanza

Con el análisis dimensional podemos reducir la ecuación

$$F = f\left(L, V, \rho, \mu\right)$$

Relación funcional dimensional

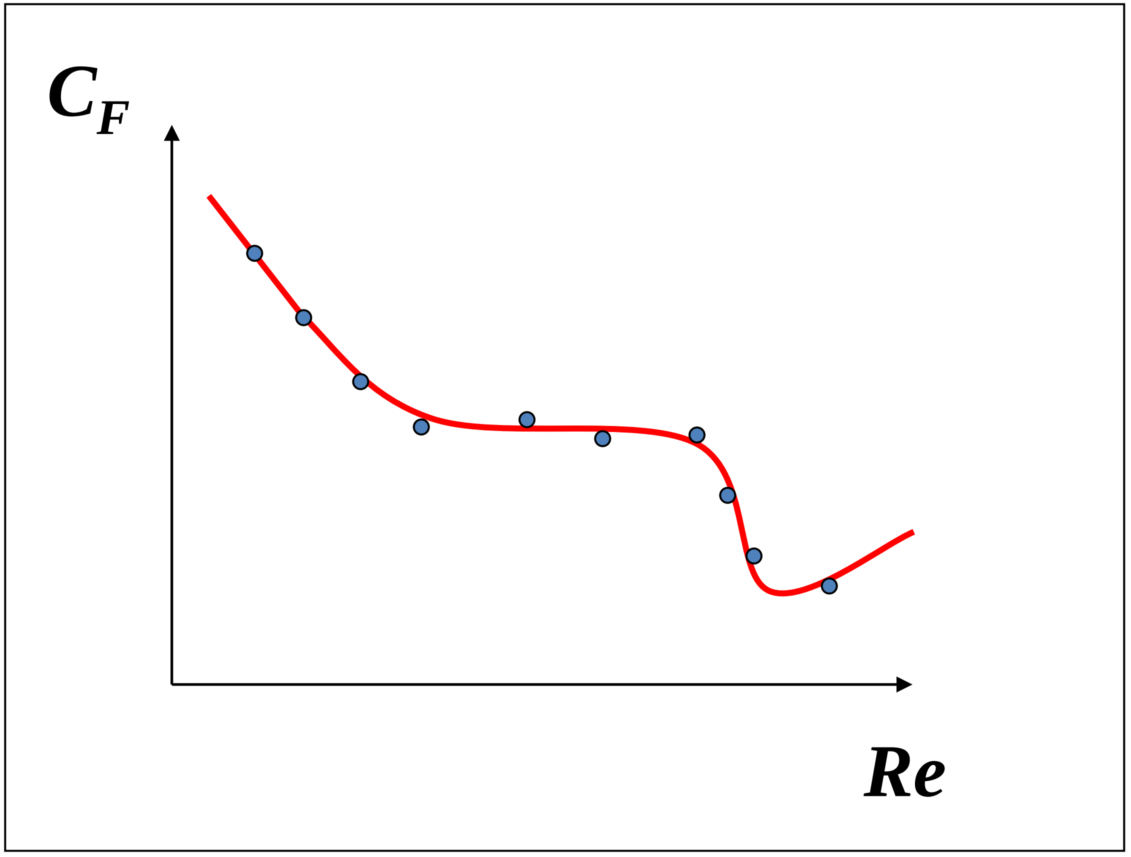
a su forma equivalente:

$$\frac{F}{\rho V^2 L^2} = g\left(\frac{\rho V L}{\mu}\right)$$

$$C_F = g\left(\mathrm{Re}\right)$$

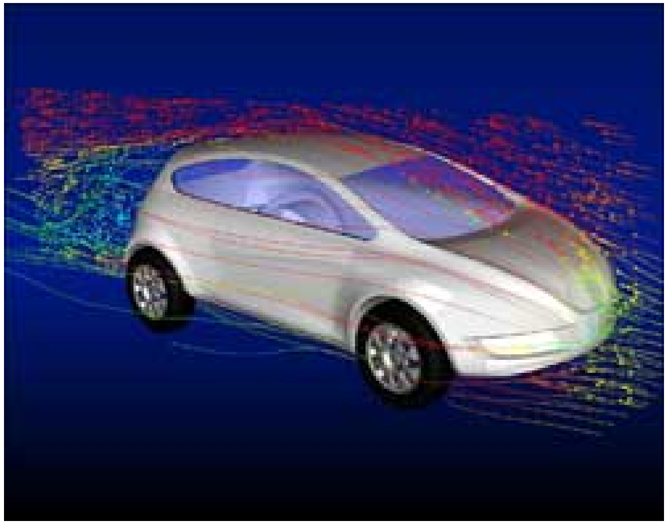
Relación funcional adimensional

Análisis Dimensional y Semejanza



Túnel de Viento

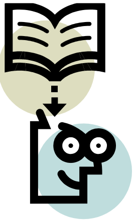
Túnel de Viento



Túnel de Viento Virtual

Análisis Dimensional y Semejanza

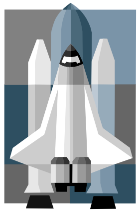
- El análisis dimensional ayuda a pensar y planificar un experimento o teoría.



- Sugiere formas adimensionales de las ecuaciones antes de gastar tiempo y dinero para encontrar las soluciones con ordenador.

- Sugiere las variables que deben descartarse, haciendo algunos ensayos que muestran que son poco importantes.

- Permite hacer similitud entre modelo y prototipo, proporcionando las leyes de escala de conversión de datos.



Análisis Dimensional y Semejanza

Enciclopedia Encarta, Harold Lambert/Archive Photos

Modelo **Prototipo**

$$C_F = g(\mathrm{Re}) \qquad \mathrm{Re}_m = \mathrm{Re}_p$$

Principio de Homogeneidad Dimensional

Si una ecuación expresa correctamente una relación entre variables de un proceso físico, debe ser *dimensionalmente homogénea*; esto es, todos sus sumandos deben tener las mismas dimensiones.

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}V^2 + gz = const$$

Factores de las ecuaciones que intervienen en el análisis dimensional

- Variables Dimensionales: Las variables dimensionales son las cantidades que varían en un caso dado y podrían representarse unas en función de otras para mostrar los resultados. En la ecuación de Bernoulli son ***P,V,z***. Todas tienen dimensiones y todas pueden hacerse adimensionales a través de alguna técnica de análisis dimensional.

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}V^2 + gz = const$$

- Constantes Dimensionales: Pueden variar de un caso a otro, pero se mantiene constantes. En la ecuación de Bernoulli son la densidad, ***g*** y ***const***. Todas tienen dimensiones y todas pueden hacerse adimensionales con otras. pero normalmente se utilizan para hacer adimensionales las variables del sistema.
- Constantes Puras: Las constantes puras no tienen dimensiones y nunca tendrán. Aparecen en las manipulaciones matemáticas. En la ecuación de Bernoulli son el 1/2 y el exponente 2
- Variables adimensionales por definición: Son adimensionales en virtud de su definición como relación de cantidades adimensionales. Por ejemplo la deformación, densidad relativa, los ángulos (relación entre la longitud del arco y el radio) y se miden en radianes por esta razón.

Dimensiones Fundamentales

Corresponden a maneras diferentes de especificación de las dimensiones primarias.

(1) M,L,t,T	(2) F,L,t,T
Masa [M]	Fuerza [F]
Longitud [L]	Longitud [L]
tiempo [t]	tiempo [t]
Temperatura [T]	Temperatura [T]0

Dimensiones de las cantidades de Mecánica de Fluidos

	MLtT	FLtT		MLtT	FLtT
Longitud	L	L	**Viscosidad cinemática**	$L^{-2}t^{-1}$	$L^{-2}t^{-1}$
Área	L^2	L^2	**Tensión Superficial**	Mt^{-2}	FL^{-1}
Volumen	L^3	L^3	**Fuerza**	MLt^{-2}	F
Velocidad	Lt^{-1}	Lt^{-1}	**Masa**	M	Ft^2L^{-1}
Flujo volumétrico	L^3t^{-1}	L^3t^{-1}	**Momento, Par**	ML^2t^{-2}	FL
Flujo másico	Mt^{-1}	FtL^{-1}	**Potencia**	ML^2t^{-3}	FLt^{-1}
Presión, esfuerzo	$ML^{-1}t^{-2}$	FL^{-2}	**Densidad**	ML^{-3}	Ft^2L^{-4}
Velocidad de deformación	t^{-1}	t^{-1}	**Calor específico**	$L^2t^{-2}T^{-1}$	$L^2t^{-2}T^{-1}$
Velocidad angular	t^{-1}	t^{-1}	**Conductividad térmica**	$MLt^{-3}T^{-1}$	$Ft^{-1}T^{-1}$
Viscosidad	$ML^{-1}t^{-1}$	FtL^{-2}	**Coeficiente de Expansión**	T^{-1}	T^{-1}

Teorema Pi de Buckingham

E. Buckingham dio un procedimiento para determinar los parámetros adimensionales que gobiernan un fenómeno físico. Dado un problema fisico en el cual el parámetro dependiente es función de n-1 parámetros independientes, podemos expresar la relación entre las variables, donde $q1$ es el parámetro dependiente y $q2$, $q3$,.. qn son los n-1 parámetros independientes. Matemáticamente podemos expresar la relación funcional en la forma equivalente donde g es una función no especificada, diferente de f.

Si un proceso físico satisface el PHD y relaciona *n* variables dimensionales, se puede describir mediante una relación entre sólo *n-m* grupos adimensionales.

La reducción *m* es siempre menor o igual al número de dimensiones que describen estas variables.

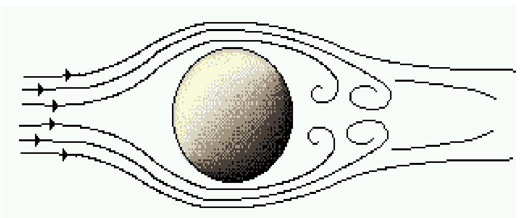
$$q_1 = f\left(q_2, q_3, .., q_n\right)$$

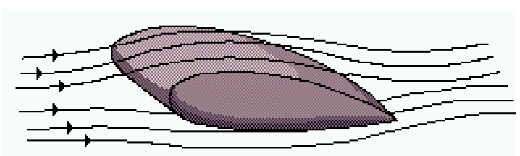
$$g\left(q_1, q_2, .., q_n\right) = 0$$

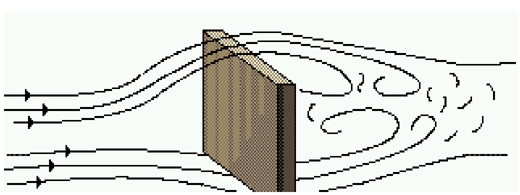
$$\Pi_1 = G_1\left(\Pi_{2,} \Pi_3, .., \Pi_{n-m}\right)$$

$$G\left(\Pi_1, \Pi_1, .., \Pi_{n-m}\right) = 0$$

Teorema Pi de Buckingham







$$F = f\left(L, V, \rho, \mu\right)$$

M,L,t

$$n = 5$$

$$m = 3$$

$$n - m = 2$$

$$\frac{F}{\rho V^2 L^2} = g\left(\frac{\rho V L}{\mu}\right)$$

$$C_F = g\left(\mathrm{Re}\right)$$

Teorema Pi de Buckingham

1 Listar los parámetros implicados n.

2 Seleccionar un conjunto de dimensiones fundamentales, MLtT o FLtT

3 Listar las dimensiones de todos los parámetros en términos de dimensiones fundamentales.

4 Elegir de la lista de parámetros un grupo de parámetros a repetir igual al número de dimensiones primarias.

5 Establecer ecuaciones dimensionales combinando los parámetros a repetir con cada unos de los otros parámetros cada vez, para formar grupos adimensionales.

Teorema Pi de Buckingham

- Tomar la reducción **m** igual al número de dimensiones independientes requeridas para especificar la totalidad de los parámetros implicados, casi siempre produce el número correcto de parámetros Π. Se pueden presentar problemas cuando las variables se expresan en términos de sistemas diferentes de dimensiones.

- El valor de m puede establecerse con certeza determinando el ***rango de la matriz dimensional***.

Rango de una matriz: Se dice que A es una matriz de rango r, si tiene un conjunto de r vectores fila o columna linealmente independientes, y todo conjunto con más de r vectores fila o columna son linealmente dependientes. Es igual al orden mas grande de la matriz cuyo determinante es distinto de cero.

- Los n-m grupos adimensionales no son únicos, dependen del conjunto de parámetros repetidos.

- Se recomienda seleccionar como parámetros repetidos una longitud característica del cuerpo $\boldsymbol{L}$, una propiedad cinemática $\boldsymbol{V}$ y una propiedad del fluido $\boldsymbol{\rho}$. Esto permite reconocer la importancia de las fuerzas de inercia que intervienen en la mayor parte de los problemas de mecánica de fluidos.

Las fuerzas de inercia representan la resistencia que oponen los cuerpos (las partículas de los fluidos) a obedecer a la acción de las fuerzas. En los fluidos las partículas oponen mayor resistencia a las fuerzas viscosas que tratan de mantener el movimiento ordenado de las mismas. Pueden considerarse como las fuerzas necesarias para vencer la resistencia al cambio en la cantidad de movimiento del fluido.

Fuerza sobre un cuerpo inmerso en la corriente de un fluido: $F = f\left(L, V, \rho, \mu\right)$

1 *F,L, V,ρ,μ*

2 ***MLtT o FLtT***

3

$F=[MLt^{-2}]$

$L=[L]$

$V=[Lt^{-1}]$

$\rho=[ML^{-3}]$

$\mu= ML^{-1}t^{-1}$ r =3

	F	L	V	ρ	μ
M	1	0	0	1	1
L	1	1	1	-3	-1
t	-2	0	-1	0	-1

m=r=3

$F=F$

$L=[L]$

$V=[Lt^{-1}]$

$\rho=Ft^2L^{-4}$

$\mu=FtL^{-2}$ r=3

	F	L	V	ρ	μ
F	1	0	0	1	1
L	0	1	1	-4	-2
t	0	0	-1	2	1

m=r=3

Teorema Pi de Buckingham

4

MLt	***FLt***
L,V,ρ	***L,V,ρ***

5

***n* - *m* = 5 – 3 = 2**

$$\Pi_1 = F[L]^a[V]^b[\rho]^c$$

$$\Pi_1 = [MLt^{-2}][L]^a[Lt^{-1}]^b[ML^{-3}]^c = M^0L^0t^0$$

$$M: 1 + c = 0 \rightarrow c = -1$$

$$L: 1 + a + b - 3c = 0 \rightarrow a = -2$$

$$t: -2 - b = 0 \rightarrow b = -2$$

$$\Pi_1 = FL^{-2}V^{-2}\rho^{-1} \rightarrow \Pi_1 = \frac{F}{\rho V^2 L^2}$$

Teorema Pi de Buckingham

5 cont.

$$\Pi_2 = \mu [L]^a [V]^b [\rho]^c$$

$$\Pi_2 = [ML^{-1}t^{-1}][L]^a [Lt^{-1}]^b [ML^{-3}]^c = M^0 L^0 t^0$$

$$M : 1 + c = 0 \rightarrow c = -1$$

$$L : -1 + a + b - 3c = 0 \rightarrow a = -1$$

$$t : -1 - b = 0 \rightarrow b = -1$$

$$\Pi_2 = \mu L^{-1} V^{-1} \rho^{-1} \rightarrow \Pi_2 = \frac{\mu}{\rho V L} = \frac{1}{\mathrm{Re}}$$

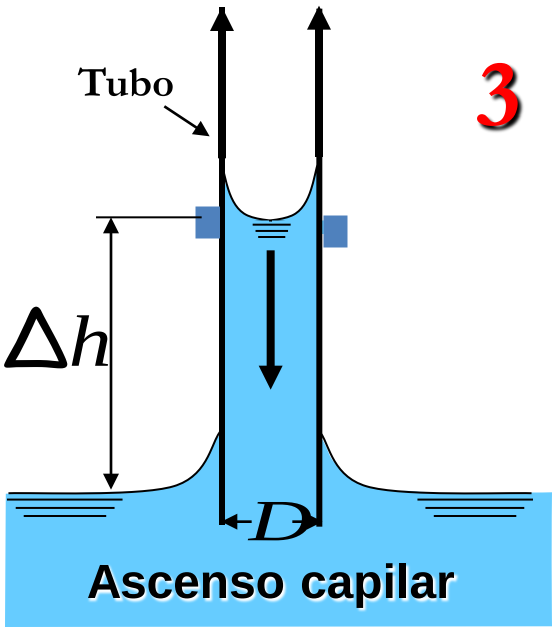
$$\Pi_2 = \mathrm{Re}$$

Ascenso Capilar

$$\Delta h = f\left(D, \gamma, \sigma\right)$$

1 **Δh,D, γ, σ**

2 **MLtT o FLtT**



3

Δh=[L]	**Δh =L**
D=[L]	**D=[L]**
γ=[ML^{-2}t^{-2}]	**γ =[FL^{-3}]**
σ=[Mt^{-2}] r=3	**σ=[FL^{-1}] r=2**

	Δh	D	γ	σ
M	0	0	1	1
L	1	1	-2	0
t	0	0	-2	-2

m=r=2

	Δh	D	γ	σ
F	0	0	1	1
L	1	1	-3	-1

m=r=2

Variables y Fuerzas en un problema de Mecánica de Fluidos:

- Las variables que pueden intervenir en un problema cualquiera de mecánica de fluidos se pueden reducir a ocho:

  La fuerza $\boldsymbol{F}$, Longitud $\boldsymbol{L}$, La velocidad $\boldsymbol{V}$, La densidad $\boldsymbol{\rho}$, La viscosidad dinámica $\boldsymbol{\mu}$, La aceleración de la gravedad $\boldsymbol{g}$, La velocidad del sonido $\boldsymbol{c}$, La tensión superficial σ

Las fuerzas que se encuentran en los fluidos que fluyen son:					
Fuerza de inercia	**Fuerzas viscosas**	**Fuerza de presión**	**Fuerza de gravedad**	**Fuerza de Tensión superficial**	**Fuerza de Compresibilidad**

Fuerzas de los Fluidos que Fluyen

Fuerza de inercia	$F = ma = m\dfrac{dV}{dt} = \rho \cancel{V}\dfrac{dV}{ds}V = \rho L^3\dfrac{V^2}{L} = \rho L^2 V^2$
Fuerzas viscosas	$\tau A = \mu\dfrac{du}{dy}A = \mu\dfrac{V}{L}L^2 = \mu VL$
Fuerza de presión	$\Delta pA = \Delta pL^2$
Fuerza de gravedad	$mg = \rho gL^3$
Fuerza de Tensión superficial	σL
Fuerza de Compresibilidad	BL^2

Grupos adimensionales de importancia:

La razón entre la fuerza de inercia y cada una de las otras fuerzas listadas conduce a 5 grupos adimensional fundamentales.

Número de Reynolds	$\mathrm{Re} = \dfrac{\rho V^2 L^2}{\mu V L} = \dfrac{\rho V L}{\mu}$
Número de Euler	$Eu = \dfrac{\Delta P L^2}{\rho V^2 L^2} = \dfrac{\Delta P}{\frac{1}{2}\rho V^2}$ $\qquad Ca = \dfrac{P - P_v}{\frac{1}{2}\rho V^2}$
Número de Froude	$Fr^2 = \dfrac{\rho V^2 L^2}{g \rho L^3} = \dfrac{V^2}{gL} \rightarrow Fr = \dfrac{V}{\sqrt{gL}}$
Número de Weber	$We = \dfrac{\rho V^2 L^2}{\sigma L} = \dfrac{\rho V^2 L}{\sigma}$
Número de Mach	$M^2 = \dfrac{\rho V^2 L^2}{B L^2} \rightarrow M = \dfrac{V}{\sqrt{\frac{B}{\rho}}} = \dfrac{V}{c}$ **En gases ideales** $c = \sqrt{KRT}$

El número de Reynolds permite determinar la transición entre regímenes de flujo laminar y turbulento en un tubo, un canal abiero, etc. Sirve de criterio para determinar el régimen de flujo. L es una longitud característica descriptiva de la geometría del campo de flujo. Re es la razon entre las fuerzas de inercia y las fuerzas viscosas. Los flujos con números de Reynolds "grandes" por lo general son turbulentos. Los flujos en los que las fuerzas de inercia son "pequeñas" comparadas con las fuerzas viscosas son característicamente flujos laminares.

El número de Euler sirve para presentar datos de presión en forma adimensional en la aerodinámica. ***DP*** es la presión local menos la presión de la corriente libre y ρ y V son propiedades del flujo de corriente libre. Se le acredita a Euler haber sido el primero en reconocer el papel de la presión en el movimiento de un fluido.
Eu es la razón entre las fuerzas de presión y las fuerzas de inercia. El factor 1/2 se introduce en el denominador para producir la presión dinámica. ***Eu*** a menudo se llama coeficiente de presión ***Cp***.
El ***DP*** es la diferencia de presión ***P-Po*** entre dos puntos: un punto "o" situado suficientemente alejado del cuerpo sobre el cual queremos calcular la presión en un punto genérico cualquiera ***P***, como por ejemplo un punto sobre el pilar de un puente o perfil de ala. Datos de presión tomados sobre el cuerpo modelo permiten determinar punto por punto la presión en puntos homólogos ubicados sobre el prototipo.
En el estudio del fenómeno de cavitación, la dieferencia de presión, ***DP***, se toma como ***P-Pv***, donde ***P***, $\boldsymbol{\rho}$ y ***V*** son condiciones en la corriente del líquido. y ***Pv*** es la presión de vapor del líquido a la temperatura de prueba. El parámetro adimensional resultante se conoce como número de cavitación. Cuando la presión del líquido cae por debajo de la presión de vapor debido al flujo (teorema de Bernoulli), aparece la cavitación . Si aceleramos el agua desde el reposo hasta unos 15 m/s, la presión desciende alrededor de una atmosfera, osea, 15 lbf/pulg^2. esto producirá cavitación. Se puede presentar cavitación en la región de bajas presiones asociada a los torbellinos de punta de pala en una hélice de barco.

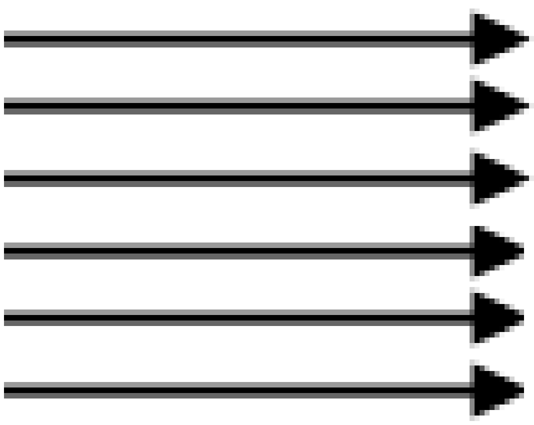
El número de Froude es un parámetro significativo en flujos con efectos de superficie libre. Puede interpretarse como la razón entre las fuerzas de inercia y la fuerza de gravedad. La longitud ***L*** es una longitud característica descriptiva del campo de flujo. En el caso de un flujo en canal abierto, la longitud caracteristica es la profundidad del agua. los números de Froude menores que uno indican flujo subcrítico, y los valores mayores que uno, flujo supercrítico.

El número de Weber es la razón entre las fuerzas de inercia y las fuerzas de tensión superficial. ***We*** juega un papel importante sólo si es de orden unidad o menor; lo que ocurre normalmente cuando la curvatura de la superficie es comparable en tamaño a la profundidad del líquido, por ejemplo, en gotas, flujos capilares, ondas de pequeña longitud de onda y en modelos hidráulicos de pequeñas dimensiones. Si ***We*** es grande, sus efectos son despreciables.
La fuerza de tensión superficial suele ser de ordinario muy pequeña. En la técnica esta fuerza entra en juego en las industrias relacionadas con la pulverización y atomización donde el radio de curvatura es aproximadamente del mismo orden de magnitud que la profundidad de flujo (formación de gotas, "sprays") que constituye una rama importante de la ingeniería química.

Los números de ***Fr***, ***Eu*** y ***We*** no intervienen si no hay superficie libre, excepto si hay posibilidad de cavitación del líquido a valores muy bajos de ***Eu***. Por tanto, los flujos viscosos a bajas velocidades sin superficie libre, el único parámetro adimensional importante es el número de Reynolds.
En el ***número de Mach, V*** es la velocidad del flujo y ***c*** es la velocidad local del sonido. Es un parámetro clave para caracterizar los efectos de compresibilidad en un flujo. Puede interpretarse como la razón entre las fuerzas de inercia y las fuerzas debidas a la compresibilidad. Para flujo verdaderamente incompresible, ***c*** tiende a infinito de modo que ***M***=0.
Para ***M***<0,3, la variación de densidad máxima es menor que 5%, de modo que los flujos de gas pueden tratarse como incompresibles. ***M***=0.3 para aire en condiciones estándar corresponde a una velocidad de aproximadamente 100 m/s.
Los flujos compresibles comunes son los sistemas de aire comprimido empleados para accionar herramientas de taller y taladros dentales, trasmisión de gases en tuberías a alta presión y control neumático o hidráulico. Los efectos de compresibilidad son importantes en el diseño de aeronaves y misiles de alta velocidad, centrales termoeléctricas, ventiladores de alta presión y compresores.
Para aire en condiciones estándar, un flujo puede considerarse incompresible si la velocidad es menor que unos 100 m/s (350 pies/s). Esto comprende una gran variedad de flujos de aire: movimiento de automóviles y trenes, aviones ligeros, despegue y aterrizaje de aviones de gran velocidad, la mayoría de los flujos en tuberías y en turbomáquinas a moderadas velocidades de giro. La mayor parte de los flujos de líquidos son incompresibles, puesto que las velocidades del flujo son pequeñas y la velocidad del sonido muy grande.

Efectos de Viscosidad. Importancia del Número de Reynolds

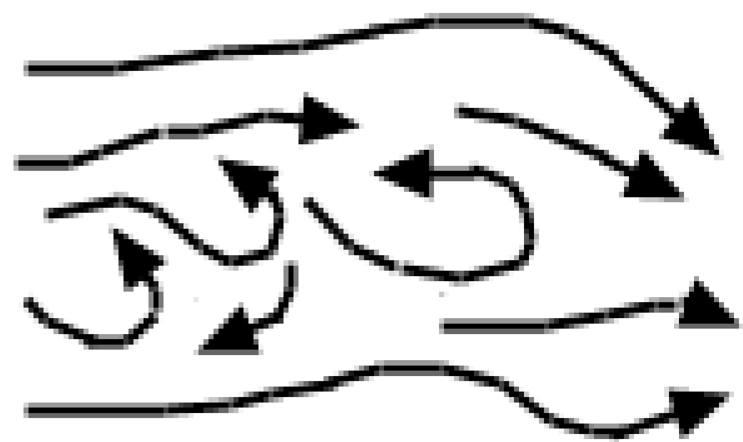
- **El flujo puede ser *laminar, turbulento o transicional*, según el efecto de viscosidad en relación con la inercia.**
- **En el flujo *laminar*, las partículas de agua se mueven en trayectorias suaves definidas o líneas de corriente, y las capas de fluido con espesor infinitesimal parecen deslizarse sobre capas adyacentes**



Flujo laminar

Efectos de Viscosidad. Importancia del Número de Reynolds

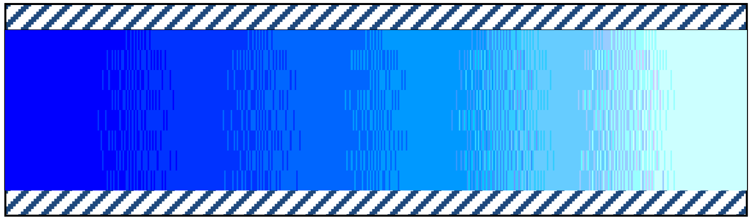
- **En flujo *turbulento*, las partículas del agua se mueven en trayectorias irregulares, que no son suaves ni fijas, pero que en conjunto representan el movimiento hacia delante de la corriente entera.**
- **Entre los estados de flujo laminar y turbulento existe un estado *mixto o transicional*.**



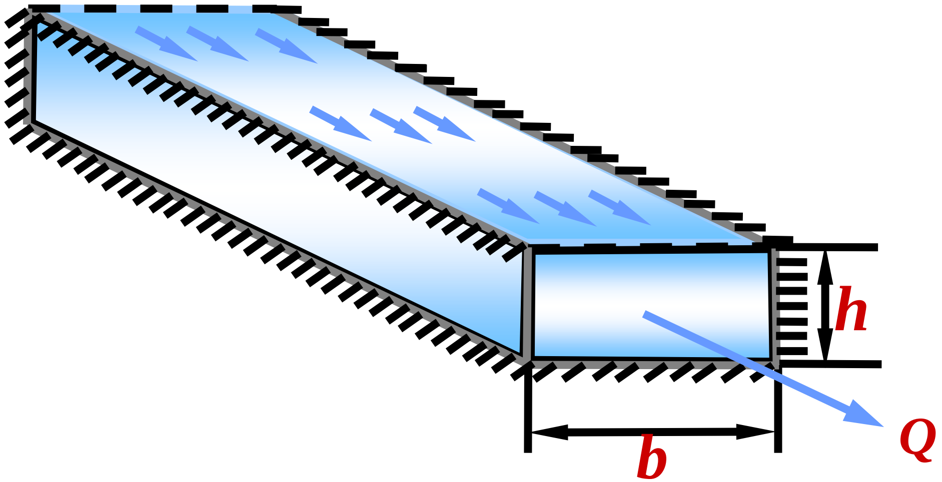
Flujo turbulento

Efectos de Viscosidad. Importancia del Número de Reynolds

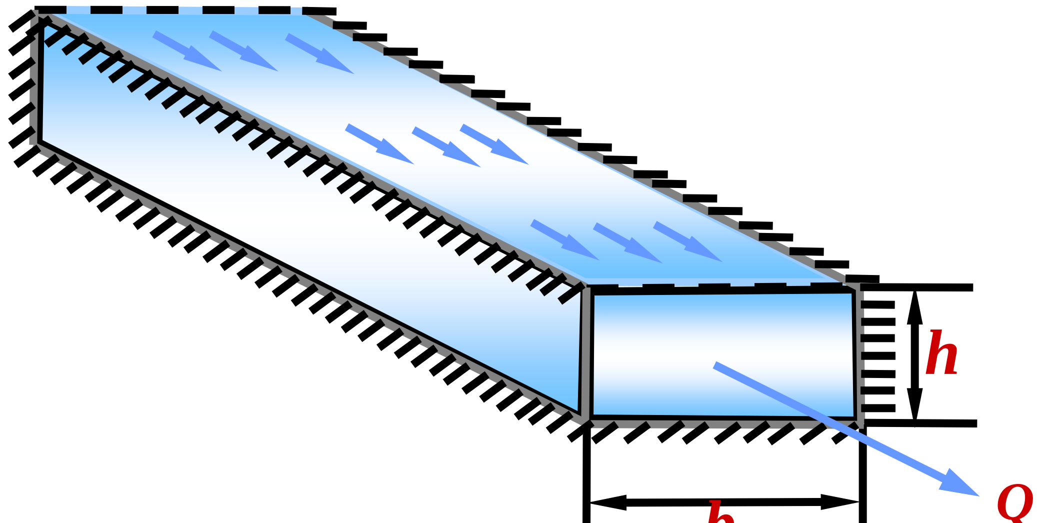
Aproximadamente, se considera que para Re mayores que 2300 el flujo en una tubería pasa de laminar a turbulento

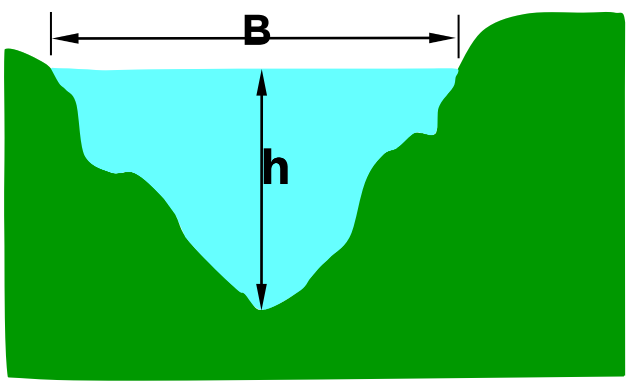


En ductos no circulares se usa el concepto de diámetro hidráulico $D_h = \frac{4A}{P}$. Donde el área $A = bh$ y P es el perímetro mojado.



Importancia del Número de Froude
Canales Abiertos





Efectos de la Gravedad. Influencia del Número de Froude

Clasificación del Movimiento según Fr

$Fr < 1$
Movimiento Subcrítico

El flujo se caracteriza por velocidad baja y a menudo, se describe como tranquilo y de corriente lenta unidireccional. Las perturbaciones pueden viajar aguas arriba; las condiciones aguas abajo pueden afectar el flujo aguas arriba.

$Fr = 1$
Movimiento Crítico

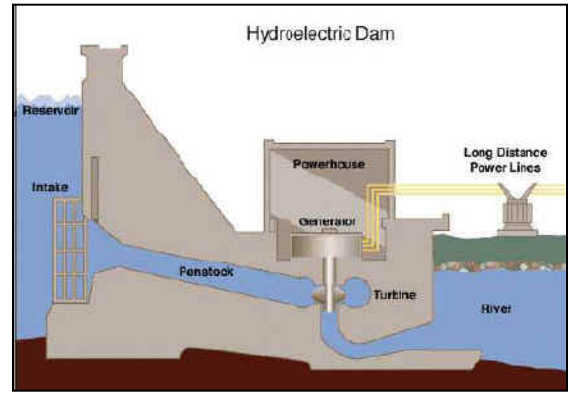
Las condiciones de flujo representan las condiciones de flujo para las cuales la energía específica media es mínima.

$Fr > 1$
Movimiento Supercrítico

Las fuerzas inerciales se vuelven dominantes; el flujo tiene una alta velocidad y se describe usualmente como rápido, ultrarrápido y torrencial o fugaz. Ninguna perturbación puede viajar aguas arriba

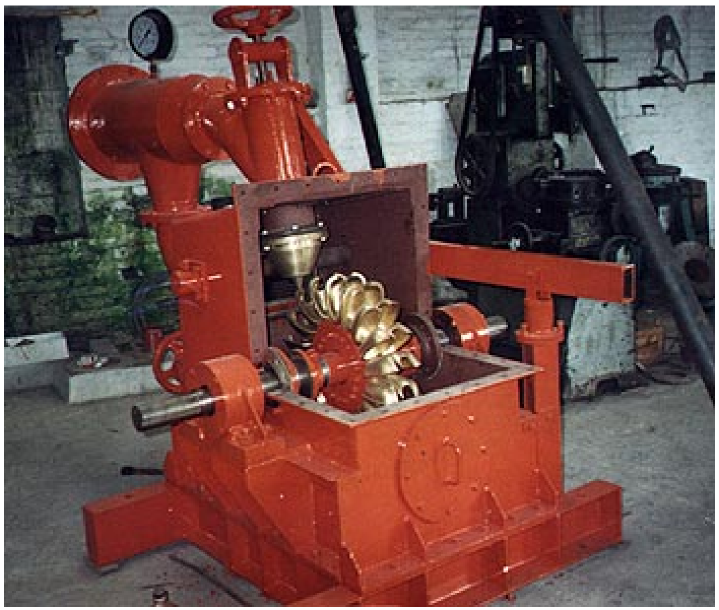
Similitud y Ensayo de Modelos

Modelo

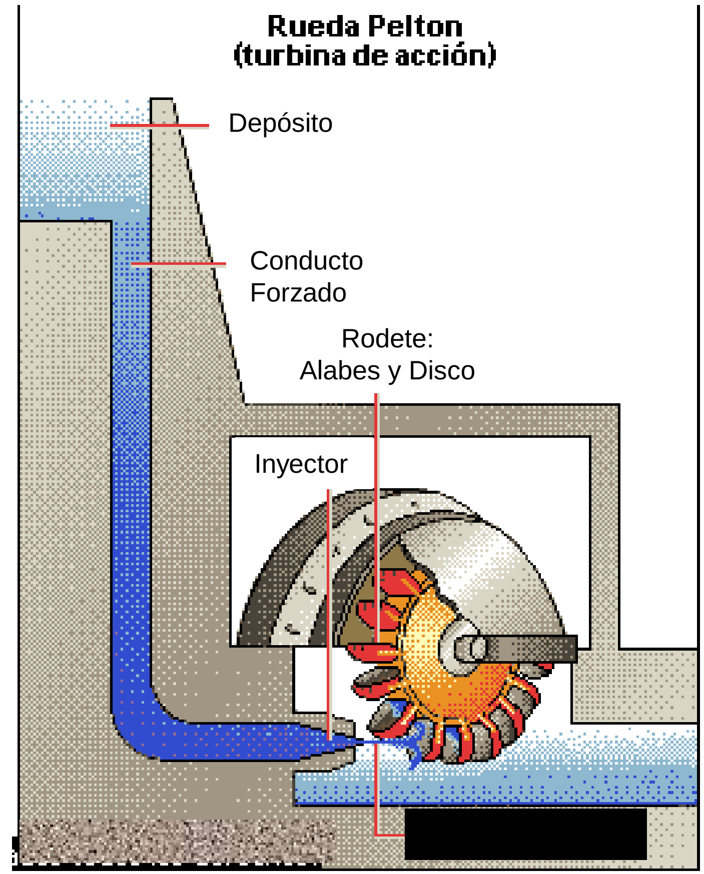


Prototipo

Similitud y Ensayo de Modelos

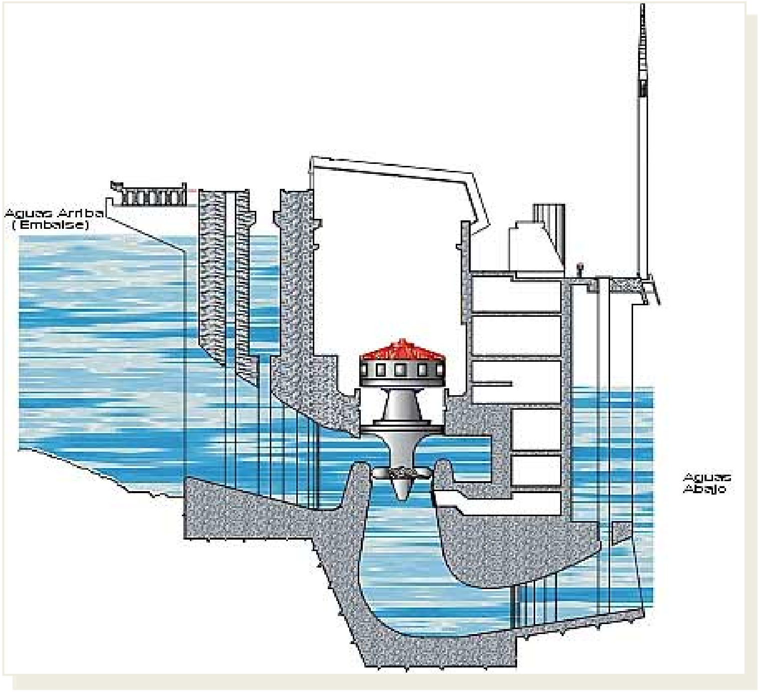


Modelo



Prototipo

Similitud y Ensayo de Modelos



Prototipo

Similitud y Ensayo de Modelos

Modelo

Prototipo

Similitud y Ensayo de Modelos

Para que sea útil, una prueba de modelos debe producir datos que puedan escalarse para obtener las fuerzas, momentos y cargas dinámicas que existirían en el prototipo a escala natural.

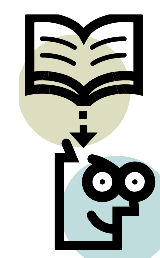
¿Qué condiciones deben satisfacerse para asegurar la similitud de los flujos del modelo y del prototipo?

Condiciones de semejanza entre los flujos del modelo y el prototipo

Similitud geométrica: requiere que el modelo y el prototipo sean de la misma forma, y que todas las dimensiones lineales del modelo se relacionen con las dimensiones correspondientes del prototipo por medio de un factor de escala constante.

Por tanto las longitudes L, superficies A, y volúmenes V homólogos del prototipo y del modelo han de verificar las siguientes relaciones:

$$\frac{L_p}{L_m} = \lambda \qquad \frac{A_p}{A_m} = \lambda^2 \qquad \frac{V_p}{V_m} = \lambda^3$$



Condiciones de semejanza entre los flujos del modelo y el prototipo

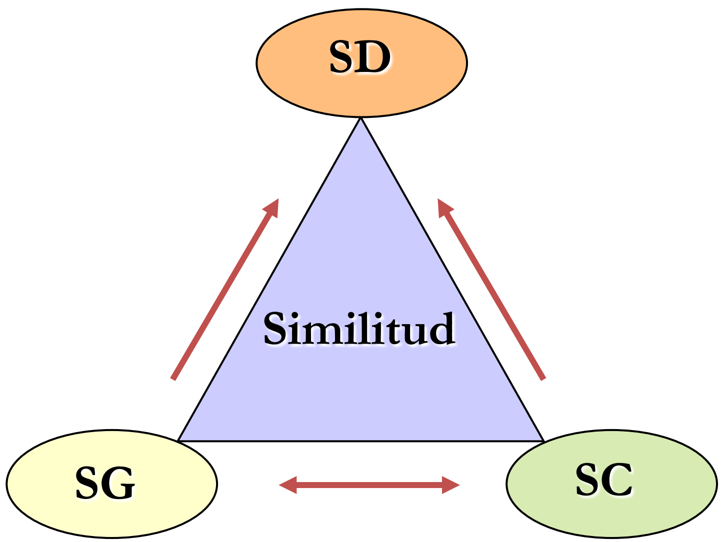
- **Similitud Cinemática:** Dos flujos son cinemáticamente similares cuando las velocidades en puntos correspondientes están en la misma dirección y se relacionan en magnitud mediante un factor de escala constante. De tal manera, dos flujos que son cinemáticamente similares también tienen patrones de líneas de corriente que se relacionan por un factor de escala constante. Puesto que las fronteras forman las líneas de corriente límite, los flujos que son cinemáticamente similares deben de ser geométricamente similares. En principio la similitud cinemática requeriría que un túnel de viento de sección transversal infinita se utilizara para obtener datos correspondientes al arrastre sobre un objeto, con el propósito de modelar correctamente el funcionamiento en un campo de flujo infinito. En la práctica, esta restricción puede relajarse considerablemente permitiendo el uso de equipo de tamaño razonable.

La similitud cinemática requiere que los regímenes de flujo sean los mismos en el modelo y en el prototipo, Si los efectos de compresibilidad o cavitación, que pueden cambiar incluso los patrones cualitativos del flujo, no están presentes en el flujo de prototipo, deben evitarse en el flujo del modelo.

Condiciones de semejanza entre los flujos del modelo y el prototipo

Similitud Dinámica: Se establece cuando dos flujos tienen distribuciones de fuerza tales que tipos idénticos de fuerzas son paralelos y se relacionan en magnitud por medio de un factor de escala constante en todos los puntos correspondientes. Los requerimientos para la similitud dinámica son los más restrictivos: dos flujos deben poseer tanto similitud geométrica como cinemática para ser similares dinámicamente. Para establecer las condiciones requeridas para la similitud dinámica completa, deben considerarse todas las fuerzas que son importantes en la situación del flujo. Así, los efectos de fuerzas viscosas, de presión, de tensión superficial, etc., deben tomarse en cuenta. Es necesario establecer las condiciones de prueba de manera que todas las fuerzas importantes se relacionen mediante el mismo factor de escala entre los flujos del modelo y del prototipo. Cuando existe la similitud dinámica, los datos medidos en un flujo de modelo pueden relacionarse cuantitativamente con las condiciones en el flujo de prototipo.

Condiciones de semejanza entre los flujos del modelo y el prototipo



¿ Cuáles son las condiciones para asegurar la similitud dinámica entre los flujos del modelo y del prototipo ?

Para alcanzar la similitud dinámica entre flujos geométricamente similares, debemos duplicar al menos uno de los grupos adimensionales obtenidos con el teorema Pi de Buckingham.

Ensayos entre Modelo y Prototipo

Para la perfecta semejanza dinámica se deberían cumplir simultáneamente las cinco ecuaciones:

1. $Re_m = Re_p$
2. $Eu_m = Eu_p$
3. $Fr_m = Fr_p$
4. $We_m = We_p$
5. $M_m = M_p$

El cumplimiento simultáneo de estas cinco ecuaciones es imposible, porque estas ecuaciones sólo pueden cumplirse si la escala es 1/1. Por esta razón, se escoge de estas ecuaciones una sola, la que más se ajuste al fenómeno.

Así por ejemplo en el ensayo de un perfil de ala de avión en un túnel aerodinámico, se ve inmediatamente que las fuerzas de tensión superficial son despreciables; si el aire se supone incompresible las fuerzas elásticas tampoco existen. Las fuerza de la gravedad no altera la configuración de la corriente. Lo importante en este problema en particular es mantener los números de Reynolds iguales en el modelo y en el prototipo. Si esto se cumple las configuraciones de corriente en el modelo y en el prototipo serán semejantes.

Relaciones de escala según la Ley de Froude y según la Ley de Reynolds

- Según la Ley de Froude: $$\frac{V_m}{\sqrt{L_m}} = \frac{V_p}{\sqrt{L_p}} \rightarrow \frac{V_p^{\ 2}}{V_m^{\ 2}} = \frac{L_p}{L_m} = \lambda$$

  Escala de Velocidades: $$\frac{V_p}{V_m} = \sqrt{\frac{L_p}{L_m}} \rightarrow \frac{V_p}{V_m} = \sqrt{\lambda}$$

- Según la Ley de Reynolds: $$\frac{\rho_m V_m L_m}{\mu_m} = \frac{\rho_p V_p L_p}{\mu_p}$$

  Supongamos que se utiliza el mismo fluido en el modelo y en el prototipo $V_m L_m = V_p L_p$

  Escala de Velocidades: $$\frac{V_p}{V_m} = \frac{L_m}{L_p} = \frac{1}{\lambda}$$

Parámetros adimensionales de Turbomáquinas Hidráulicas: Bombas, Ventiladores y Turbinas

Variables relativas a la máquina:

- Q = *Caudal de fluido manejado.*
- H = *Altura intercambiada con el fluido.*
- D = *Diámetro del rodete de la máquina.*
- N = *RPM de la máquina.*
- P_m = *Potencia mecánica en el eje.*
- η = *eficiencia total de la máquina.*

Variables relativas al fluido:

- ρ = *Densidad del fluido.*
- μ = *Viscosidad absoluta del fluido.*

$$f\left(Q, H, D, N, \eta, P_m, \rho, \mu\right) = 0$$

Relación funcional dimensional

Parámetros adimensionales de Turbomáquinas Hidráulicas: Bombas, Ventiladores y Turbinas

MLT *m*=3 *n*-*m*=8-3= 5 N^ros^ Π

$$\phi = \frac{Q}{ND^3}$$ **Coeficiente de Gasto**

$$\eta$$ **Eficiencia**

$$\psi = \frac{gH}{N^2 D^2}$$ **Coeficiente de Altura**

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho D^2 N}{\mu}$$ **Número de Reynolds**

$$\hat{P} = \frac{P_m}{\rho N^3 D^5}$$ **Coeficiente de Potencia**

Parámetros adimensionales de Turbomáquinas Hidráulicas: Bombas, Ventiladores y Turbinas

Relación funcional adimensional:

$$\frac{gH}{N^2D^2}, \eta, \frac{P_m}{\rho N^3 D^5} = g\left[\frac{Q}{ND^3}, \frac{\rho D^2 N}{\mu}\right]$$

El Nro de Reynolds de del alabe es muy elevado y se ha comprobado experimentalmente que su influencia sobre el funcionamiento de la máquina es muy pequeño y se puede despreciar.

$$\psi, \eta, \hat{P} = g(\phi)$$

Parámetros adimensionales de Turbomáquinas Hidráulicas: Bombas, Ventiladores y Turbinas

- **Similitud:** entre modelo y prototipo

$$\phi_m = \phi_p \rightarrow \frac{Q_m}{N_m D_m^3} = \frac{Q_p}{N_p D_p^3}$$

$$\psi_m = \psi_p \rightarrow \frac{H_m}{N_m^{\,2} D_m^{\,2}} = \frac{H_p}{N_p^{\,2} D_p^{\,2}}$$

$$\hat{P}_m = \hat{P}_p \rightarrow \frac{P_{m\,m}}{\rho_m N_m^{\,3} D_m^{\,5}} = \frac{P_{m\,p}}{\rho_p N_p^{\,3} D_p^{\,5}}$$

Parámetros adimensionales de Turbomáquinas Hidráulicas: **Bombas, Ventiladores y Turbinas**

- **Parámetros simplificados:** se obtienen al aplicarlos a una misma máquina.

$$\phi_1 = \phi_2 \rightarrow \frac{Q_1}{N_1} = \frac{Q_2}{N_2} \rightarrow Q_2 = Q_1 \frac{N_2}{N_1}$$

$$\psi_1 = \psi_2 \rightarrow \frac{H_1}{{N_1}^2} = \frac{H_2}{{N_2}^2} \rightarrow H_2 = H_1 \left(\frac{N_2}{N_1} \right)^2$$

$$\hat{P}_1 = \hat{P}_1 \rightarrow \frac{P_{m1}}{{N_1}^3} = \frac{P_{m2}}{{N_2}^3} \rightarrow P_{m2} = P_{m1} \left(\frac{N_2}{N_1} \right)^3$$

Una bomba maneja un caudal de 0.25 m^3/s cuando gira a 1750 *RPM* con una altura de 40 *m*. Si se necesita que la bomba de un caudal de 0.5 m^3/s, ¿a qué rpm se debe hacer girar la bomba y qué altura manejaría en estas condiciones?

Datos:

Tabla 3.2. Datos parámetros simplificados

Parámetros de funcionamiento (1)	Parámetros de funcionamiento (2)
$Q_1 = 0.25 \frac{m^3}{s}$	$Q_2 = 0.5 \frac{m^3}{s}$
$N_1 = 1750\ RPM$	$N_2 = ?$
$H_{B_1} = 40\ m$	$H_{B_2} = ?$

a) N_2 Régimen de revoluciones en (2)

$$\phi_1 = \phi_2$$

$$\frac{Q_1}{N_1} = \frac{Q_2}{N_2}$$

$$N_2 = N_1 \frac{Q_2}{Q_1}$$

Sustituyendo:

$$N_2 = 1750\ rpm \frac{0.5}{0.25}$$

$$N_2 = 3500\ rpm$$

b) H_{B_2} Altura de bombeo en (2)

$$\psi_1 = \psi_2$$

$$\frac{H_1}{{N_1}^2} = \frac{H_2}{{N_2}^2}$$

$$H_{B_2} = H_{B_1} \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2$$

$$H_{B_2} = 40\ m \left(\frac{3500}{1750}\right)^2$$

$$H_{B_2} = 160\ m$$

Problemas

Un disco gira cerca de una superficie fija. El radio del disco es R, y el espacio entre el disco y la superficie se llena con un líquido de viscosidad μ. El espaciamiento entre el disco y la superficie es h, y el disco gira a velocidad angular ω. Encuentre la dependencia entre el momento de torsión sobre el disco, T, y las demás variables.

Considere una esfera lisa, de diámetro D, inmersa en un fluido que se mueve a una velocidad V. La fuerza de arrastre sobre un globo meteorológico de 3 m de diámetro en el aire, que se mueve a 1.5 m/s, se va a calcular a partir de datos de prueba. La prueba se va a efectuar en agua, empleando un modelo de 50 mm de diámetro. Bajo condiciones de similitud dinámica, la fuerza de arrastre del modelo se mide como 3.78 N. Evalúe la velocidad de prueba del modelo y la fuerza de arrastre esperada sobre el globo a escala natural. RESP: Vm=6.21 m/s, Fp=0.78 N

La altura de la bomba se puede escribir en términos del incremento de presión $\Delta P = \gamma H_B$· La tabla muestra datos para el prototipo y para un modelo geométricamente similar. Para condiciones de similitud dinámica entre el modelo y prototipo. Calcule los valores que faltan en la tabla.

VARIABLE	PROTOTIPO	MODELO
ΔP		74.9 KPa
Q	1,25 m^3/min	
ρ	800 Kg/m^3	999 Kg/m^3
ω	10 rad/s	100 rad/s
D	60 mm	120 mm

Una prueba de modelo se efectúa para determinar las características de vuelo de un disco volador. Los parámetros dependientes son la fuerza de arrastre F_A y la fuerza de sustentación F_S. Los parámetros independientes deben incluir la velocidad angular ω, y la altura de la rugosidad, h, la velocidad de desplazamiento del disco V, y las propiedades del fluido ρ y μ. Determine los parámetros adimensionales adecuados y exprese la dependencia funcional adimensional entre ellos. La prueba empleando aire sobre un disco modelo a escala ¼ será geométrica, cinemática y dinámicamente similar a la del prototipo. Los valores del prototipo son V_p=20 pies/s y ω_p=100 RPM. ¿Qué valores de V_m y ω_m deben emplearse?

Se va a construir un modelo para estudiar el desempeño de una turbina cuyo rodete tiene un diámetro de 1 *m*, una salida máxima de 2200 *KW* bajo una carga de 50 m y una velocidad de 240 *RPM*. Determine el diámetro del rodete del modelo y su velocidad si la potencia correspondiente del modelo es de 9 *KW* y la carga es de 7.6 *m*.

Se necesita una turbina de agua que opere a 420 *RPM* bajo una carga neta de 3 m, una descarga de 0.312 *m3/s* y con una eficiencia de 0.9. Se realizarán pruebas con un modelo a escala de 1/6 que opera a 2000 *RPM* utilizando agua. Para la turbina modelo determine la carga, la razón de flujo, la potencia producida.

- Al terminar el estudio de este cápitulo, el estudiante será capaz de:

  * Caracterizar el flujo fluido mediante parámetros adimensionales
  * Obtener lo parámetros adimensionales aplicando el teorema de Pi.
  * Planificar experimentos en base a la medición de parámetros adimensionales.
  * Explicar el concepto de similitud entre modelo y prototipo, en el flujo fluido.

Mediciones en Mecánica de Fluidos

En el laboratorio de ingeniería y en muchas situaciones industriales es importante medir las propiedades de fluidos y diversos parámetros de flujo, como presión, velocidad y descarga. Ejemplos serían el requerimiento de medición de la razón de flujo en una tubería o canal de irrigación, las presiones máximas en la superficie de un rascacielos o los patrones de flujo alrededor de él; el arrastre sobre un automóvil o camión que viaja a gran velocidad; el campo de velocidad alrededor de un avión comercial, los movimientos de fluidos en las industrias agrícolas, petrolera, del gas, química y de las bebidas, así como el suministro de agua y la disposición de aguas de desecho. etc. La incertidumbre en las mediciones de éstos flujos pueden tener un impacto significativo sobre las consideraciones de materiales y costos.

Se han diseñado muchos dispositivos para medir parámetros de flujo, cada uno con un propósito específico y es importante definir con claridad la necesidad de medir un parámetro en particular. El conocimiento de la mecánica de fluidos es indispensable para seleccionar el instrumento apropiado y para realizar con éxito la medición. El propósito de este tema es ofrecer al lector una introducción básica a los conceptos y técnicas que los ingenieros aplican al medir parámetros de flujo ya sea en el laboratorio o en un entorno industrial. Se presentan métodos e instrumentos empleados para medir presión, velocidad y descarga.

Medición de parámetros de flujo local

Una medición de flujo local implica que una cantidad se mide en un volumen de muestra del fluido relativamente pequeño. Por lo regular, el volumen es lo bastante reducido como para poder decir que la medición representa la magnitud de la cantidad en un punto del campo de flujo. Dos cantidades de flujo local importantes son la presión y la velocidad, otras son temperatura, densidad y viscosidad.

Respuesta dinámica y promediación

Las mediciones de flujo se pueden clasificar según la naturaleza del flujo: estable o inestable. Si la magnitud de una cantidad física se mantiene constante en el tiempo, decimos que se trata del valor en estado estable. Por otro lado si la cantidad cambia con el tiempo, la medición es transitoria, o inestable y exigen aparatos de medición altamente especializados y requieren cierto tiempo para responder a la cantidad física detectada y con un tiempo menor que el tiempo que tarda en ocurrir un cambio significativo en la cantidad física.