

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

Guía de Turbomáquinas

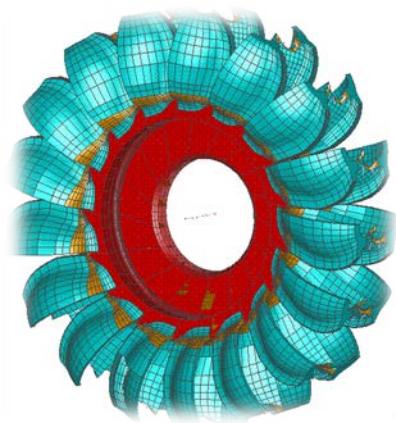
Escuela de Mecánica
Departamento de Ciencias Térmicas



Prof. Jesús Muñoz

Prof. Rafael Santos

2014



INGENIERÍA MECÁNICA

Capítulo 1

Introducción a las turbomáquinas

1. Introducción

1.1. Máquinas y máquinas de fluido

1.2. Clasificación de las máquinas de fluido

1.2.1 Máquinas de desplazamiento positivo

1.2.2 Turbomáquinas

1.2.2.1 Definición de Turbomáquinas.

1.2.2.2 Definición de los elementos constructivos comunes

1.2.2.3 Clasificación de las Turbomáquinas

1.2.2.4 Vistas y proyecciones utilizadas en el análisis.

Capítulo 1 Introducción a las Turbomáquinas

1. Introducción

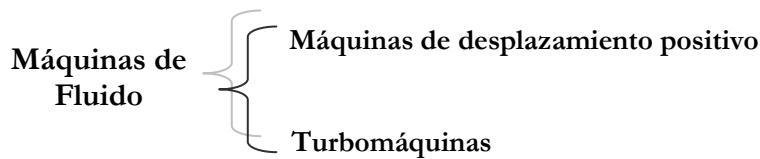
En este capítulo se presentan los fundamentos teóricos sobre la clasificación de las turbomáquinas, lo cual es fundamental para el desarrollo y aplicación de los conceptos de la termodinámica y dinámica de fluidos en los capítulos siguientes.

1.1 Máquinas y máquinas de fluido

Una máquina es un transformador de energía, absorbe energía de una forma y restituye energía de otra.

Las máquinas de fluido, son máquinas en que el fluido, proporciona la energía que absorbe la máquina o el fluido es el receptor de energía, al que la máquina restituye la energía mecánica absorbida.

1.2 Clasificación de las máquinas de fluido



1.2.1. Máquinas de desplazamiento positivo

También llamadas máquinas volumétricas. El órgano intercambiador de energía cede energía al fluido o el fluido a él en forma de energía de presión creada por la variación de volumen. Los cambios en la dirección y valor absoluto de la velocidad del fluido no juegan papel esencial alguno. En éstas el órgano transmisor de la energía puede moverse tanto con movimiento alternativo como con movimiento rotativo. A este tipo de máquinas pertenecen las máquinas usadas en las transmisiones y controles hidráulicos y neumáticos.

1.2.2 Turbomáquinas

Las turbomáquinas son los dispositivos de uso común que proporcionan energía o extraen energía de un fluido en movimiento mediante hélices o alabes giratorios. Las bombas y los compresores suministran energía al fluido, con el resultado de que aumenta la presión en él, haciendo también que ocurra un flujo. La turbina extrae energía de un fluido y la convierte en alguna otra forma útil; por lo regular, en potencia eléctrica.

1.2.2.1 Definición de Turbomáquina

Una Turbomáquina intercambia energía continuamente con un fluido y transforma la energía mecánica que entra por un eje a energía cinética y de presión y cinética que se le comunica al fluido o viceversa. El intercambio de energía se realiza en un rotor o impulsor provisto de alabes o paletas, el cual interactúa con el fluido a través del principio de conservación de cantidad de movimiento angular.

En las turbomáquinas llamadas también máquinas de corriente, los cambios en la dirección y valor absoluto de la velocidad del fluido juegan un papel esencial. El órgano transmisor de energía (conocido como rodete, rotor o impulsor) se mueve siempre con movimiento rotativo. El principio de funcionamiento de las turbomáquinas es la ecuación de Euler. Son máquinas dinámicas y ocurren cambios de velocidades importantes dentro de ellas. Las bombas dinámicas proporcionan generalmente mayor caudal que las bombas de desplazamiento positivo y una descarga más estacionaria, pero son poco efectivas para bombeo líquidos muy viscosos.

1.2.2.2 Definición de los elementos constructivos comunes.

Toda turbomáquina consta de las siguientes partes fundamentales (ver Fig. 1.1):

Eje. Transporta la energía mecánica hacia o desde la máquina.

Rotor o impulsor. Rueda con paletas o alabes que rota solidaria con el eje, a través del cual fluye el fluido continuamente intercambiando energía por medio del principio de conservación de cantidad de movimiento angular.

Estator. Corona con paletas o alabes fijos a la carcasa. No existe intercambio de energía con el fluido. Su función es controlar la dirección del fluido y transformar la velocidad del fluido a presión o viceversa.

Carcaza. Envoltorio de la máquina. Puede actuar como Estator sin alabes en máquinas radiales y mixtas.

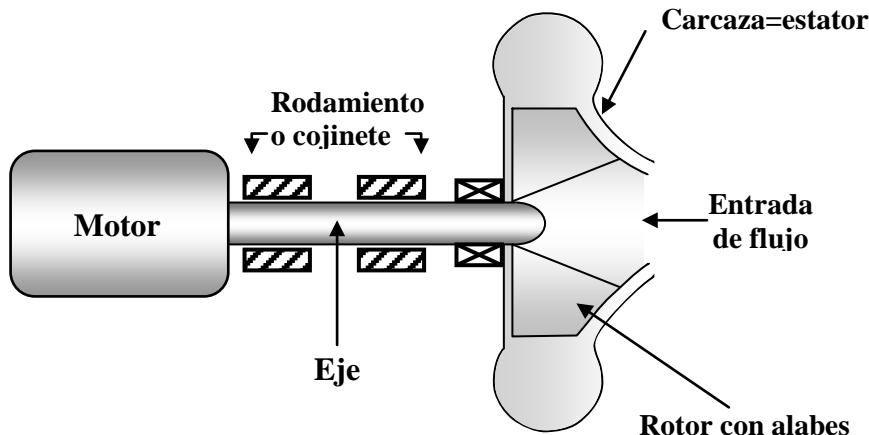


Figura 1.1. Bomba o compresor centrífugo. Esquema meridional

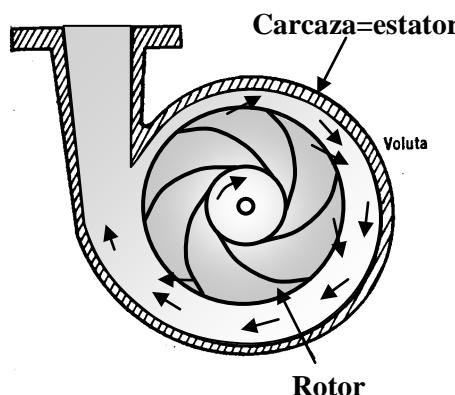


Figura 1.2. Bomba o compresor centrífugo. Esquema transversal

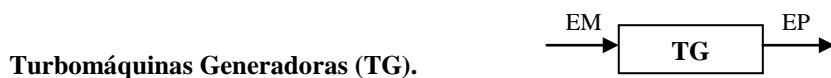
1.2.2.3. Clasificación de las Turbomáquinas.

Según el fluido de trabajo:

Turbomáquinas Hidráulicas (TH). Fluido incompresible o líquido ($\rho = \text{cte.}$)

Turbomáquinas Térmicas (TT). Fluido compresible o gas ($\rho = \text{cte.}$)

Según la dirección del intercambio de energía entre fluido y rodete:



Son aquellas que añaden energía a un fluido. La energía mecánica absorbida por la máquina en el eje se restituye al fluido y este sale con más presión y energía cinética que la que tenía a la entrada.



Son aquellas que extraen energía del fluido. En estas el fluido suministra a la máquina una energía preferiblemente de presión proveniente por ejemplo de la energía geodésica que poseía en el embalse y que a su vez la maquina (turbina) transforma en energía mecánica.

Donde: EM = energía mecánica

EP = energía de presión

Las **Turbomáquinas Hidráulicas Generadoras (THG)** son las Bombas y los Ventiladores. El fluido de trabajo en un ventilador es aire; sin embargo, el incremento de presión que experimenta el aire a través de la máquina es muy bajo por lo que se puede aproximar como un fluido incompresible ($\rho = \text{cte.}$). Las bombas se emplean para impulsar toda clase de líquidos (agua, aceites de lubricación, combustibles, ácidos; líquidos alimenticios: cerveza, leche, etc.; estas últimas constituyen el grupo importante de las bombas sanitarias). También se emplean las bombas para bombear líquidos espesos con sólidos en suspensión, como pastas de papel, melazas, fangos, desperdicios, etc. Los ventiladores por su parte se necesitan para distribuir aire por el equipo a través de la ductería hasta los recintos que deben tener aire acondicionado.

Las **Turbomáquinas Térmicas Generadoras (TTG)** son los Compresores.

Los ventiladores, sopladores y compresores se utilizan para aumentar la presión del aire y mover éste u otros gases. Las diferencias básicas entre ellos se hallan en su forma y las presiones que pueden desarrollar gracias a ese diseño. Un ventilador se diseña para operar contra presiones estáticas pequeñas, hasta 2.0 lb/pulg^2 (13.8 KPa). Las presiones típicas de operación para ventiladores son desde 0 hasta 1.5 KPa. A presiones desde 2.0 lb/pulg^2 hasta aproximadamente 10.0 lb/pulg^2 (69 KPa), el dispositivo que genera el movimiento del gas se le llama soplador. Para desarrollar altas presiones, tan altas como algunos miles de lb/pulg^2 , se utilizan compresores.

Las **Turbomáquinas Hidráulicas Motoras (THM)** son las Turbinas Hidráulicas: Pelton, Francis, Kaplan o Axial. Estas turbinas dominan la generación de energía eléctrica aprovechando los saltos de agua correspondientes a algunos metros, hasta centenares o miles de metros de desnivel.

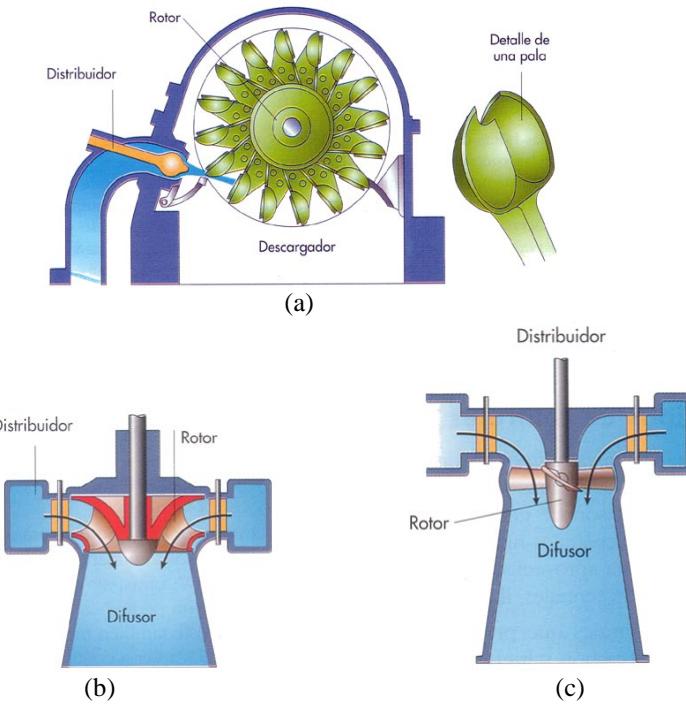
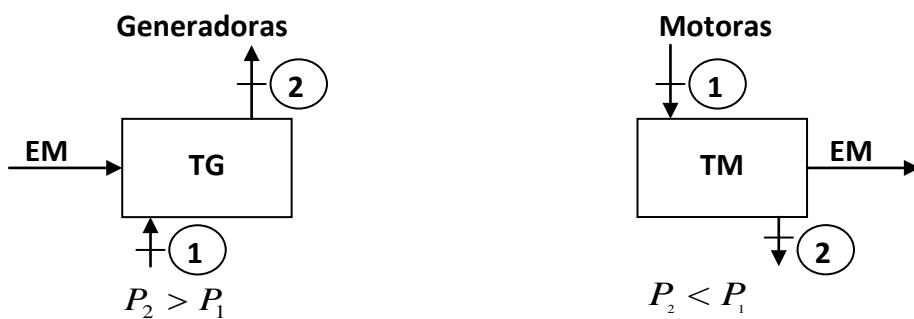


Figura 1.3. (a) Turbina Pelton, (b) turbina Francis y (c) turbina Kaplan

Las **Turbomáquinas Térmicas Motoras (TTM)** son las Turbinas de Gas, donde el fluido de trabajo es un gas producto de combustión y las Turbinas de Vapor, donde el fluido de trabajo es vapor de agua sobre calentado. Las turbinas de gas y de vapor se usan también para generar electricidad. Las turbinas de gas tienen aplicación en la propulsión aérea para producir el empuje que equilibre la resistencia al avance de las aeronaves.

En las Turbomáquinas existen canales móviles de flujo en el rotor o impulsor y canales fijos de flujo en el estator. Los canales fijos y móviles en TG actúan como difusores para la velocidad absoluta y relativa respectivamente- En TM los canales fijos y móviles actúan como toberas para la velocidad absoluta y relativa respectivamente.



El fluido sufre un proceso de compresión. Los canales de flujo deben actuar como difusores.

El fluido sufre un proceso de expansión. Los canales de flujo deben actuar como toberas.

Figura 1.4. Efecto de las turbomáquinas sobre la presión

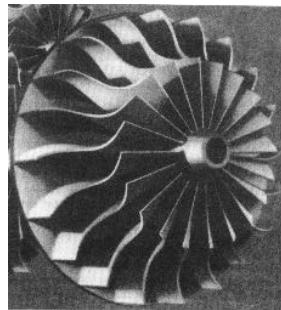


Figura 1.5. Rotor de un compresor centrífugo

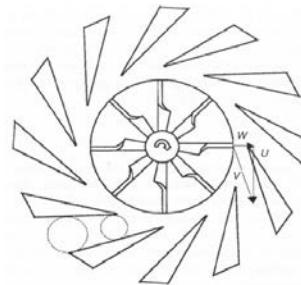


Figura 1.6. Canales móviles y fijos de un compresor centrífugo.
Los canales fijos del estator actúan como difusor.

Una etapa se define como la pareja de un rotor y un estator. La Fig. 1.7 muestra la conformación de una etapa en Turbomáquinas Generadoras y Motoras.

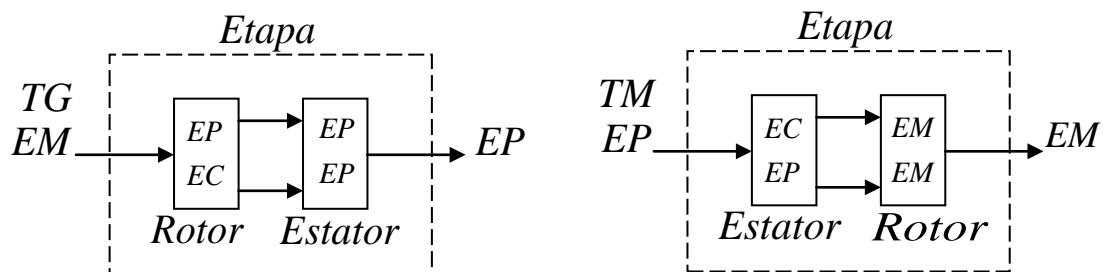


Figura 1.7. Conformación de una etapa en turbomáquinas generadoras y motoras

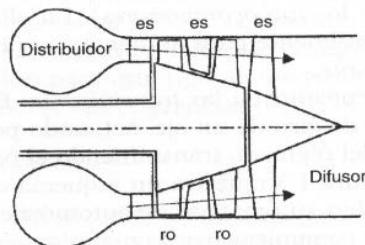


Figura 1.9. Compresor axial de cuatro escalones.

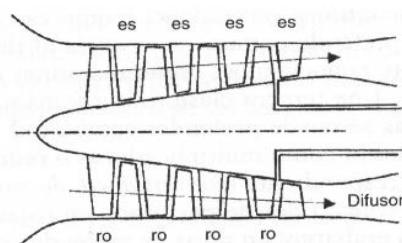


Figura 1.8. Turbina térmica axial de dos escalones o etapas.

Según la variación de presión estática en los alabes:

De acción. El aumento o reducción de la presión ocurre solamente en los canales fijos del estator.

De reacción. El aumento o reducción de la presión ocurre tanto en los canales móviles del rotor como en los canales fijos del estator.

El grado de reacción de una turbomáquina es la fracción de trabajo intercambiado con el fluido que es trabajo de presión que absorbe o cede el fluido. El trabajo total intercambiado es la suma de la energía dinámica y la energía de presión. Las turbomáquinas en que el grado de reacción es igual a cero se llaman de acción. Todas las bombas y los compresores son de reacción; las bombas y compresores de acción no suelen construirse.

Las turbinas hidráulicas de acción constituyen la clase especial de las turbinas Pelton. También se construyen turbinas de vapor de impulso.

Según la dirección del flujo con respecto al eje:

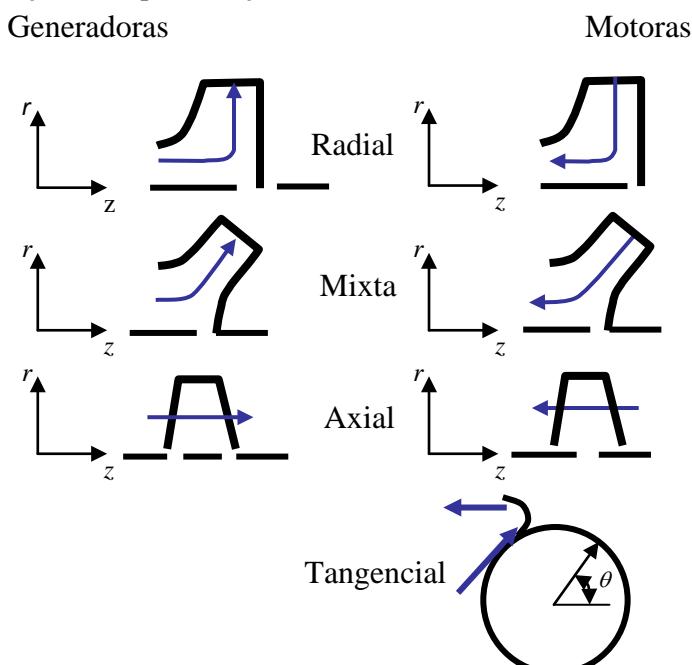


Figura 1.10 Dirección del flujo con respecto al eje

En la máquina radial la velocidad en ningún punto del rodete tiene componente axial (según el eje z); sólo tiene dos componentes: tangencial y radial.

En la máquina axial la velocidad en ningún punto tiene componente radial (según el eje r); sólo tiene dos componentes: axial y periférica.

En la máquina de flujo mixto o radio-axial velocidad tiene tres componentes según los tres ejes.

En ninguna máquina falta la componente tangencial de la velocidad, cuya variación a su paso por la máquina es esencial en la transmisión de la energía.

Las turbinas hidráulicas Pelton constituyen una clase especial, porque en ellas el flujo es meramente tangencial.

Las turbinas de vapor de las centrales térmicas modernas son máquinas axiales.

Las turbinas hidráulicas son rara vez radiales. La turbina Francis frecuentemente es de flujo mixto. La turbina Kaplan es de flujo axial.

La bomba centrífuga es una turbomáquina de tipo radial con flujo de adentro hacia afuera, presentando por lo general un área de paso reducida en relación con el diámetro del rotor o impulsor, con objeto de obligar al fluido a hacer un recorrido radial largo y aumentar la acción centrífuga, a fin de incrementar la carga estática, que es lo que generalmente se pretende con este tipo de bomba, aunque el caudal en parte se sacrifique.

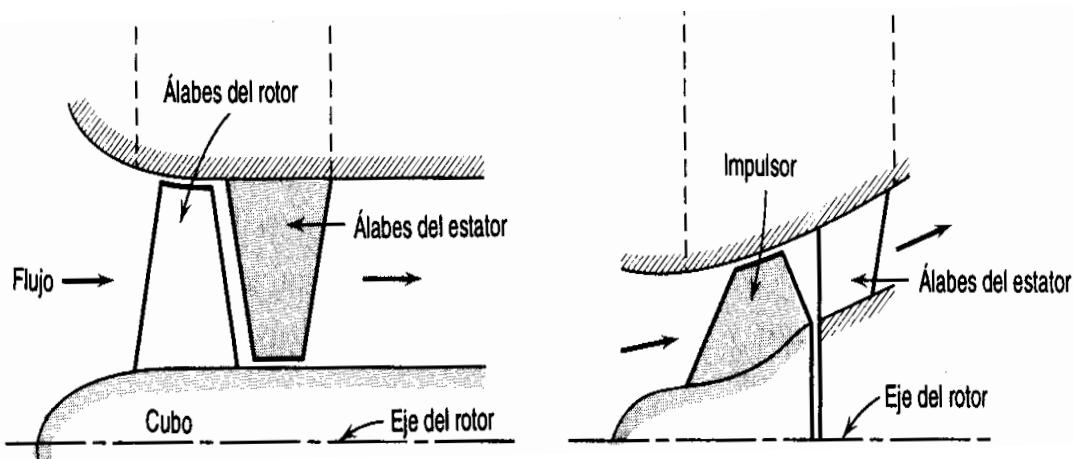


Figura 1.11. Bombas de flujo axial y mixto. De reacción

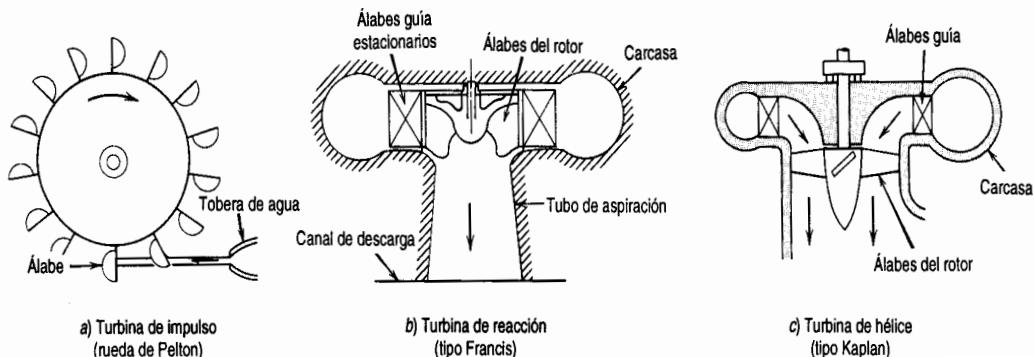
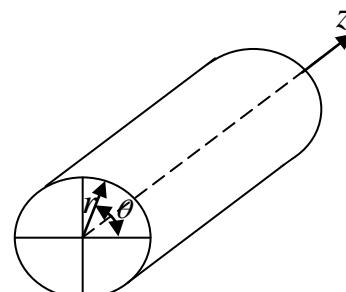


Figura 1.12. (a) Turbina Pelton de impulso y flujo tangencial. (b) Turbina Francis de reacción y flujo mixto. (c) Turbina Kaplan de reacción y flujo axial

1.2.2.4. Vistas y proyecciones utilizadas en el análisis.

Las Turbomáquinas se estudian en un sistema coordenado cilíndrico: axial, radial y tangencial (z, r, θ). Para facilitar el análisis se divide el problema tridimensional en dos problemas bidimensionales unidos por una dirección común.



Los planos y vistas utilizadas en el análisis de las *Turbomáquinas centrífugas radiales y mixtas* se esquematizan en la Fig. 1.13. El plano Meridional contiene al eje de la máquina y está formado por las direcciones axial y radial de un sistema coordenado cilíndrico. Se observa el ancho de los álabes a la entrada y salida del rotor, B_1 y B_2 , y los diámetros a la entrada y salida del rotor, D_1 y D_2 . El plano transversal es perpendicular al eje y está formado por las direcciones radial y tangencial de un sistema coordinado cilíndrico. Se observa la forma y los ángulos β'_1 y β'_2 de los alabes y los diámetros de entrada y salida del rotor, D_1 y D_2 . Los ángulos del alabe se forman entre una tangente al alabe y una tangente al círculo de entrada y salida.

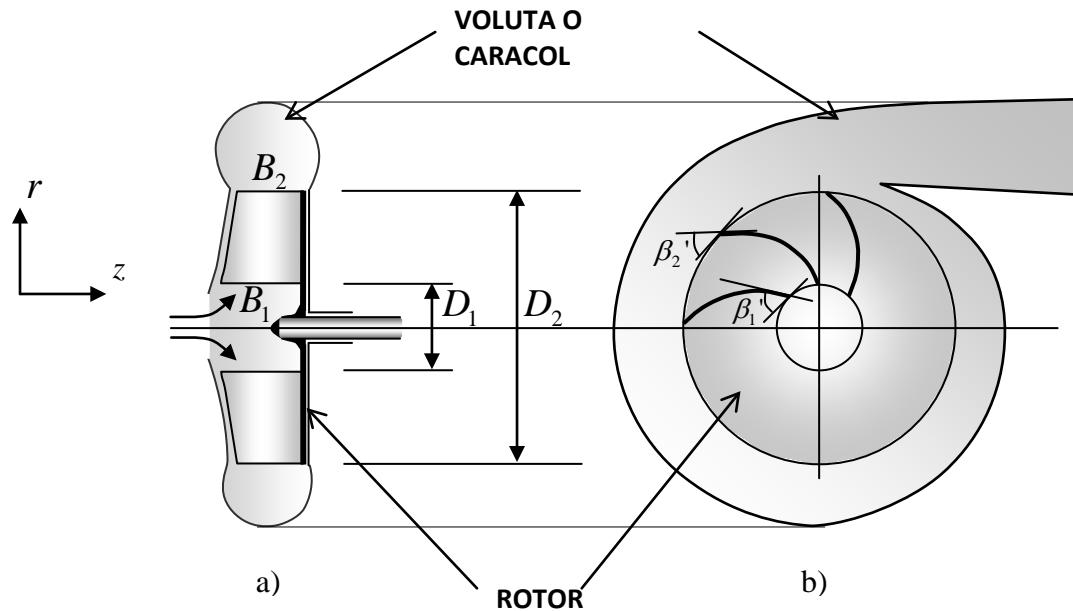


Figura 1.13. Bomba o compresor centrífugo. a) Esquema meridional b) Plano transversal

La Fig. 1.14 muestra los planos y vistas utilizadas en el análisis de Turbomáquinas axiales. El plano Meridional contiene al eje de la máquina y está formado por las direcciones axial y radial de un sistema coordenado cilíndrico. Se observa la proyección circular del alzado de los alabes y el canal anular de flujo conformado por la carcasa, D_t , y el cubo del rotor, D_r . El plano Transversal es perpendicular al eje y está formado por las direcciones radial y tangencial de un sistema coordenado cilíndrico, pero no es de utilidad en el análisis de éste tipo de Turbomáquinas. La rejilla o cascada plana de alabes, por el contrario, si tiene gran utilidad y se define como una superficie cilíndrica de radio medio ' r_m ', interceptada con los alabes del rotor y estator y desarrollada, sobre un plano conformado por las direcciones axial y tangencial. Se observa el perfil aerodinámico de los alabes y los ángulos β'_1 y β'_2 de los alabes a la entrada y salida del rotor. Los ángulos del alabe se forman entre una tangente a la línea media del alabe y la dirección axial a la entrada y salida del rotor.

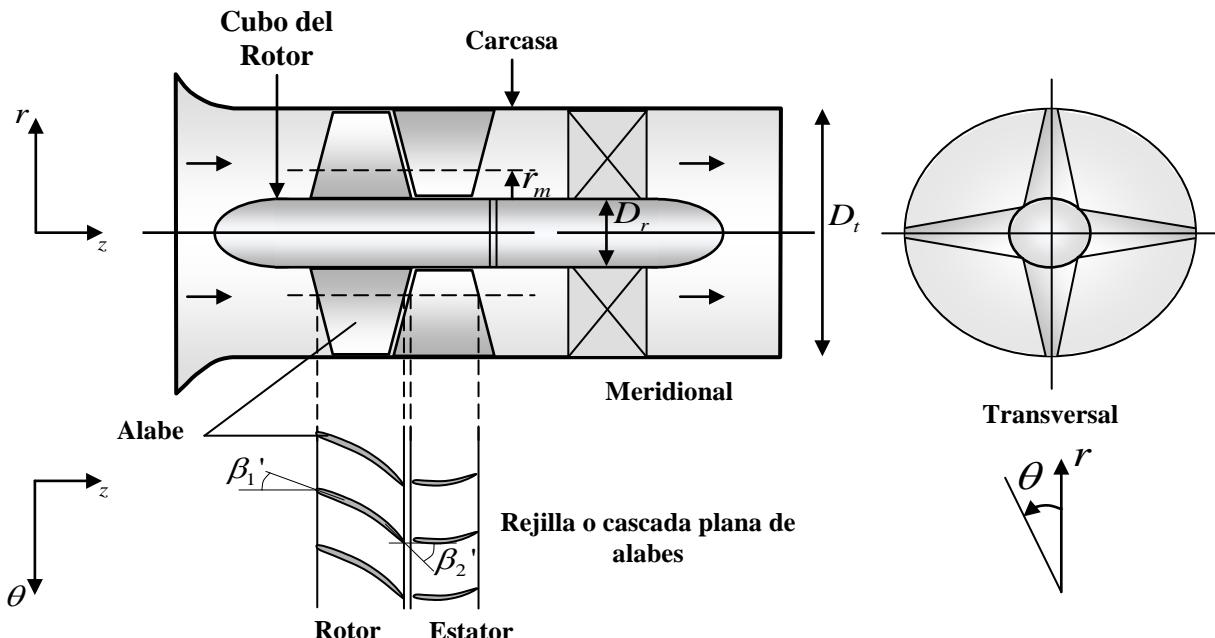


Figura 1.14. Vistas en Turbomáquinas axiales. Con la rejilla o cascada plana de alabes denotada en línea punteada.

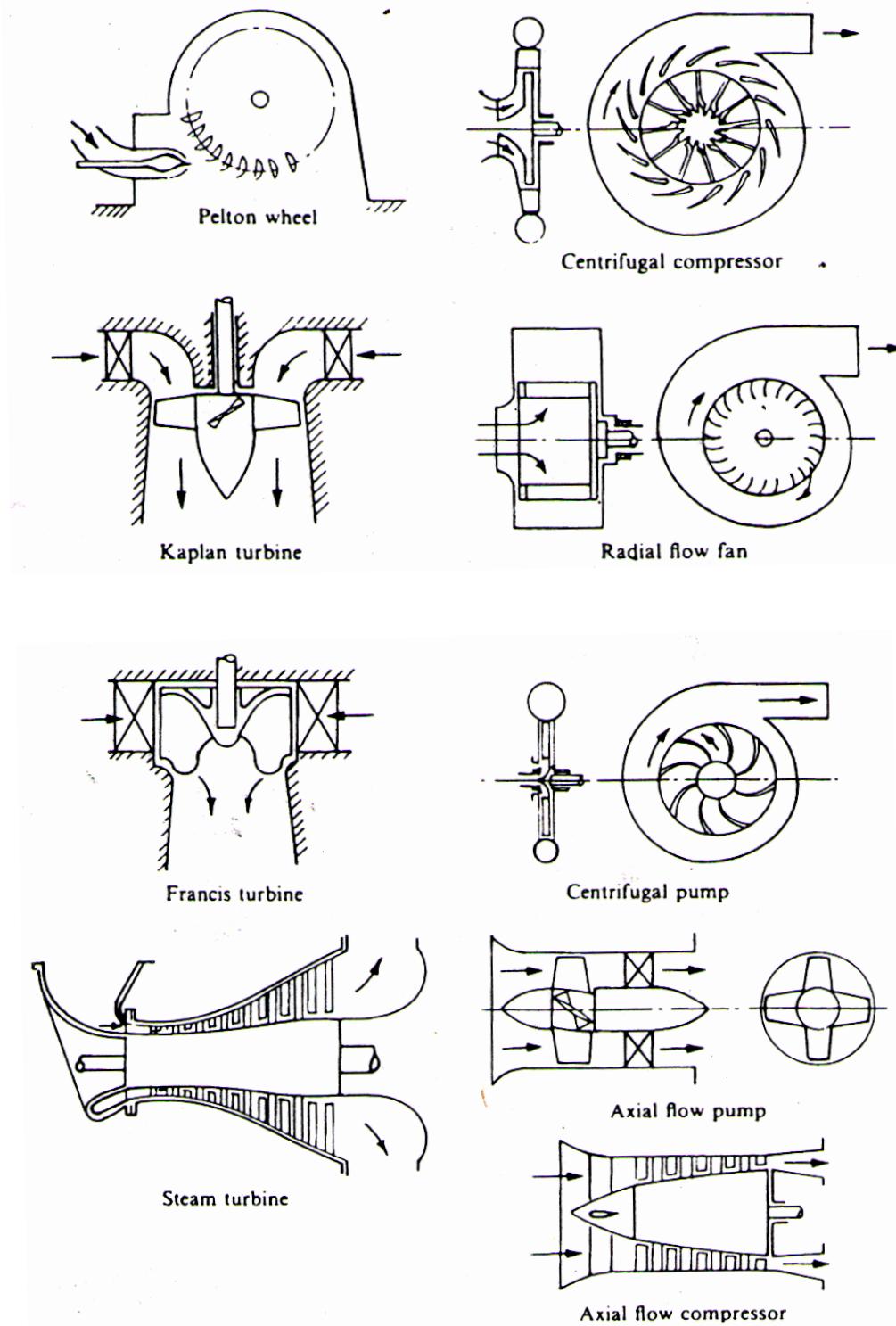


Figura 1.15 Turbinas, compresores, bombas y ventiladores

Capítulo 2

Termodinámica de las turbomáquinas

2. La ecuación de conservación de la energía.

2.1 Aplicación a Turbomáquinas Térmicas (1ra. Ley de la Termodinámica)

2.1.1 Aplicación a Turbomáquinas Térmicas Generadoras.

Compresores

2.1.2 Aplicación a Turbomáquinas Térmicas Motoras.

Turbinas Térmicas

2.2 Aplicación a Turbomáquinas Hidráulicas (Ecuación de Bernoulli)

2.2.1 Aplicación a Turbomáquinas Hidráulicas Generadoras, (THG).

Bombas y Ventiladores

2.2.2 Aplicación a Turbomáquinas Hidráulicas Motoras, (THM).

Turbinas hidráulicas

2.3 Aplicación global a sistemas de bombeo.

2.4 Aplicación global a sistemas sencillos de ventilación.

2.5 Aplicación global a Turbinas Hidráulicas

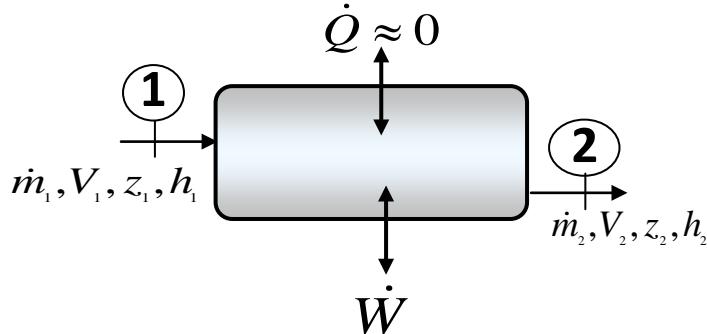
3. Problemas.

Capítulo 2
TERMODINÁMICA DE LAS TURBOMÁQUINAS

2. La ecuación de conservación de energía.

2.1 Aplicación a Turbomáquinas Térmicas (1ra. Ley de la Termodinámica).

Se considera la Turbomáquina como una caja negra. El fluido entra por la sección 1 y sale por la sección 2, existiendo la posibilidad de intercambiar calor y trabajo de eje con el ambiente. Se supone régimen permanente y condiciones uniformes en las secciones de entrada y salida. El flujo se supone esencialmente unidimensional.



Ecuación Integral de conservación de la masa:

Flujo permanente

$$0 = \frac{d}{dt} \left(\int_{V_c}^0 \rho dV \right) + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dot{m}$$

Ecuación Integral de Energía:

Flujo permanente

$$\cancel{\dot{Q}} - \dot{W} \approx 0 = \frac{d}{dt} \left(\int_{V_c}^0 e \rho dV \right) + \int_{SC} \left(e + \frac{p}{\rho} \right) \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

El calor \dot{Q} intercambiado se puede despreciar por las siguientes razones:

1. La velocidad del fluido es muy elevada en el interior de la Turbomáquina, es decir, existe un corto tiempo de permanencia del fluido y no hay tiempo suficiente para intercambiar una cantidad sustancial de calor.
2. Baja conductividad térmica del fluido de trabajo.
3. Reducida área de contacto.
4. Temperaturas moderadas a excepción de las turbinas térmicas.

Por lo tanto, el flujo se puede suponer adiabático con $\dot{Q} \approx 0$.

El principio de conservación de energía puede escribirse en forma simplificada como:

$$\pm \dot{W}_{1-2} = \dot{m} \left[\left(e_2 + \frac{p_2}{\rho_2} \right) - \left(e_1 + \frac{p_1}{\rho_1} \right) \right] \quad (2.1)$$

Donde e es el flujo de energía específica o energía por unidad de masa. El contenido de energía específica de un fluido en una sección de flujo cualquiera es:

$$\text{Energía Cinética} = e_c = \frac{v^2}{2}$$

$$\text{Energía Potencial} = e_p = gz$$

$$\text{Energía Interna} = e_i = u$$

El término $e_f = \frac{p}{\rho}$ es la energía de flujo.

La entalpía estática del fluido se define como:

$$h = u + \frac{P}{\rho} = e_i + e_f$$

El balance del flujo de energía específica entre la entrada y la salida de la Turbomáquina se puede escribir entonces como:

$$\pm \dot{W}_{1-2} = \dot{m} \left[\left(h_2 + \frac{V_2^2}{2} + gz_2 \right) - \left(h_1 + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 \right) \right] \quad (2.2)$$

Donde:

\dot{W}_{1-2} = Potencia mecánica intercambiada.

Dividiendo entre el flujo mísico, \dot{m} , se obtiene:

$$\pm w_{1-2} = \left(h_2 + \frac{V_2^2}{2} + gz_2 \right) - \left(h_1 + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 \right) \quad (2.3)$$

El trabajo específico de eje, w_{1-2} , intercambiado con el ambiente siempre existe en Turbomáquinas. Se toma el signo positivo en compresores y el signo negativo en turbinas. De esta manera, el trabajo W_{1-2} , calculado siempre es positivo.

La energía potencial de un gas es muy pequeña debido a que su peso específico es muy bajo (el peso específico del agua es aproximadamente 1000 veces el peso específico del aire). Por lo tanto, $\Delta gz \approx 0$

La ec. (1.4) se escribe ahora como:

$$\pm w_{1-2} = \left(h_2 + \frac{V_2^2}{2} \right) - \left(h_1 + \frac{V_1^2}{2} \right) \quad (2.4)$$

La entalpía total o de estancamiento, h_0 , se define como:

h_0 = entalpía estática + entalpía dinámica.

$$h_0 = h + \frac{V^2}{2} \quad (2.5)$$

Donde el estado total o de estancamiento y el estado estático están unidos por un proceso isentrópico, tal como se muestra en Fig. 2.1.

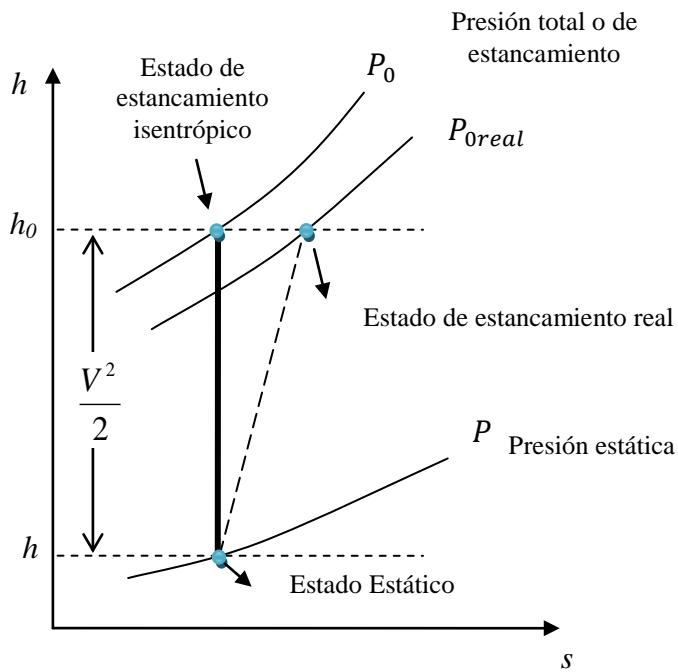


Figura 2.1. Estado total o de estancamiento y estático

La entalpía de estancamiento representa la entalpía de un fluido cuando éste se lleva al reposo adiabáticamente. Durante un proceso de estancamiento, la energía cinética de un fluido se convierte en entalpía (energía interna + energía de flujo), lo cual produce un aumento en la temperatura y presión del fluido. Las propiedades de un fluido en el estado de estancamiento se denominan propiedades de estancamiento. El estado de estancamiento y las propiedades de estancamiento se indican con el subíndice 0, h_0, T_0, P_0

El estado de estancamiento recibe el nombre de estado de estancamiento isentrópico cuando el proceso de estancamiento es reversible tanto como adiabático.

En los procesos de estancamiento reales la presión de estancamiento es menor que la presión de estancamiento isentrópica como consecuencia de la fricción del fluido. En los dos casos la entalpía de estancamiento ($y T_0$ en gases ideales) es la misma.

Cuando el fluido es un gas ideal la entalpía puede sustituirse por $C_p T$.

$$C_p T_0 = C_p T + \frac{V^2}{2} \quad (2.6)$$

$$T_0 = T + \frac{V^2}{2C_p} \quad (2.7)$$

T_0 recibe el nombre de **temperatura de estancamiento** (o total), y representa la temperatura que un gas ideal alcanzará cuando se lleva adiabáticamente al reposo.

La presión que un fluido alcanza cuando se lleva al reposo isentrópicamente recibe el nombre de **presión de estancamiento** P_0 . Para gases ideales con calores específicos constantes, P_0 se relaciona con la presión estática del fluido por medio de la ecuación.

$$\frac{P_0}{P} = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (2.8)$$

Usando la entalpía total, el balance de energía resulta en:

$$\pm w_{1-2} = h_{02} - h_{01} \quad (2.9)$$

2.1.1 Aplicación a Turbomáquinas Térmicas Generadoras (TTG)

Compresores

El diagrama $h-s$ del proceso en una etapa de compresión se muestra en la Fig. 1.16:

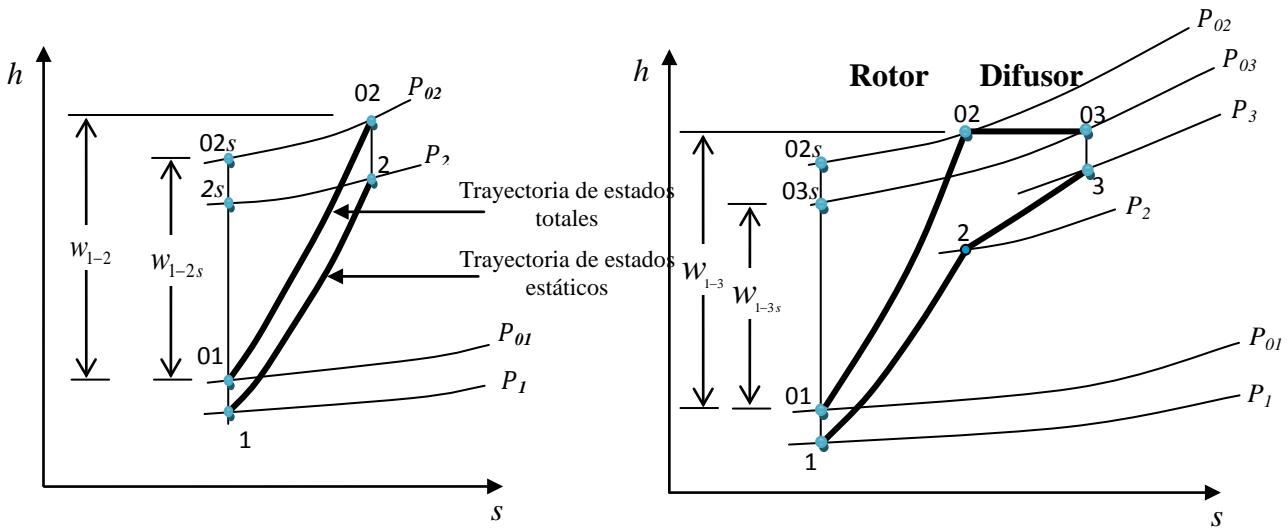


Figura 2.2. Diagrama entalpía- entropía del proceso en una etapa de compresión.

Figura 2.2a. Punto 02 salida compresor. Figura 2.2b. Punto 03 salida del compresor.

Con referencia a la Fig. 2.2a; el trabajo específico realmente comunicado al fluido para comprimirlo entre los niveles $P_{01} - P_{02}$ es:

$$w_{1-2} = h_{02} - h_{01} \quad (2.10)$$

Para un gas $h_0 = C_p T_0$

$$w_{1-2} = C_p(T_{02} - T_{01}) \quad (2.11)$$

La potencia real o potencia intercambiada en el rotor es:

$$\dot{W}_{real} = \dot{W}_{rotor} = \dot{W}_{1-2} = \dot{m}w_{1-2} \quad (2.12)$$

El trabajo ideal isentrópico requerido para comprimir entre los mismos niveles de presión es:

$$w_{1-2s} = h_{02s} - h_{01} = C_p(T_{02s} - T_{01}) \quad (2.13)$$

La diferencia entre w_{1-2} y w_{1-2s} se debe a las irreversibilidades internas del tipo hidráulico que ocurren por fricción entre el fluido y el metal, cambios bruscos de dirección del fluido, separación de capa límite, etc. El trabajo perdido en este tipo de irreversibilidades es:

$$w_{ph1-2} = w_{1-2} - w_{1-2s} \quad (2.14)$$

$$w_{ph1-2} = h_{02} - h_{02s} \quad (2.15)$$

Se define el rendimiento interno o rendimiento hidráulico o rendimiento adiabático total a total del compresor como:

$$\eta_i = \eta_h = \eta_{0-0} = \frac{h_{02s} - h_{01}}{h_{02} - h_{01}} = \frac{T_{02s} - T_{01}}{T_{02} - T_{01}} \quad (2.16)$$

La potencia mecánica \dot{W}_{mec} proporcionada por el motor de accionamiento debe ser mayor que la potencia realmente comunicada al fluido por el rotor, en una cantidad suficiente para vencer las pérdidas mecánicas que ocurren en los rodamientos o cojinetes, prensa estopas o sellos mecánicos, etc.

La Fig. 2.3 es un esquema de las diferentes potencias involucradas en el compresor, observándose que el rendimiento mecánico del compresor se puede definir como:

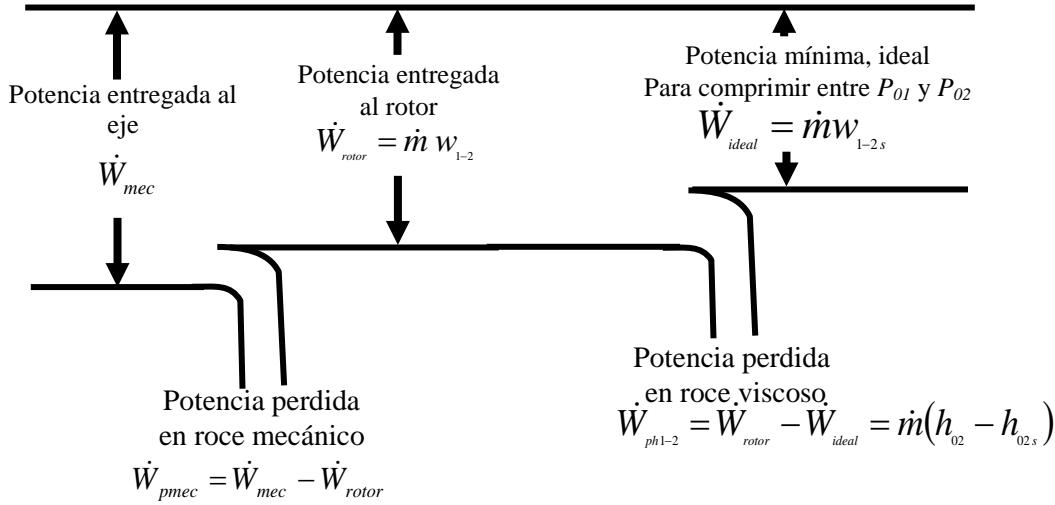


Figura 2.3 Potencias involucradas en el proceso de compresión.

La eficiencia mecánica del compresor se puede definir de la siguiente forma:

$$\eta_{mec} = \frac{\dot{W}_{rotor}}{\dot{W}_{mec}} \quad (2.17)$$

El rendimiento total o global del compresor se define como;

$$\eta_c = \frac{\dot{W}_{ideal}}{\dot{W}_{mec}} \quad (2.18)$$

$$\eta_c = \frac{\dot{W}_{ideal}}{\dot{W}_{rotor}} \frac{\dot{W}_{rotor}}{\dot{W}_{mec}} \quad (2.19)$$

$$\eta_c = \eta_i \eta_{mec} \quad (2.20)$$

Para un gas perfecto se tiene que:

$$C_p = \frac{kR}{k-1} \quad (2.21)$$

$$C_v = \frac{R}{k-1} \quad (2.22)$$

$$k = \frac{C_p}{C_v} \quad (2.23)$$

$$\frac{P_0}{P} = \left(\frac{T_0}{T} \right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (2.24)$$

El trabajo específico real se puede calcular en términos de las presiones temperaturas de la siguiente manera:

$$w_{1-2} = h_{02} - h_{01} = \frac{h_{02s} - h_{01}}{\eta_i} = \frac{C_p T_{01}}{\eta_i} \left(\frac{T_{02s}}{T_{01}} - 1 \right) \quad (2.25)$$

WW

$$w_{1-2} = \frac{kRT_{01}}{(k-1)\eta_i} \left[\left(\frac{P_{02}}{P_{01}} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right] \quad (2.26)$$

En casos donde las velocidades de entrada y salida del compresor se relativamente pequeñas, se puede definir el rendimiento interno aproximadamente función de los estados estáticos.

$$\eta_i = \eta_h = \eta_{0-0} = \frac{T_{2s}-T_1}{T_2-T_1} \quad (2.27)$$

La Fig. 2.2b. es una ampliación de la Fig. 2.2a para diferenciar el proceso en el rotor y en el difusor. En este caso, el punto 2 está ubicado a la salida del rotor y entrada al difusor y el punto 3 es la salida del compresor, lo cual debe tenerse en cuenta para utilizar las ecs. (2.10) a la (2.27)

Los compresores son turbomáquinas térmicas lo que implica que la densidad varía desde la entrada hasta la salida del rotor, luego el estator continúa incrementando la presión estática y por supuesto la densidad. La ecuación de estado de gases ideales nos muestra la proporcionalidad entre la presión y la densidad:

$$\rho = \frac{P}{RT} \quad (2.28)$$

En un compresor, la conservación de la masa se puede escribir como sigue:

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dot{m}_3 = \dot{m}$$

En un etapa de compresión (conjunto Rotor+Estator), haciendo un estudio detallado, el estado 1 del gas es la entrada al compresor, comenzando en el rotor, el estado 2, la salida del rotor y entrada al estator, y, el estado 3 es la salida del compresor.

En un compresor en el que el flujo comienza a intercambiar energía con el rotor en la dirección radial se tiene:

$$\rho_1 C_{1r} A_1 = \rho_2 C_{2r} A_2 = \rho_3 C_{3r} A_3 \quad (2.29)$$

Donde:

C_{1r} es la componente de la velocidad absoluta en la dirección radial, en la entrada del rotor.

C_{2r} es la componente de la velocidad absoluta en la dirección radial, en la salida de rotor.

C_3 es la velocidad promedio del flujo en el ducto de salida del compresor.

A_1 es el área en la entrada del rotor, en un compresor centrifugo en el que el flujo comienza a intercambiar energía con el rotor en la dirección radial $A_1 = \pi D_1 B_1$, donde D_1 y B_1 son el diámetro y el ancho del álabe en la entrada al rotor respectivamente.

A_2 es el área en la salida del rotor, en un compresor centrifugo en $A_2 = \pi D_2 B_2$

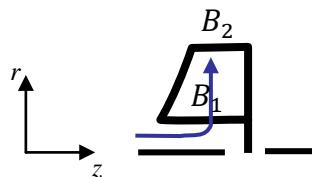


Figura 2.4 compresor centrifugo con entrada radial

En un compresor en el que el flujo comienza a intercambiar energía con el rotor en la dirección axial se tiene:

$$\rho_1 C_{1z} A_1 = \rho_2 C_{2z} A_2 = \rho_3 C_{3z} A_3 \quad (2.30)$$

C_{1z} es la componente de la velocidad absoluta en la dirección axial, en la entrada del rotor.

A_1 es el área anular en la entrada del rotor, $A_1 = \pi(r_t^2 - r_r^2)$ donde r_t y r_r , es el radio de tope y de raíz en la entrada del rotor respectivamente.

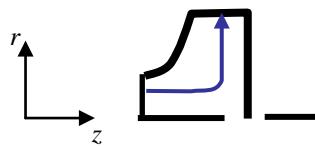


Figura 2.5 compresor centrifugo con entrada axial

En un compresor axial el área de flujo es un área anular que se calcula usando los diámetros de tope y raíz, la componente de la velocidad que se usa para calcular el flujo es la velocidad axial, la cual por criterio de diseño se mantiene constante, así se tiene:

$$\rho_1 C_{1z} A_1 = \rho_2 C_{2z} A_2 = \rho_3 C_{3z} A_3 \quad (2.31)$$

Donde:

$$C_{1z} = C_{2z} = C_{3z}$$

$$\rho_1 A_1 = \rho_2 A_1 = \rho_3 A_3$$

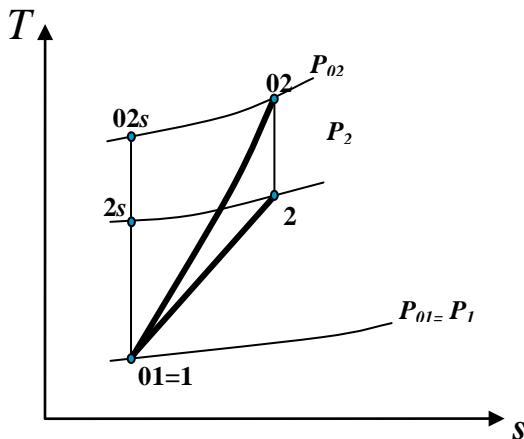
Lo que implica según esta ecuación, que la sección de flujo debe ir reduciéndose y la densidad aumentando, para cumplir con la continuidad. (Ver figura 1.15)

Ejemplo 2.1

Un turbocompresor toma aire de la atmósfera a 101.35 KPa (14.7 psia) y 15.56°C (60°F) y lo descarga a una presión estática de 517.10 KPa (75 psig) y una temperatura estática de 265.56°C (510.01°F). El flujo másico comprimido es 0.73 Kg/s (1.61 lbm/s) y la velocidad del aire en la descarga del compresor es 91.44 m/s (300 ft/s).

Calcular:

- La eficiencia adiabática o interna del compresor.
- La potencia en KW del motor de accionamiento si la eficiencia mecánica del compresor es 98%.
- La eficiencia global del compresor.



Datos:

$$k = 1.4, C_p = 1.006 \frac{\text{KJ}}{\text{KgK}}$$

$$C_1 = \approx 0 \rightarrow P_{01} = P_1 = 101.35 \text{ KPa}$$

$$T_{01} = T_1 = 15.56^\circ\text{C} + 273.15 \text{ K} = 288.71 \text{ K}$$

$$C_2 = 91.44 \text{ m/s}$$

$$P_2 = 517.10 \text{ KPa} + 101.35 \text{ KPa} = 618.45 \text{ KPa}$$

$$T_2 = 265.56^\circ\text{C} + 273.15 \text{ K} = 538.71 \text{ K}$$

- Eficiencia adiabática o interna del compresor

$$\eta_{0-0} = \frac{T_{02s} - T_{01}}{T_{02} - T_{01}}$$

$$T_{02} = T_2 + \frac{C_2^2}{2C_p} = 538.71 \text{ K} + \frac{(91.44)^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{2 \times 1006 \frac{\text{J}}{\text{KgK}}} = 542.87 \text{ K}$$

Proceso isentrópico entre 02 y 2

$$P_{02} = P_2 \left(\frac{T_{02}}{T_2} \right)^{\frac{1}{k-1}} = 618.45 \text{ KPa} \left(\frac{542.87}{538.71} \right)^{\frac{1.4}{1.4-1}} = 635.33 \text{ KPa}$$

Proceso isentrópico entre 02 y 01

$$\frac{T_{02s}}{T_{01}} = \left(\frac{P_{02}}{P_{01}} \right)^{\frac{1}{k}}$$

$$T_{02s} = T_{01} \left(\frac{P_{02}}{P_{01}} \right)^{\frac{1}{k}} = 288.71 \text{ K} \left(\frac{635.33}{101.35} \right)^{\frac{1.4-1}{1.4}} = 487.78 \text{ K}$$

$$\eta_{0-0} = \frac{(487.78 - 288.71) \text{ K}}{(542.87 - 288.71) \text{ K}} = 0.7832$$

$$\eta_{0-0} = 78.32 \%$$

- b) Potencia en KW del motor de accionamiento

$$\dot{W}_{1-2} = \dot{m}w_{1-2} = 0.73 \frac{Kg}{s} \times 1.006 \frac{KJ}{KgK} (542.87 - 288.71) K$$

$$\dot{W}_{1-2} = 186.65 KW$$

$$\dot{W}_{mec} = \frac{\dot{W}_{1-2}}{\eta_{mec}} = \frac{186.65 KW}{0.98} = 190.46 KW$$

- c) Eficiencia global

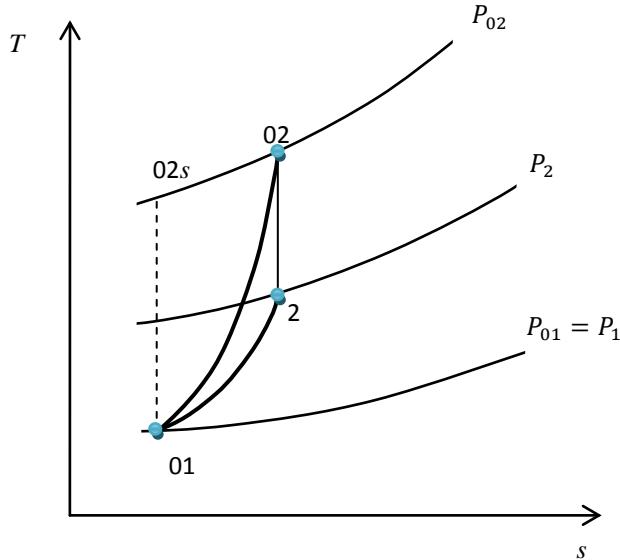
$$\eta_c = \eta_{0-0} \eta_{mec} = 0.7832 \times 0.98 = 0.7675, \quad \eta_c = 76.75\%$$

Ejemplo 2.2

Un turbocompresor comprime desde una presión atmosférica de $100 KPa$ y una temperatura de $30^\circ C$. Un manómetro colocado en el tubo de salida mide $400 KPa$ de presión mientras que la temperatura en ese mismo sitio es de $250^\circ C$. El gasto máscico a través del turbocompresor es de $0.4 Kg/s$ de aire y el diámetro de la tubería de descarga es de $4 cm$.

Calcular:

- a) El rendimiento interno del compresor.
- b) El numero de Mach a la salida del compresor.
- c) La Potencia de accionamiento si el rendimiento mecánico es de 95%.
- d) Eficiencia global del compresor



Datos:

$$P_{01} = 100 KPa$$

$$T_{01} = 30^\circ C + 273 K = 303 K$$

$$P_2 = 400 KPa + 101.35 KPa = 501.35 KPa$$

$$T_2 = 250^\circ C + 273 K = 523 K$$

$$\dot{m} = 0.4 \frac{Kg}{s}$$

$$D_2 = 4 cm$$

Área de la tubería de descarga del compresor

$$A_2 = \frac{\pi D_2^2}{4} = \frac{\pi 0.04^2 m^2}{4} = 1.2566 \times 10^{-3} m^2$$

- a) Rendimiento interno del compresor.

$$\eta_i = \frac{\dot{W}_{ideal}}{\dot{W}_{real}} = \frac{T_{02s} - T_{01}}{T_{02} - T_{01}}$$

$$\rho_2 = \frac{P_2}{R T_2} = \frac{501 KPa}{0.287 \frac{KJ}{KgK} \times 523 K} = 3.337 Kg/m^3$$

$$\dot{m} = \rho_2 C_2 A_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = \frac{\dot{m}}{\rho_2 A_2} = \frac{0.4 Kg/s}{3.337 Kg/m^3 \times 1.2566 \times 10^{-3} m^2} = 95.39 m/s$$

$$T_{02} = T_2 + \frac{C_2^2}{2 C_P} = 523K + \frac{(95.39)^2 \frac{m^2}{s^2}}{(2 \times 1006) \frac{J}{KgK}} = 527.52 K$$

Proceso isentrópico entre 02 y 2

$$P_{02} = P_2 \left(\frac{T_{02}}{T_2} \right)^{\frac{k}{k-1}} = 501 KPa \left(\frac{527.51}{523} \right)^{\frac{1.4}{1.4-1}} = 516.29 KPa$$

$$T_{02s} = T_{01} \left(\frac{P_{02}}{P_{01}} \right)^{\frac{k-1}{k}} = 303K \left(\frac{516.29}{100} \right)^{\frac{1.4-1}{1.4}} = 484.31 K$$

$$\eta_i = \frac{\dot{W}_{ideal}}{\dot{W}_{real}} = \frac{T_{02s}-T_{01}}{T_{02}-T_{01}} = \frac{(484.31-303)K}{(527.51-303)K} = 0.8076$$

b) Número de Mach a la salida del compresor.

$$M = \frac{C_2}{\sqrt{kR T_2}} = \frac{95.39 \frac{m}{s}}{\sqrt{1.4 \times 287 \frac{J}{KgK} \times 523K}} = 0.20$$

c) Potencia de accionamiento

$$\dot{W}_{mec} = \frac{\dot{W}_{rotor}}{\eta_{mec}} = \frac{\dot{m} C_p (T_{02}-T_{01})}{\eta_{mec}} = \frac{0.4 \frac{Kg}{s} (1.006) \frac{KJ}{KgK} (527.51-303)K}{0.95} = 95.09 KW$$

d) Eficiencia global del compresor

$$\eta_c = \eta_i \eta_{mec} = 0.8076 \times 0.95 = 0.7672$$

2.1.2 Aplicación a Turbomáquinas Térmicas Motoras (TTM)

Turbinas Térmicas

El proceso de expansión a través de una etapa de turbina se muestra en la Fig. 1.9 en un diagrama *h-s*:

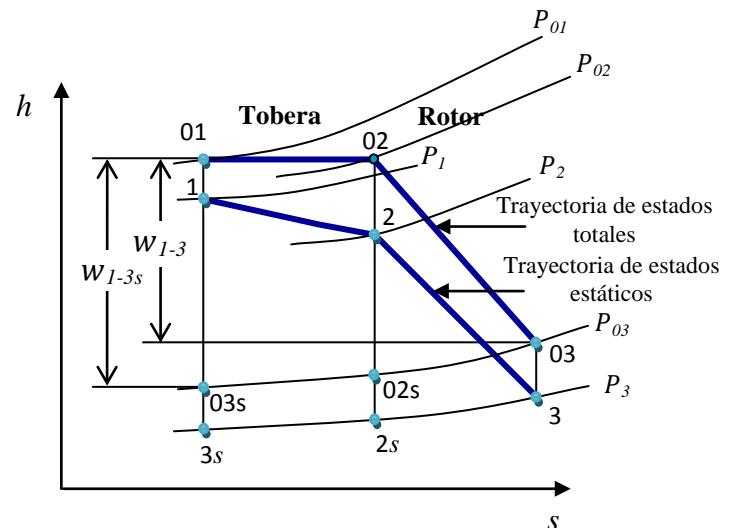
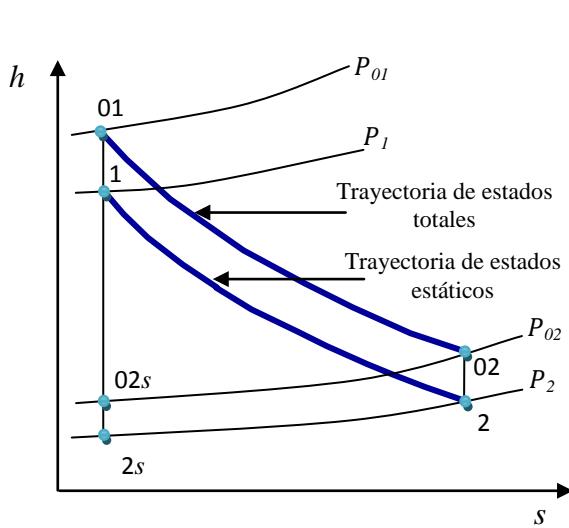


Figura 2.6. Diagrama entalpía - entropía del proceso en una etapa de turbina

Figura 2.6a Punto 02 salida turbina. Figura 2.6b Punto 03 salida turbina.

Con referencia a la Fig. 2.6a., el trabajo específico realmente extraído del fluido en la expansión desde P_{01} hasta P_{02} es:

$$w_{1-2} = h_{01} - h_{02} \quad (2.32)$$

La potencia real o potencia intercambiada en el rotor es:

$$\dot{W}_{real} = \dot{W}_{1-2} = \dot{W}_{rotor} = \dot{m} w_{1-2} \quad (2.33)$$

El trabajo ideal isentrópico que podría extraerse del fluido entre los mismos niveles de presión es:

$$w_{1-2s} = h_{01} - h_{02s} \quad (2.34)$$

La potencia ideal o potencia máxima que se puede extraer del fluido es:

$$\dot{W}_{ideal} = \dot{W}_{1-2s} = \dot{m} w_{1-2s} \quad (2.35)$$

La diferencia entre w_{1-2s} y w_{1-2} se debe a las irreversibilidades internas del tipo hidráulico que ocurren por fricción entre el fluido y el metal, cambios bruscos de dirección del fluido, separación de capa límite, etc. El trabajo perdido en este tipo de irreversibilidades es:

$$w_{ph1-2} = w_{1-2s} - w_{1-2} \quad (2.36)$$

$$w_{ph1-2} = h_{02} - h_{02s} \quad (2.37)$$

Se define el rendimiento interno o adiabático de la turbina como:

$$\eta_i = \eta_h = \eta_{0-0} = \frac{w_{1-2}}{w_{1-2s}} = \frac{h_{01}-h_{02}}{h_{01}-h_{02s}} \quad (2.38)$$

La potencia mecánica \dot{W}_{mec} que aparece en el eje de la turbina es menor que la potencia realmente extraída del fluido por el rotor, $\dot{W}_{rotor} = \dot{W}_{1-2} = \dot{m}w_{1-2}$, en una cantidad suficiente para vencer las pérdidas mecánicas que ocurren en los rodamientos o cojinetes, prensa estopas o sellos mecánicos, etc.

La Fig. 2.7 es un esquema de las diferentes potencias involucradas en la turbina, donde se puede observar que el rendimiento mecánico de la turbina se define como:

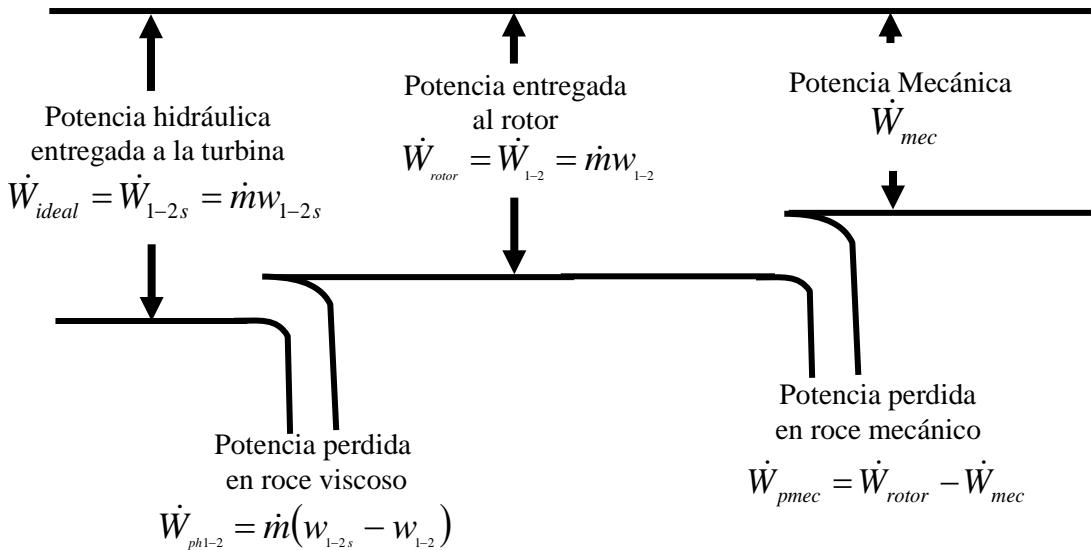


Figura 2.7 Potencias involucradas en el proceso de expansión en la turbina

$$\eta_{mec} = \frac{\dot{W}_{mec}}{\dot{W}_{1-2}} = \frac{\dot{W}_{mec}}{\dot{m}w_{1-2}} \quad (2.39)$$

El rendimiento total o global de la turbina se define como:

$$\eta_T = \frac{\dot{W}_{mec}}{\dot{W}_{1-2s}} \quad (2.40)$$

$$\eta_T = \frac{\dot{W}_{rotor}}{\dot{W}_{1-2s}} \frac{\dot{W}_{mec}}{\dot{W}_{rotor}} \quad (2.41)$$

$$\eta_T = \eta_i \eta_{mec}$$

En Turbinas de gas, el trabajo específico real se puede calcular en términos de las presiones y temperaturas de la siguiente manera:

$$w_{1-2} = C_p(T_{01} - T_{02}) = \eta_i C_p(T_{01} - T_{02s}) = \eta_i C_p T_{01} \left(1 - \frac{T_{02s}}{T_{01}}\right) \quad (2.42)$$

$$w_{1-2} = \frac{\eta_i k R T_{01}}{k-1} \left[1 - \left(\frac{P_{02}}{P_{01}}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right] \quad (2.43)$$

Cuando las velocidades de entrada y salida de la turbina son bajas, se puede escribir la eficiencia interna aproximadamente en función de los estados estáticos.

$$\eta_i = \frac{h_1 - h_2}{h_1 - h_{2s}} \quad (2.44)$$

La Fig. 2.6b es una ampliación de la Fig. 2.6a, para diferenciar el proceso en la tobera y en el rotor. En este caso, el punto 2 está ubicado a la salida de la tobera y entrada al rotor y el punto 3 es la salida del rotor, lo cual debe tenerse en cuenta para utilizar las ecs. (2.32) a la (2.44).

La continuidad en una turbina térmica radial con salida axial implica que (ver figura 2.5 con el flujo en sentido contrario):

$$\rho_1 C_1 A_1 = \rho_2 C_{2r} A_2 = \rho_3 C_{3z} A_3 \quad (2.45)$$

Donde:

C_1 y A_1 son la velocidad promedio y el área del ducto de entrada a la turbina.

C_{2r} es la componente radial de la velocidad absoluta en la entrada del rotor de la turbina y $A_2 = \pi D_2 B_2$ es el área en la entrada del rotor.

C_{3z} es la componente axial de la velocidad absoluta en la salida del rotor de la turbina y A_3 es el área anular en la salida del rotor.

La continuidad en una turbina térmica radial con salida radial se tiene (ver figura 2.4 con el flujo en sentido contrario):

$$\rho_1 C_1 A_1 = \rho_2 C_{2r} A_2 = \rho_3 C_{3r} A_3 \quad (2.46)$$

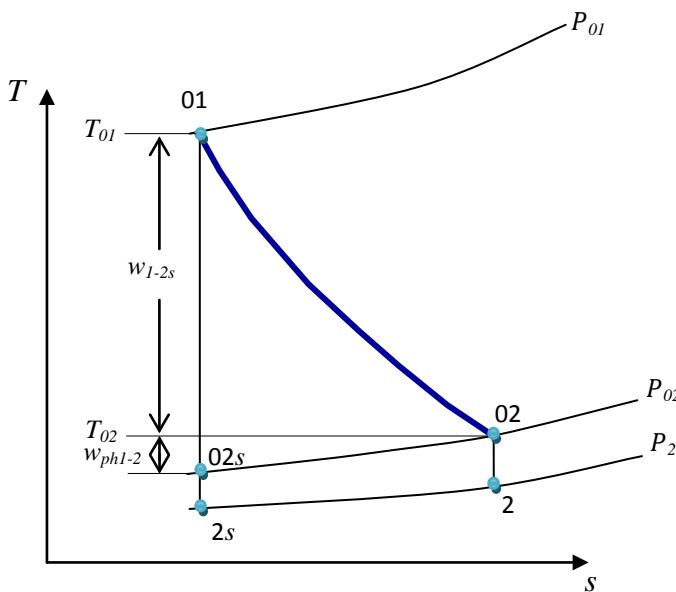
En las turbinas axiales, al igual que en un compresor axial, la velocidad axial se mantiene constante por criterio de diseño. En las turbinas ocurre una expansión en el flujo, la densidad disminuye y el área de flujo aumenta.

Ejemplo 2.3

Una turbina de gas produce una expansión desde las condiciones totales de 0.5 MPa y 1100 K hasta una presión estática de salida de 0.1 MPa , donde la velocidad es de 150 m/s . El trabajo perdido por las irreversibilidades que sufre el fluido en su paso a través de la maquina es 10% del trabajo ideal isentrópico. Considerando el fluido como un gas perfecto con las propiedades del aire.

Calcular:

- El trabajo perdido en irreversibilidades, w_{ph1-2}
- La eficiencia interna de la turbina, η_i .
- La potencia real extraída del fluido si el flujo máscico es $\dot{m} = 0.5 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$.
- La potencia en el eje si la potencia debido a pérdidas mecánicas es 5 KW .
- La eficiencia total o global de la turbina, η_T .



Datos:

$$k = 1.4$$

$$C_p = 1.006 \frac{\text{KJ}}{\text{KgK}}$$

$$P_{01} = 500 \text{ KPa}$$

$$T_{01} = 1100 \text{ K}$$

$$P_2 = 100 \text{ KPa}$$

$$C_2 = 150 \frac{m}{s}$$

$$w_{ph1-2} = 0.1 w_{1-2s}$$

- a) Trabajo perdido por irreversibilidades

$$w_{1-2s} = C_p(T_{01} - T_{02s})$$

$$T_{2s} = T_{01} \left(\frac{P_2}{P_{01}} \right)^{\frac{k-1}{k}} = 1100K \left(\frac{100}{500} \right)^{\frac{1.4-1}{1.4}} = 694.52 K$$

Suponiendo que $C_2 \cong C_{2s}$

$$T_{02s} = T_{2s} + \frac{C_2^2}{2C_p} = 694.52 K + \frac{(150)^2 \frac{m^2}{s^2}}{2 \times 1006 \frac{J}{KgK}}$$

$$T_{02s} = 705.70 K$$

$$w_{ph1-2} = 0.1(h_{01} - h_{02s}) = 0.1C_p(T_{01} - T_{02s})$$

$$w_{ph1-2} = 0.1 \times 1.006 \frac{KJ}{KgK} (1100 - 705.70) K$$

$$w_{ph1-2} = 39.67 \frac{KJ}{Kg}$$

- b) Eficiencia interna

$$\eta_i = \frac{h_{01} - h_{02}}{h_{01} - h_{02s}} = \frac{T_{01} - T_{02}}{T_{01} - T_{02s}}$$

$$w_{ph1-2} = h_{02} - h_{02s} = C_p(T_{02} - T_{02s})$$

$$T_{02} = \frac{w_{ph1-2}}{C_p} + T_{02s} = \frac{39.67 \frac{KJ}{Kg}}{1.006 \frac{KJ}{KgK}} + 705.70 K = 745.13 K$$

$$\eta_i = \frac{1100 - 745.13}{1100 - 705.70} = 0.90$$

$$\eta_i = 90\%$$

- c) Potencia en el rotor

$$\dot{W}_{1-2} = \dot{m}w_{1-2}$$

$$w_{1-2} = C_p(T_{01} - T_{02}) = 1.006 \frac{KJ}{KgK} (1100 - 745.13) K$$

$$w_{1-2} = 357.0 \frac{KJ}{Kg}$$

$$\dot{W}_{1-2} = 0.5 \frac{Kg}{s} \times 357.0 \frac{KJ}{Kg} = 178.5 \frac{KJ}{s} = 178.5 KW$$

- d) Potencia mecánica

$$\dot{W}_{mec} = \dot{W}_{1-2} - \dot{W}_{pmec} = 178.5 KW - 5 KW = 173.5 KW$$

- e) Rendimiento total de la turbina

$$\eta_T = \eta_i \eta_{mec}$$

$$\eta_{mec} = \frac{\dot{W}_{mec}}{\dot{W}_{1-2}} = \frac{173.5 KW}{178.5 KW} = 97.2\%$$

$$\eta_T = 0.9 \times 0.972 = 0.8748$$

$$\eta_T = 87.48\%$$

Ejemplo 2.4

Una etapa axial de turbina de gas desarrolla una potencia mecánica de $3.6 MW$ en el eje cuando opera un flujo másico de $28 \frac{Kg}{s}$. Las condiciones totales a la entrada de la etapa son $780 KPa$ y $1100 K$. El gas llega a las toberas axialmente y sale del rotor axialmente. A la salida de las toberas la presión estática es de $480 KPa$, la velocidad del gas es de $450 \frac{m}{s}$ y el gas sale formando un ángulo de 70° con la dirección axial. Determinar:

a) La velocidad axial, el número de Mach a la salida de las toberas y la caída de presión por fricción en las toberas.

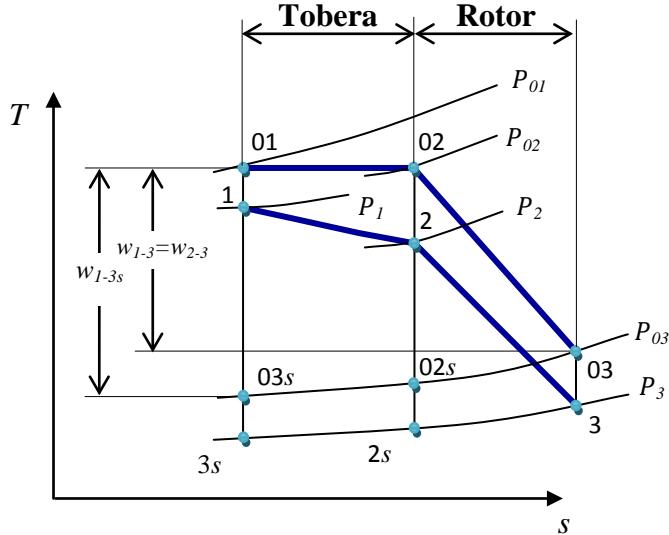
b) La eficiencia adiabática total-a-total de la etapa si el aumento de entropía del gas a su paso por el rotor es de $2.8 \frac{J}{KgK}$ y la eficiencia mecánica es 97%.

c) La potencia perdida por irreversibilidades del tipo hidráulico y mecánico. Dibujar un diagrama $h-s$ para visualizar el proceso en la etapa y un esquema de potencias con todos sus valores.

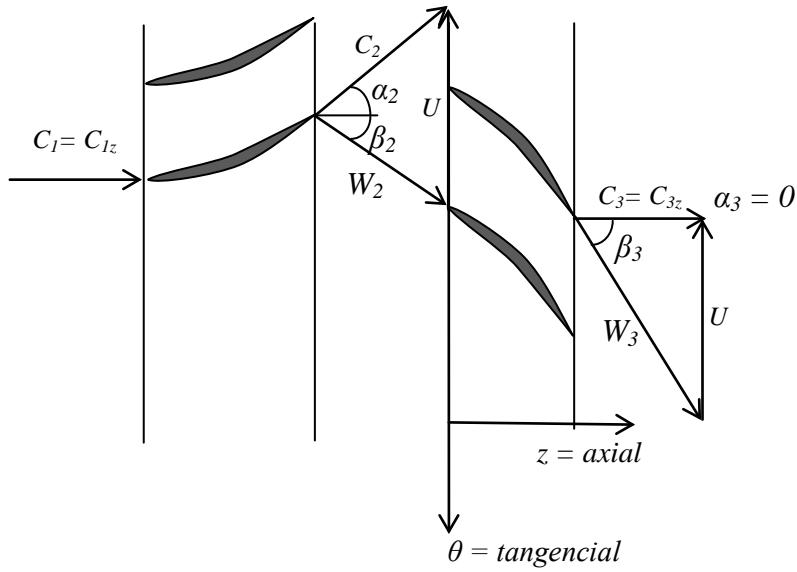
Tomar los siguientes valores:

$$C_{pg} = 1.15 \text{ KJ/Kg K}$$

$$R_g = 0.29 \text{ KJ/Kg K}$$



Datos:
 $W_{mec} = 3.6 \text{ MW}$
 $\dot{m} = 28 \frac{\text{Kg}}{\text{s}}$
 $T_{01} = 1100 \text{ K}$
 $P_{01} = 780 \text{ KPa}$
 $P_2 = 480 \text{ KPa}$
 $C_2 = 450 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
 $\alpha_2 = 70^\circ$



Donde α es el ángulo que forma la velocidad absoluta C con la dirección axial, es este caso $\alpha_1 = 0^\circ$, $\alpha_2 = 70^\circ$ y $\alpha_3 = 0^\circ$

a) La velocidad axial se mantiene constante a través de la turbina por criterio de diseño.

$$C_{1z} = C_{2z} = C_{3z}$$

$$C_{2z} = C_2 \times \cos \alpha_2 = 450 \frac{\text{m}}{\text{s}} \times \cos 70^\circ = 153.9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Número de Mach:

$T_{01} = T_{02}$ por la 1^a Ley de la Termodinámica, ya que en las toberas no hay intercambio de trabajo ni calor.

$$T_2 = T_{02} - \frac{C_2^2}{2C_p g} = 1100 K - \frac{(450)^2 \frac{m^2}{s^2}}{2 \times 1150 \frac{J}{KgK}} = 1012 K$$

$$M_2 = \frac{C_2}{a_2} = \frac{C_2}{\sqrt{k R_g T_2}}; \quad \frac{C_p g}{R_g} = \frac{k}{(k-1)} \Rightarrow k = 1.337$$

$$M_2 = \frac{450 \text{ m/s}}{\sqrt{1.337 \times 290 \frac{J}{KgK} \times 1012 K}}$$

$$M_2 = \frac{450 \frac{m}{s}}{626.40 \frac{m}{s}} = 0.72 \quad \Rightarrow \quad \text{flujo subsónico}$$

Caída de presión por fricción:

$$P_{02} = P_2 \left(\frac{T_{02}}{T_2} \right)^{\frac{k}{k-1}} = 480 KPa \left(\frac{1100}{1012} \right)^{\frac{1.337}{1.337-1}} = 668 KPa$$

$$P_{01} - P_{02} = 780 KPa - 668 KPa = 112 KPa$$

b) Eficiencia adiabática:

$$\Delta s_{rotor} = s_3 - s_2 = 2.8 \frac{J}{KgK}$$

$$\eta_{mec} = 97\%$$

$$\dot{W}_{rotor} = \dot{W}_{1-3} = \frac{\dot{W}_{mec}}{\eta_{mec}} = \frac{3.6 \text{ MW}}{0.97} = 3.71134 \text{ MW}$$

$$w_{1-3} = \frac{\dot{W}_{1-3}}{\dot{m}} = \frac{3711.34 \frac{KJ}{s}}{28 \frac{Kg}{s}} = 132.55 \frac{KJ}{Kg}$$

$$w_{1-3} = C_p (T_{01} - T_{03}) \quad \Rightarrow \quad T_{03} = \left(T_{01} - \frac{w_{1-3}}{C_p} \right) = \left(1100 K - \frac{132.55 \frac{KJ}{Kg}}{1.15 \frac{KJ}{KgK}} \right)$$

$$T_{03} = (1100 K - 115.26 K) = 984.74 K$$

$$T_3 = T_{03} - \frac{C_3^2}{2 C_p} = 984.74 K - \frac{(153)^2 \frac{m^2}{s^2}}{2 \times 1150 \frac{J}{KgK}} = 974.56 K$$

$T ds = dh - v dP$ Tomando el proceso a presión constante entre 2s y 3 se tiene:

$T ds = dh$ Asumiendo $T_3 \cong T_{3s}$ se tiene

$$h_3 - h_{2s} = T_3(s_3 - s_2) = 974.56 K \times 2.8 \frac{J}{KgK} = 2.728 \frac{KJ}{Kg}$$

$$h_{2s} = h_3 - 2.728 \frac{KJ}{Kg} = C_p T_3 - 2.728 \frac{KJ}{Kg}$$

$$h_{2s} = 1.15 \frac{KJ}{KgK} \times 974.56 K - 2.728 \frac{KJ}{Kg} = 1118.0 KJ/Kg$$

$$T_{2s} = \frac{h_{2s}}{C_p} = \frac{1118.0 \frac{KJ}{Kg}}{1.15 \frac{KJ}{KgK}} = 972.17 K$$

$$P_3 = P_{02} \left(\frac{T_{2s}}{T_{02}} \right)^{\frac{k}{k-1}} = 668 KPa \left(\frac{972.17}{1100} \right)^{\frac{1.337}{1.337-1}} = 409.19 KPa$$

$$P_{03} = P_3 \left(\frac{T_{03}}{T_3} \right)^{\frac{k}{k-1}} = 409.19 KPa \left(\frac{984.74}{974.44} \right)^{\frac{1.337}{1.337-1}} = 426.62 KPa$$

$$T_{03s} = T_{01} \left(\frac{P_{03}}{P_{01}} \right)^{\frac{k-1}{k}} = 1100K \left(\frac{426.62}{780} \right)^{\frac{1.337-1}{1.337}} = 944.80 K$$

$$\eta_i = \frac{T_{01} - T_{03}}{T_{01} - T_{03s}} = \frac{(1100 - 984.74)K}{(1100 - 944.80)K} = 0.7427$$

$$\eta_i = 74.27\%$$

c) Potencia perdida por irreversibilidades del tipo hidráulico y mecánico:

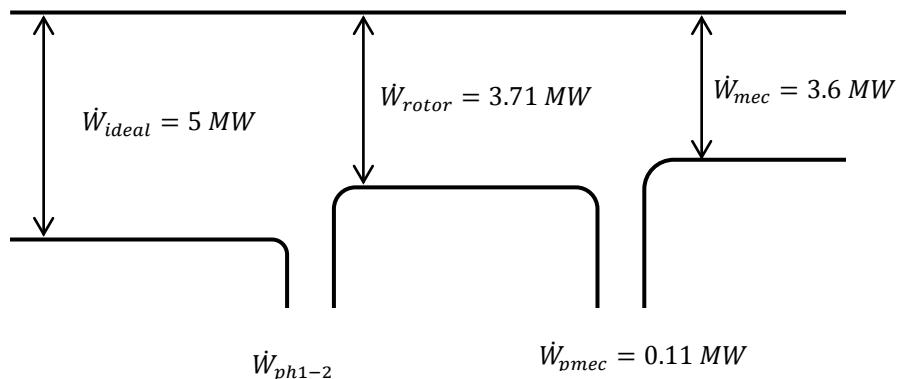
$$\dot{W}_{1-3s} = \dot{m} C_p (T_{01} - T_{03s}) = 28 \frac{Kg}{s} \times \frac{1.15}{1000} \frac{MJ}{KgK} (1100 - 944.80)K = 5 MW$$

$$\dot{W}_{1-3} = \dot{m} C_p (T_{01} - T_{03}) = 28 \frac{Kg}{s} \times \frac{1.15}{1000} \frac{MJ}{KgK} (1100 - 984.74)K = 3.71 MW$$

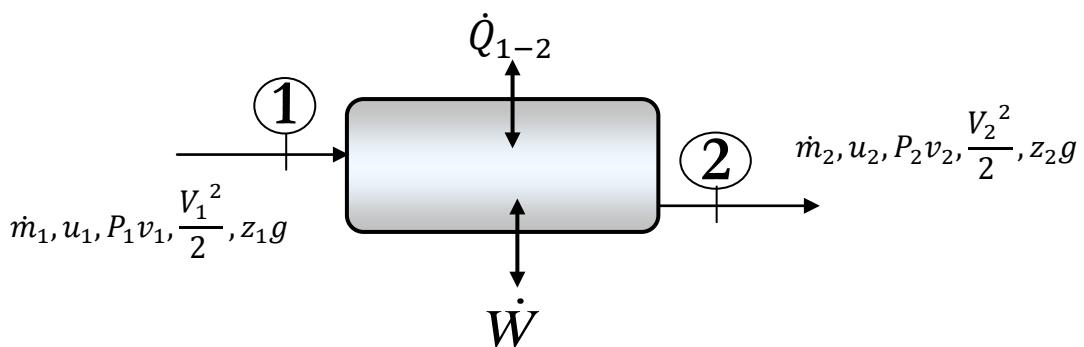
$$\dot{W}_{ph1-2} = \dot{m} C_p (T_{03} - T_{03s}) = \dot{W}_{1-3s} - \dot{W}_{1-3} = 5 MW - 3.71 MW = 1.29 MW$$

$$\dot{W}_{pmec} = \dot{W}_{1-3} - \dot{W}_{mec} = 3.71 MW - 3.6 MW = 0.11 MW$$

$$\dot{W}_{Ptotal} = 0.11 + 1.29 = 1.4 MW$$



2.2 Aplicación a Turbomáquinas Hidráulicas (Ecuación de Bernoulli).



Para régimen permanente, flujo unidimensional, una entrada y una salida, la ecuación de conservación de la masa resulta:

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dot{m}$$

La 1^a Ley de la Termodinámica para régimen permanente, flujo unidimensional y despreciando el calor intercambiado entre la máquina y el ambiente resulta en:

$$\dot{m} \left(u_1 + P_1 v_1 + \frac{V_1^2}{2} + z_1 g \right) \pm \dot{W}_{1-2} = \dot{m} \left(u_2 + P_2 v_2 + \frac{V_2^2}{2} + z_2 g \right) \quad (2.47)$$

Dividiendo entre el flujo másico, \dot{m} y multiplicando por $1/g$ se tiene:

$$\frac{u_1}{g} + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 \pm \frac{w_{1-2}}{g} = \frac{u_2}{g} + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 \quad (2.48)$$

Donde se ha usado la condición de fluido incompresible: $\rho_1 = \rho_2 = \rho$. Las unidades del término $\left[\frac{w_{1-2}}{g}\right]$ en el Sistema Internacional son:

$$\frac{J}{Kgm} \frac{s^2}{m} = \frac{N \times m}{Kgm} \frac{s^2}{m} = \frac{Kgm \times m \times m}{s^2 \times Kgm} \frac{s^2}{m} = m$$

es decir, unidades de longitud o altura. Por esta razón, se acostumbra escribir

$$\frac{w_{1-2}}{g} = H_{1-2}$$

y llamar H_{1-2} la altura intercambiada entre la entrada y la salida de la máquina. Sin embargo, el significado físico de H_{1-2} es energía por unidad de peso, ya que:

$$H_{1-2} = m = \frac{Nm}{N}$$

Donde N se refiere a la unidad de fuerza en el sistema internacional llamada Newton.

El peso específico y la densidad del fluido están relacionados de la siguiente manera: $\gamma = \rho g$

Por lo tanto:

$$\left(\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 \right) - \frac{1}{g}(u_2 - u_1) \pm H_{1-2} = \left(\frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 \right) \quad (2.49)$$

La energía interna del fluido, u , se incrementa debido a la fricción hidráulica, cambios bruscos de dirección, desprendimiento de capa límite, etc. Es decir, el incremento de u , representa pérdidas por irreversibilidades que ocurren en el interior de la máquina y se acostumbra a escribir:

$$h_{fint} = \frac{1}{g}(u_2 - u_1) \quad (2.50)$$

donde h_{fint} se denomina altura de pérdidas o energía por unidad de peso perdida debido a irreversibilidades dentro de la turbomáquina hidráulica.

El balance de energía resulta en:

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 - h_{fint} \pm H_{1-2} = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 \quad (2.51)$$

La altura de pérdidas h_{fint} es muy difícil de calcular analíticamente, por lo que se toma en cuenta a través del rendimiento interno de la máquina. Entonces cuando se aplica la Ecuación de energía entre la entrada y la salida de la turbomáquina hidráulica se tiene:

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 \pm H_{1-2} = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 \quad (2.52)$$

La presión total, P_0 , en un fluido incompresible se define como:

$$P_0 = P + \gamma \frac{V^2}{2g} \quad (2.53)$$

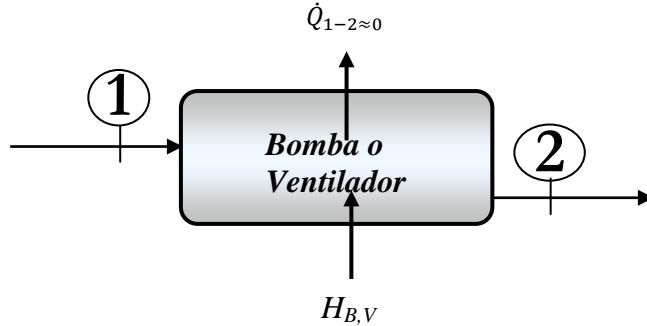
donde P es la presión estática y $\gamma \frac{V^2}{2g}$ es la presión dinámica. Usando P_0 , el balance de energía resulta en:

$$\frac{P_{01}}{\gamma} + z_1 \pm H_{1-2} = \frac{P_{02}}{\gamma} + z_2 \quad (2.54)$$

si la diferencia de cotas entre la entrada y la salida de la máquina se puede despreciar se tiene:

$$\frac{P_{01}}{\gamma} \pm H_{1-2} = \frac{P_{02}}{\gamma} \quad (2.55)$$

2.2.1 Aplicación a Turbomáquinas Hidráulicas Generadoras (THG) Bombas y Ventiladores



La altura o energía por unidad de peso realmente comunicada al fluido es:

$$H_{1-2} = \frac{P_{02} - P_{01}}{\gamma} + z_2 - z_1 \quad (2.56)$$

Donde H_{1-2} se suele llamar H_B (altura de la bomba) o H_V (altura del ventilador), entonces la potencia hidráulica comunicada al fluido:

$$\dot{W}_{hid} = \gamma Q H_{B,V} \quad (2.57)$$

La potencia que debe comunicarse al rotor \dot{W}_{rotor} debe ser mayor que \dot{W}_{hid} en una cantidad suficiente para vencer la potencia hidráulica perdida en irreversibilidades internas, \dot{W}_{phid} .

$$\dot{W}_{rotor} = \dot{W}_{hid} + \dot{W}_{phid} \quad (2.58)$$

donde:

$$\dot{W}_{phid} = \gamma Q h_{fint} \quad (2.59)$$

Donde h_{fint} se refiere a la altura de perdidas por irreversibilidades que ocurren dentro de la bomba o ventilador, por lo tanto:

$$\dot{W}_{rotor} = \gamma Q (H_{B,V} + h_{fint}) \quad (2.60)$$

Por lo tanto:

$$H_{rotor} = H_{B,V} + h_{fint} \quad (2.61)$$

Se define el rendimiento hidráulico o interno de la bomba o ventilador como:

$$\eta_i = \frac{\dot{W}_{hid}}{\dot{W}_{rotor}} = \frac{H_{B,V}}{H_{rotor}} \quad (2.62)$$

La potencia mecánica \dot{W}_{mec} proporcionada por el motor de accionamiento debe ser mayor que la potencia entregada al rotor \dot{W}_{rotor} en una cantidad suficiente para vencer la potencia perdida por el roce mecánico que ocurre por ejemplo en los rodamientos o cojinetes. La Fig. 2.8 es un esquema de las diferentes potencias involucradas en la bomba o en el ventilador, donde se puede observar que la potencia mecánica \dot{W}_{mec} es:

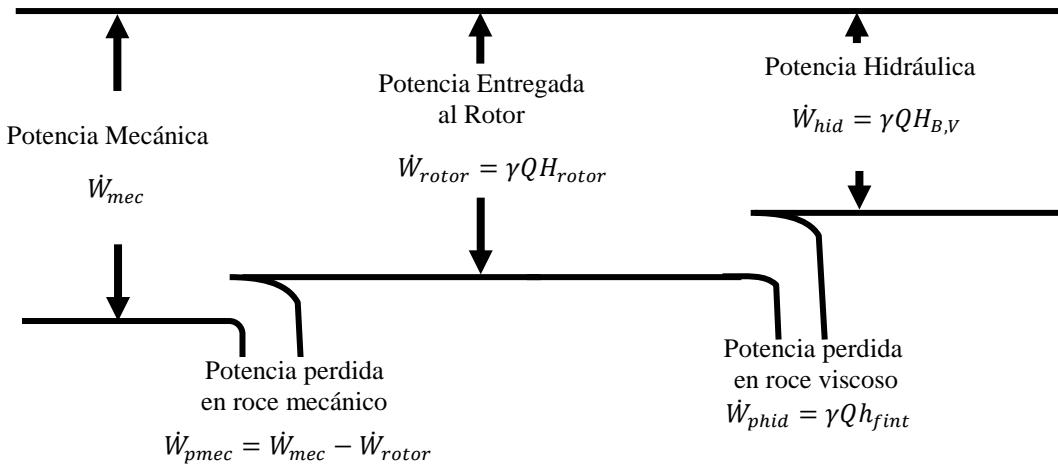


Figura 2.8 Potencias involucradas en bombas y ventiladores

$$\dot{W}_{mec} = \dot{W}_{rotor} + \dot{W}_{pmech} \quad (2.63)$$

Se define el rendimiento mecánico de la bomba o ventilador como:

$$\eta_{mec} = \frac{\dot{W}_{rotor}}{\dot{W}_{mec}} \quad (2.64)$$

El rendimiento total o global se define como:

$$\eta_{B,V} = \frac{\dot{W}_{hid}}{\dot{W}_{mec}} \quad (2.65)$$

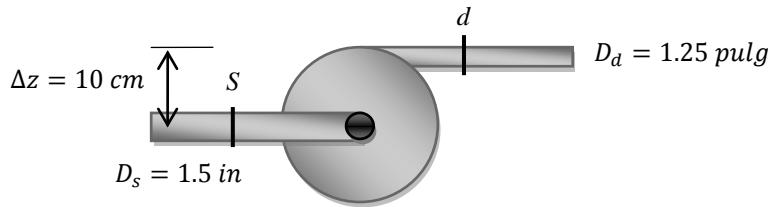
$$\eta_{B,V} = \frac{\dot{W}_{hid}}{\dot{W}_{rotor}} \frac{\dot{W}_{rotor}}{\dot{W}_{mec}} \quad (2.66)$$

$$\eta_{B,V} = \eta_i \eta_{mec} \quad (2.67)$$

Ejemplo 2.5

Para una bomba de agua montada en un banco de pruebas se conocen los siguientes datos:

Torque de entrada medido con un dinamómetro =	6 Nm
Revoluciones medidas con un tacómetro =	1750 rpm
Caudal manejado medido con una placa orificio =	4 lps
Presión manométrica en la succión =	- 0.1 $\frac{Kgf}{cm^2}$
Presión manométrica en la descarga =	2 $\frac{Kgf}{cm^2}$



Calcular:

- a) Potencia hidráulica comunicada al fluido.
- b) Eficiencia global de la bomba.
- c) La potencia debido a pérdidas internas de la bomba.
- d) Si la eficiencia mecánica es 95%, calcular la eficiencia interna,

- a) Potencia hidráulica

$$\dot{W}_{hid} = \gamma Q H_B$$

$$V_s = \frac{Q}{A_s} = \frac{4 \times 10^{-3} \frac{m^3}{s}}{\pi (1.5 \times 0.0254)^2 m^2} = 3.62 \frac{m}{s}$$

$$V_d = \frac{Q}{A_d} = \frac{4 \times 10^{-3} \frac{m^3}{s}}{\pi (1.25 \times 0.0254)^2 m^2} = 5.22 \frac{m}{s}$$

$$H_B = \left(\frac{P_d - P_s}{\gamma} \right) + \left(\frac{(V_d^2 - V_s^2)}{2 g} \right) + (z_d - z_s)$$

$$H_B = \frac{(2 - (-0.1)) \times 10^4 \frac{Kgf}{m^2}}{1000 \frac{Kgf}{m^3}} + \frac{(5.22^2 - 3.62^2) \frac{m^2}{s^2}}{2 \times 9.81 \frac{m}{s^2}} + 0.1 m$$

$$H_B = 21 m + 0.72 m + 0.1 m = 21.82 m$$

$$\dot{W}_{hid} = 1000 \times 9.81 \frac{N}{m^3} \times 4 \times 10^{-3} \frac{m^3}{s} \times 21.82 \text{ m}$$

$$\dot{W}_{hid} = 856 \frac{Nm}{s} = 0.86 \text{ KW}$$

b) Eficiencia Global

$$\eta_B = \frac{\dot{W}_{hid}}{\dot{W}_{mec}}$$

$$\dot{W}_{mec} = \omega T = \frac{2\pi \times 1750 \text{ rad}}{60} \frac{s}{s} \times 6 \text{ Nm} = 1.10 \text{ KW}$$

$$\eta_B = \frac{0.86}{1.10} = 0.7818$$

$$\eta_B = 78.18\%$$

c) Eficiencia Interna

$$\eta_i = \frac{\eta_B}{\eta_{mec}} = \frac{77.85}{95} = 0.8195$$

$$\eta_i = 81.95\%$$

d) Potencia debido a perdidas internas de la bomba

$$H_{rotor} = \frac{H_B}{\eta_i} = \frac{21.82}{0.8192} = 26.64 \text{ m}$$

$$h_{fint} = H_{rotor} - H_B = 26.64 - 21.82 = 4.82 \text{ m}$$

$$\dot{W}_{phid} = 1000 \times 9.81 \frac{N}{m^3} \times 4 \times 10^{-3} \frac{m^3}{s} \times 4.82 \text{ m}$$

$$\dot{W}_{phid} = 0.189 \text{ KW}$$

2.2.2 Aplicación a Turbomáquinas Hidráulicas Motoras (THM)

Turbinas hidráulicas

La altura o energía por unidad de peso realmente extraída del fluido es

$$H_T = \frac{P_{01} - P_{02}}{\gamma} + z_1 - z_2 \quad (2.68)$$

y la potencia hidráulica extraída del fluido:

$$\dot{W}_{hid} = \gamma Q H_T \quad (2.69)$$

La potencia que el fluido comunica al rotor, \dot{W}_{rotor} , es menor que \dot{W}_{hid} en una cantidad igual a la potencia hidráulica perdida en irreversibilidades internas, \dot{W}_{phid} .

$$\dot{W}_{rotor} = \dot{W}_{hid} - \dot{W}_{phid} \quad (2.70)$$

Donde:

$$\dot{W}_{phid} = \gamma Q h_{fint} \quad (2.71)$$

Por lo tanto,

$$\dot{W}_{rotor} = \gamma Q H_{rotor} = \gamma Q (H_T - h_{fint}) \quad (2.72)$$

Donde:

$$H_{rotor} = H_T - h_{fint} \quad (2.73)$$

Se define el rendimiento hidráulico o interno de la turbina como:

$$\eta_i = \frac{\dot{W}_{rotor}}{\dot{W}_{hid}} = \frac{H_{rotor}}{H_T} \quad (2.74)$$

La Fig. 2.9 es un esquema de las diferentes potencias involucradas en la turbina, donde se puede apreciar que la potencia mecánica que sale por el eje de la turbina es menor que la potencia comunicada al rotor en una cantidad igual a la potencia mecánica perdida por el roce mecánico que ocurre por ejemplo en los rodamientos o cojinetes.

$$\dot{W}_{mec} = \dot{W}_{rotor} - \dot{W}_{pme} \quad (2.75)$$

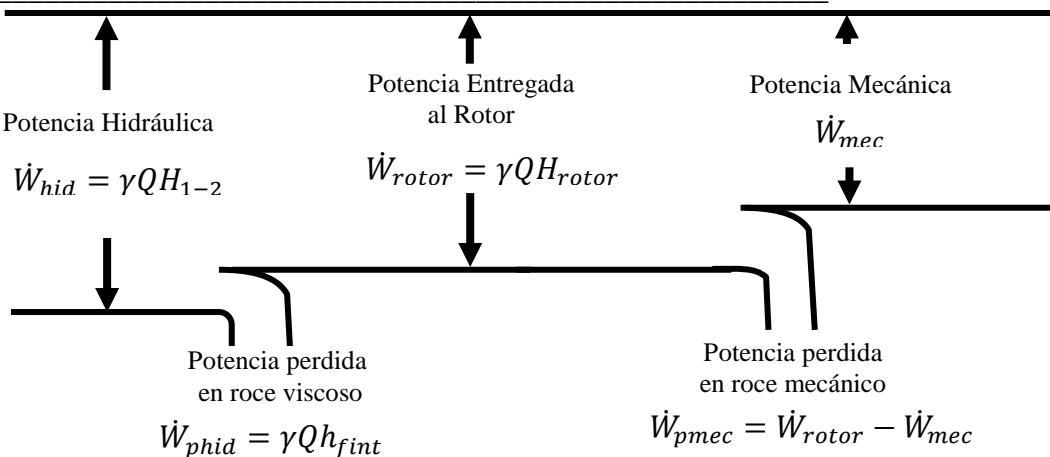


Figura 2.9 Potencias involucradas en la turbina

Se define el rendimiento mecánico de la turbina como:

$$\eta_{mec} = \frac{W_{mec}}{W_{rotor}} \quad (2.76)$$

El rendimiento total o global se define como:

$$\eta_T = \frac{W_{mec}}{W_{hid}} \quad (2.77)$$

$$\eta_T = \frac{W_{rotor}}{W_{hid}} \frac{W_{mec}}{W_{rotor}} \quad (2.78)$$

$$\eta_T = \eta_i \eta_{mec} \quad (2.79)$$

Ejemplo 2.6

Una turbina Francis tiene una altura disponible de 27.1 m. El gasto de la planta es de 28.7 m³/s. La potencia transmitida al generador es de 6720 KW y la eficiencia mecánica es de 98%. Calcular:

- a) La potencia perdida en la transmisión entre el rodete y el generador por causa de fricción mecánica.
- b) La potencia perdida internamente.
- c) La eficiencia interna y la eficiencia global.

Datos:

$$H_T = 27.1 \text{ m}$$

$$Q = 28.7 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$W_{mec} = 6720 \text{ KW}$$

$$\eta_{mec} = 98\%$$

- a) Potencia debido a perdidas mecánicas:

$$\dot{W}_{pmech} = \dot{W}_{rotor} - \dot{W}_{mec}$$

$$\dot{W}_{pmech} = \frac{\dot{W}_{mec}}{\eta_{mec}} - \dot{W}_{mec} = \dot{W}_{mec} \left(\frac{1}{\eta_{mec}} - 1 \right)$$

$$\dot{W}_{pmech} = 6720 \text{ KW} \left(\frac{1}{0.98} - 1 \right) = 137.14 \text{ KW}$$

- b) Potencia perdida internamente

$$\dot{W}_{phid} = \dot{W}_{hid} - \dot{W}_{rotor}$$

$$\dot{W}_{hid} = \gamma Q H_T = 1000 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} \times 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 28.7 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \times 27.1 \text{m}$$

$$\dot{W}_{hid} = 7629.92 \text{ KW}$$

$$\dot{W}_{rotor} = \frac{\dot{W}_{mec}}{\eta_{mec}} = \frac{6720 \text{ KW}}{0.98} = 6857.14 \text{ KW}$$

$$\dot{W}_{phid} = 7629.92 \text{ KW} - 6857.14 \text{ KW} = 772.78 \text{ KW}$$

c) Eficiencia interna

$$\eta_i = \frac{\dot{W}_{rotor}}{\dot{W}_{hid}} = \frac{6857.14 \text{ KW}}{7629.92 \text{ KW}} = 0.8987$$

$$\eta_i = 89.87 \%$$

Eficiencia global

$$\eta_T = \eta_i \eta_{mec} = 0.8987 \times 0.98 = 0.8807$$

$$\eta_T = 88.07\%$$

2.3. Aplicación global a sistemas de bombeo

La aplicación de la ecuación de Bernoulli al esquema de la Fig. 2.10 incluyendo los conductos y accesorios que conducen y controlan el fluido desde el depósito de aspiración o succión hasta la entrada a la máquina y desde la salida de la máquina hasta el depósito de descarga resulta en:

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 - h_{f1-2} + H_{B,V} = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 \quad (2.80)$$

Donde:

$$h_{f1-2} = h_{f1-s} + h_{fd-2} \quad (2.81)$$

es la suma de las perdidas primarias y secundarias de las tuberías de succión y descarga del sistema de bombeo.

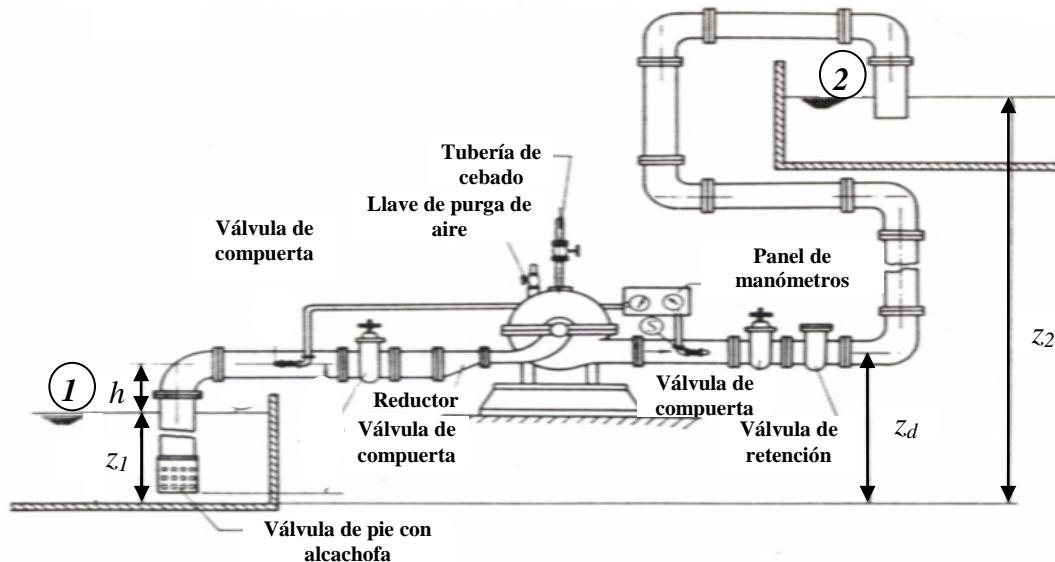


Figura 2.10 Diagrama de diferentes válvulas utilizadas en una instalación de bombeo

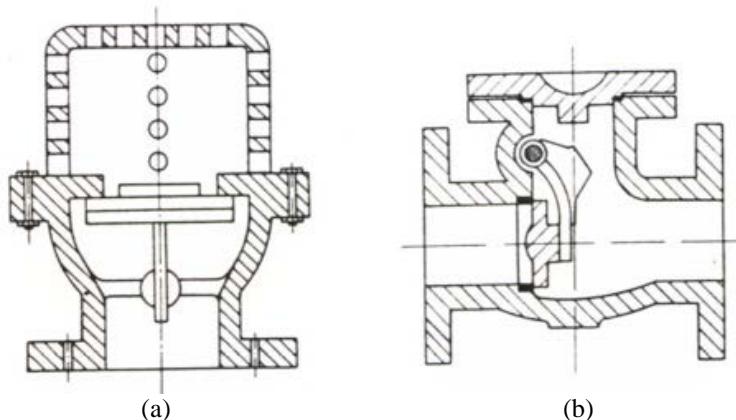


Figura 2.11 Corte (a) Válvula de pie con alcachofa, (b) Válvula de retención.

Instalación de bombeo:

- Tanque de succión.
- Alcachofa y válvula de pie.
- Dos válvulas de compuerta en la aspiración y en la impulsión.
- Válvula de retención en la impulsión.
- El reductor en la aspiración.
- Tanque de descarga.

Si los depósitos están abiertos a la atmósfera, $P_1 = P_2 = P_{atm} = 0$ en unidades manométricas. La velocidad del fluido sobre las superficies libres de los depósitos es muy baja y puede despreciarse. $V_1 = V_2 \approx 0$

Entonces:

$$H_{B,V} = (z_2 - z_1) + h_{f1-2} \quad (2.82)$$

$$H_{B,V} = \Delta z + h_{f1-2} \quad (2.83)$$

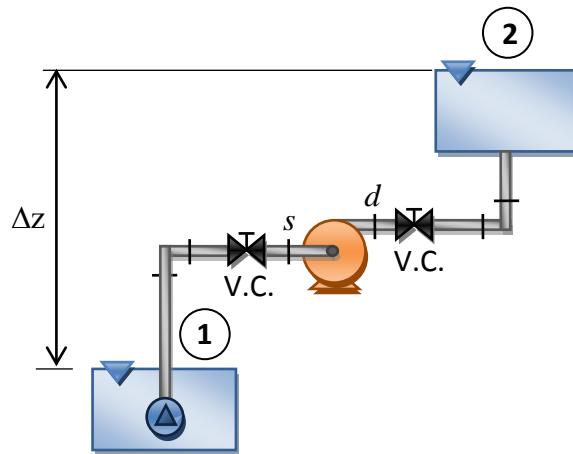


Figura 2.12 Esquema para la aplicación global de la ecuación de Bernoulli a THG.

Bajo estas condiciones la bomba o ventilador debe comunicar al fluido una altura o energía por unidad de peso suficiente para vencer la altura geodésica y la altura de pérdidas entre los depósitos.

La altura de pérdidas en las tuberías se divide en altura de pérdidas primarias que ocurre en tramos rectos de tubería de sección transversal constante y en altura de pérdidas secundarias que ocurre en los accesorios tanto en la succión como en la descarga.

$$h_{f1-2} = h_{f1-s} + h_{fd-2} \quad (2.84)$$

$$h_{f1-s} = h_{fp1-s} + h_{fs1-s} \quad (2.85)$$

Para calcular las pérdidas primarias se usa la ecuación de Darcy-Weisbach

$$h_{fp} = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} \quad (2.86)$$

O en función del caudal:

$$h_{fp} = \frac{8fL}{gn^2 D^5} Q^2 \quad (2.87)$$

donde 'f' es el factor de fricción de Moody

Para las pérdidas secundarias se tienen dos métodos cálculo:

Método de Longitud Equivalente:

$$h_{fs} = f \left(\frac{\sum L_{eq}}{D} \right) \frac{V^2}{2g} \quad (2.88)$$

donde $\sum L_{eq}$ es la sumatoria de las longitudes equivalentes de todos los accesorios instalados en la tubería.

También:

$$h_{fs} = K \frac{V^2}{2g} \quad (2.89)$$

Donde:

$$K = f \frac{Leq}{D} \quad (2.90)$$

Es el coeficiente adimensional de pérdida de carga secundaria.

Usando el método de longitud equivalente, las pérdidas totales en la tubería de succión:

$$h_{f1-s} = f_s \frac{L_s V_s^2}{D_s 2g} + f_s \left(\frac{\sum Leqs}{D_s} \right) \frac{V_s^2}{2g} = f_s \frac{(L_s + \sum Leqs)}{D_s} \frac{V_s^2}{2g} \quad (2.91)$$

O usando la formulación en caudal:

$$h_{f1-s} = \frac{8f_s(L_s + \sum Leqs)}{g\pi^2 D_s^5} Q^2 \quad (2.92)$$

Usando la formulación en caudal, las pérdidas totales en el sistema de bombeo son:

$$h_{f1-2} = \left[\frac{8f_s(L_s + \sum Leqs)}{g\pi^2 D_s^5} + \frac{8f_d(L_d + \sum Leqd)}{g\pi^2 D_d^5} \right] Q^2 \quad (2.93)$$

Ejemplo 2.7

Entre el pozo de aspiración y el depósito de descarga de una bomba que maneja agua a $30^\circ C$ hay un desnivel geodésico de $25 m$. La tubería de aspiración es de 4 in de diámetro, tiene una longitud de $5 m$ y está provista de una válvula check de compuerta, una válvula de compuerta abierta y un codo estándar de 90° . El eje de la bomba esta a $2 m$ por encima del nivel del pozo de aspiración. La tubería de descarga es de 3 in de diámetro, tiene una longitud de $85 m$ y está provista de una válvula de compuerta, tres codos estándar de 90° y salida brusca $K = 1$. El caudal bombeado es de $40 lps$ y el depósito de descarga está sometido a una presión de 1 atmósfera por encima de la atmósfera local. El rendimiento global de la bomba en el punto de mejor eficiencia es de 80% . Las tuberías son de hierro fundido nuevo.

Calcular:

- a) La potencia en KW necesaria en el motor eléctrico.
- b) La presión manométrica en la brida de succión de la bomba.

Datos:

Propiedades para Agua a $30^\circ C$

$$\rho = 996 \frac{m^3}{s}; v = 0.802 \times 10^{-6}$$

$$\Delta z = 25 m$$

$$D_s = 4 \text{ pulg} = 0.1016 m$$

$$L_s = 5 m$$

Accesorios de la succión:

Usando la tabla 6 (ver Apéndice) se obtienen las $\frac{Leq}{D}$ de los accesorios:

Cantidad	Accesorio	$\frac{Leq}{D}$
1	Válvula Check de compuerta	135
1	Válvula de compuerta abierta	8
1	Codo estándar de 90°	30

$$h = 2 m$$

$$D_d = 3 \text{ pulg} = 0.0762 m$$

$$L_d = 85 m$$

Accesorios de la descarga:

Cantidad	Accesorio	$\frac{Leq}{D}$
1	Válvula de compuerta	8
3	Codo estándar de 90°	30

$$\text{Salida brusca } K = 1$$

$$Q = 40 \frac{l}{s} = 0.04 \frac{m^3}{s}$$

$P_2 = 1 \text{ atm} = 101 \text{ KPa}$ (presión manométrica)

$\eta_B = 80\%$

Tubería de hierro fundido nuevo

$\varepsilon = 0.01 \text{ mm}$

a) Potencia mecánica:

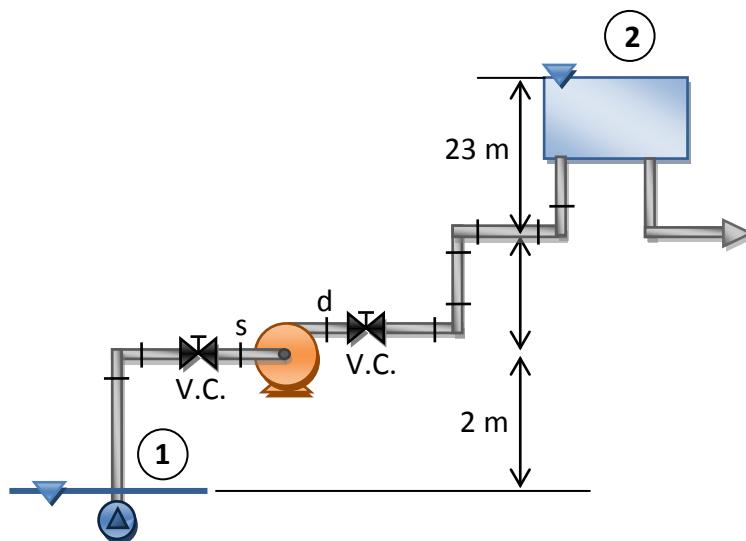
Aplicando Bernoulli entre (1) y la superficie libre del tanque de descarga (2) según la figura se obtiene:

$$H_B = \frac{P_2 - P_1}{\gamma} + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} + (z_2 - z_1) + h_{f1-s} + h_{fd-2}$$

$$P_1 = 0$$

$$V_2 \approx V_1 \approx 0$$

$$P_2 = 1 \text{ atm} = 101 \text{ KPa}$$



$$V_s = \frac{Q}{A} = \frac{40 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}}{\frac{\pi \times 10.16^2}{4} \times 10^{-4} \text{ m}^2} = 4.93 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$V_d = \frac{Q}{A_d} = \frac{40 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}}{\frac{\pi \times 7.62^2}{4} \times 10^{-4} \text{ m}^2} = 8.77 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Usando el diagrama de Moody o la ecuación apropiada se obtienen los factores de fricción:

$$\frac{\varepsilon}{D_s} = \frac{0.01 \text{ mm}}{101.6 \text{ mm}} = 0.0001; \quad Re_{Ds} = \frac{\frac{4.93 \text{ m}}{\text{s}} \times 0.1016 \text{ m}}{0.802 \times 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}} = 6.25 \times 10^5 \quad f_s = 0.014$$

$$\frac{\varepsilon}{D_d} = \frac{0.01 \text{ mm}}{76.2 \text{ mm}} = 0.00013; \quad Re_{Dd} = \frac{\frac{8.77 \text{ m}}{\text{s}} \times 0.0762 \text{ m}}{0.802 \times 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}} = 8.33 \times 10^5 \quad f_d = 0.014$$

$$h_{f1-s} = f_s \left[\frac{L_s}{D_s} + \sum \left(\frac{L_{eqs}}{D_s} \right) \right] \frac{V_s^2}{2g} = 0.014 \times \left(\frac{5}{0.1016} + 135 + 8 + 30 \right) \frac{4.93^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{2 \times 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}$$

$$h_{f1-s} = 3.85 \text{ m}$$

$$h_{fd-2} = f_d \left[\frac{L_d}{D_d} + \sum \left(\frac{L_{eqd}}{D_d} \right) \right] \frac{V_d^2}{2g} + K \frac{V_d^2}{2g} = 0.014 \times \left(\frac{85}{0.0762} + 8 + 3 \times 30 \right) \frac{8.77^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{2 \times 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} + \frac{8.77^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{2 \times 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}$$

$$h_{fd-2} = 70.52 \text{ m}$$

$$H_B = \frac{101 \times 10^3 \text{ Pa}}{996 \times 9.81 \frac{\text{N}}{\text{m}^3}} + 25 \text{ m} + 3.85 \text{ m} + 70.52 \text{ m}$$

$$H_B = 109.71 \text{ m}$$

$$\dot{W}_{hid} = \gamma Q H_B = 996 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} \times 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 0.04 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \times 109.71 \text{ m}$$

$$\dot{W}_{hid} = 42.88 \text{ KW}$$

$$\dot{W}_{mec} = \frac{\dot{W}_{hid}}{\eta_B} = \frac{42.878 \text{ KW}}{0.80} = 53.60 \text{ KW}$$

- b) Presión en la entrada de la bomba:

Aplicando Bernoulli entre (1) y la succión (s) según la figura se obtiene:

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 - h_{f1-s} = \frac{P_s}{\gamma} + \frac{V_s^2}{2g} + z_s$$

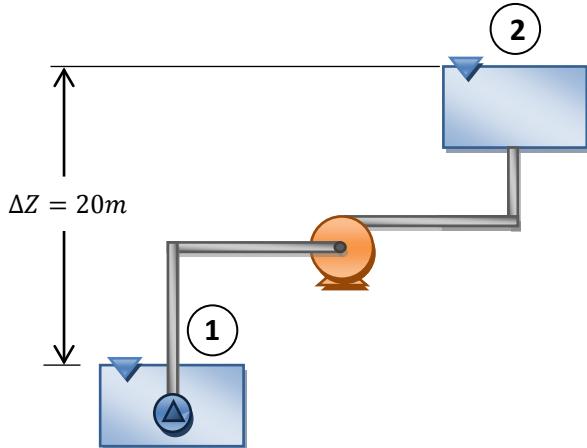
$$\frac{P_s}{\gamma} = (z_1 - z_s) - \frac{V_s^2}{2g} - h_{f1-s}$$

$$\frac{P_s}{\gamma} = -2 \text{ m} - 1.24 \text{ m} - 3.85 \text{ m} = -7.09 \text{ m}$$

$$P_s = -7.09 \text{ m} \times 996 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} \times 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = -69.27 \text{ KPa}$$

Ejemplo 2.8

Calcule la potencia que requiere un motor de una bomba que se utilizará para llenar con agua a 20°C un tanque que se encuentra a 20 m sobre el nivel del depósito de succión. La capacidad del tanque a llenar es de 5000 lts. La longitud de la tubería es de 60 m. El tanque debe ser llenado en no más de una hora. La tubería tiene una rugosidad de 0.1 mm y un diámetro de 1 pulg. Suponga que la bomba tiene una eficiencia total de 75%.



$$\dot{W}_{mec} = ?$$

Datos:

$$\text{Agua } 20^\circ\text{C } \rho = 996 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}; \nu = 1.01 \times 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

$$\Delta z = 20 \text{ m}$$

$$V_{tanque} = 5000 \text{ lts}$$

$$L = 60 \text{ m}$$

$$\epsilon = 0.1 \text{ mm}$$

$$D = 1 \text{ pulg}$$

Caudal manejado por la bomba:

$$Q = \frac{5000 \text{ L}}{1 \text{ h}} \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} \frac{1 \text{ m}^3}{1000 \text{ lts}} = 1.39 \times 10^{-3} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

Aplicando Bernoulli de (1) a (2):

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 + H_B - h_{f1-2} = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2$$

de donde:

$$H_B = \Delta z + h_{f1-2}$$

$$\text{En este caso } D_s = D_d = D$$

$$\text{y } L = L_s + L_d = 60 \text{ m}$$

Donde L es la longitud total de tubería del sistema de bombeo

$$h_{f1-2} = \frac{8 f L}{g \pi^2 D^5} Q^2$$

Teniendo el valor de Reynolds:

$$Re_D = \frac{V D}{\nu} = \frac{Q D}{A \nu} = \frac{4Q}{\pi D \nu} = \frac{4(1.39 \times 10^{-3} \frac{\text{m}^3}{\text{s}})}{\pi 0.0254 \text{ m} \times 1.01 \times 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}} = 6.9 \times 10^4$$

Rugosidad relativa:

$$\frac{\epsilon}{D} = \frac{0.1}{25.4} \cong 0.004$$

Utilizando la gráfica de Moody se tiene: $f = 0.03$

Por lo que:

$$h_f \text{ } 1-2 = \frac{8x0.03x60m}{9.81\frac{m}{s^2}\pi^2(0.0254)^5 m^5} (1.39x10^{-3})^2 \frac{m^6}{s^2} = 27.18 \text{ m}$$

$$H_B = 20m + 27.18m = 47.18 \text{ m}$$

$$\dot{W}_{hid} = \gamma Q H_B = 998 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} x 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} x (1.39x10^{-3} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}) (47.18 \text{ m}) = 642.06 \text{ W}$$

$$\dot{W}_{mec} = \frac{\dot{W}_{hid}}{\eta_B} = \frac{642.06 \text{ W}}{0.75} = 856.08 \text{ W}$$

Ejemplo 2.9

En el sistema de bombeo que se muestra, la longitud de la tubería de succión es igual a 16 m y la longitud de la tubería de descarga es 30 m. Se bombea un caudal de 5.6 l/s de agua a 20°C ($\nu = 1.01 \times 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$, $\rho = 998 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, el diámetro nominal de la tubería de succión y de descarga es 2 pulg, las tuberías son de acero comercial nuevo ($\varepsilon = 0.046 \text{ mm}$). a) Calcular el valor de h (altura desde el nivel de agua en el tanque de aspiración hasta la entrada de la bomba) en la cual $P_s = P_v$, siendo $P_v = 2.337 \text{ kPa}$ presión de saturación del agua a 20°C. b) ¿Qué valor de h debe emplearse para evitar cavitación si se considera un Factor de Seguridad del 20%?, c) calcular la potencia mecánica de la bomba y d) las pérdidas hidráulicas producidas en el interior de la misma si la eficiencia total y mecánica del sistema es 85% y 97% respectivamente. Considerar las perdidas secundarias para los accesorios que se ven en la figura.

Datos:

$$P_1 = 14.7 \text{ psi} = 101 \text{ kPa} \text{ (Tanque abierto, presión absoluta)}$$

$$P_2 = 14.7 \text{ psig} = 101 \text{ kPa} \text{ (Tanque cerrado y presurizado, presión relativa)}$$

$$L_s = 16 \text{ m}$$

$$L_d = 30 \text{ m}$$

$$Q = 5.6 \frac{l}{s} = 0.0056 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

Aqua a 20°C

$$\nu = 1.01 \times 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

$$\rho = 998 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$D_s = D_d = 2 \text{ pulg Diámetro Nominal}$$

En la tabla de diámetros comerciales se busca el diámetro interior:

$$D = D_s = D_d = 2.067 \text{ pulg} = 0.0525 \text{ m Diámetro Interior}$$

$\varepsilon = 0.046 \text{ mm}$ Acero comercial nuevo

$$a) h = ? \text{ Para } P_s = P_v$$

$$P_v = 2.337 \text{ kPa}$$

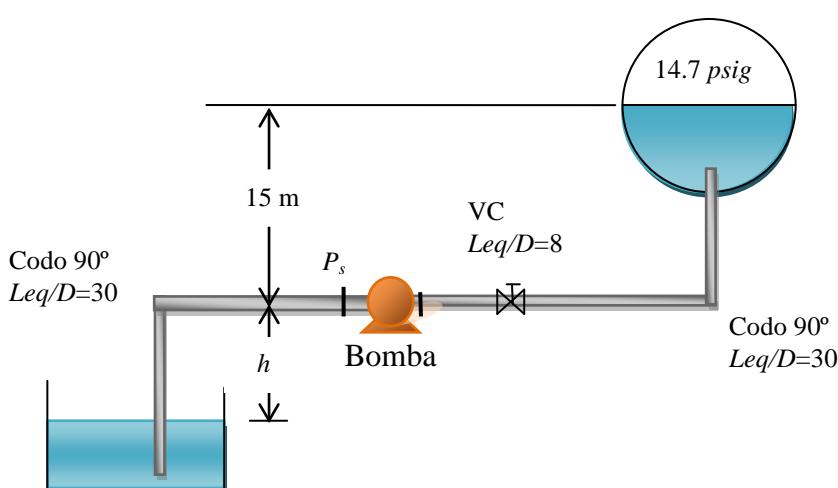
$$b) h = ? \text{ con FS} = 20\%$$

$$c) \dot{W}_{mec} = ?$$

$$d) \dot{W}_{phid} = ?$$

$$\eta_B = 85\%$$

$$\eta_{mec} = 97\%$$



a) $h = ?$ Para $P_s = P_v$

Bernoulli de (1) a (s):

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 - h_{f1-s} = \frac{P_s}{\gamma} + \frac{V_s^2}{2g} + z_s$$

$$h = \frac{P_1}{\gamma} - \frac{P_s}{\gamma} - \frac{V_s^2}{2g} - h_{f1-s}$$

$$Q = V_s A \Rightarrow V_s = \frac{Q}{A} = \frac{4 \times 0.0056 \frac{m^3}{s}}{\pi (0.0525)^2 m^2} = 2.59 \frac{m}{s}$$

Teniendo:

$$\frac{e}{D} = \frac{0.046 \text{ mm}}{52.5 \text{ mm}} = 0.00087$$

$$Re = \frac{V D}{v} = \frac{2.59 \frac{m}{s} \times 0.0525 m}{1.01 \times 10^{-6} \frac{m^2}{s}} = 1.3 \times 10^5;$$

$$f = 0.021$$

$$h_{f1-s} = f \left[\left(\frac{Leq}{D} \right)_{C90^\circ} + \frac{L_s}{D} \right] \frac{V_s^2}{2g} = 0.021 \left(30 + \frac{16m}{0.0525m} \right) \frac{2.59^2 \frac{m^2}{s^2}}{2 \times 9.81 \frac{m}{s^2}} = 2.40 \text{ m}$$

$$h = \frac{101000 \frac{N}{m^2}}{998 \times 9.81 \frac{N}{m^3}} - \frac{2337 \frac{N}{m^2}}{998 \times 9.81 \frac{N}{m^3}} - \frac{2.59^2 \frac{m^2}{s^2}}{2 \times 9.81 \frac{m}{s^2}} - 2.40m = 7.33 \text{ m}$$

Con esta diferencia de altura se presenta cavitación, para esta bomba en aspiración se debe reducir este valor para aumentar la presión en la entrada de la bomba de manera tal que sea mayor que la presión de vapor.

b) $h = ?$ con $FS = 20\%$

$$h = 0.8 \times 7.33 \text{ m} = 5.86 \text{ m}$$

Verificando la presión en la entrada de la Bomba:

$$\frac{P_s}{\gamma} = \frac{P_1}{\gamma} - h - \frac{V_s^2}{2g} - h_{f1-s}$$

$$P_s = P_1 - \gamma h - \rho \frac{V_s^2}{2} - \gamma h_{f1-s}$$

$$P_s = 101000 \frac{N}{m^2} - (998 \times 9.81) \frac{N}{m^3} \times 5.86 \text{ m} - 998 \frac{Kg}{m^3} \times \frac{2.59^2 \frac{m^2}{s^2}}{2} - (998 \times 9.81) \frac{N}{m^3} \times 2.40 \text{ m}$$

$$P_s = 16784.12 \text{ Pa} = 16.78 \text{ KPa} > 2.337 \text{ KPa}$$

c) Potencia Mecánica

Aplicando Bernoulli de (1) a (2):

$$H_B = \frac{P_2}{\gamma} + \Delta z + h_{f1-2}$$

Donde:

$$h_{f1-2} = h_{f1-s} + h_{fd-2}$$

$$h_{fd-2} = f \left[\left(\frac{Leq}{D} \right)_{C90^\circ} + \left(\frac{Leq}{D} \right)_{VC} + \frac{L_d}{D} \right] \frac{V^2}{2g}$$

$$h_{fd-2} = 0.021 \left(30 + 8 + \frac{30m}{0.0525m} \right) \frac{2.59^2 \frac{m^2}{s^2}}{2 \times 9.81 \frac{m}{s^2}}$$

$$h_{fd-2} = 4.38 \text{ m}$$

$$h_{f1-2} = 2.40 \text{ m} + 4.38 \text{ m} = 6.78 \text{ m}$$

$$H_B = \frac{101000 \frac{N}{m^2}}{998 \times 9.81 \frac{N}{m^3}} + 20.86 \text{ m} + 6.78 \text{ m} = 37.96 \text{ m}$$

$$\dot{W}_{hid} = \gamma Q H_B = 998 \times 9.81 \frac{N}{m^3} \times 0.0056 \frac{m^3}{s} \times 37.96 \text{ m} = 2081 \text{ W}$$

$$\dot{W}_{hid} = 2.081 \text{ KW}$$

$$\dot{W}_{mec} = \frac{\dot{W}_{hid}}{\eta_B} = \frac{2.081 \text{ KW}}{0.85} = 2.448 \text{ KW}$$

- d) Potencia perdida por irreversibilidades internas de la bomba

$$\dot{W}_{rotor} = \eta_m \dot{W}_{mec} = 0.97 \times 2.448 \text{ KW} = 2.375 \text{ KW}$$

$$H_{rotor} = \frac{2375 \text{ W}}{998 \times 9.81 \frac{\text{N}}{\text{m}^3} \times 0.0056 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}} = 43.32 \text{ m}$$

$$\dot{W}_{phid} = \dot{W}_{rotor} - \dot{W}_{hid} = \gamma Q (H_{rotor} - H_B) = \gamma Q h_{fint}$$

$$\dot{W}_{phid} = 998 \times 9.81 \frac{\text{N}}{\text{m}^3} \times 0.0056 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} (43.32 - 37.96) \text{ m} = 294 \text{ W}$$

$$\dot{W}_{phid} = 0.294 \text{ KW}$$

2.4. Aplicación global a sistemas sencillos de ventilación

El sistema de ventilación comprende la ductería y accesorios a través de los cuales el aire fluye hacia y desde el ventilador. La Fig. 2.13 muestra un esquema de los sistemas de ventilación simples de tiro forzado y de tiro inducido. El ventilador siempre toma aire de la atmósfera y lo descarga también a presión atmosférica; por lo tanto, el sistema ofrece resistencia al flujo solamente por fricción hidráulica. El ventilador debe vencer la resistencia del sistema al caudal deseado compuesta solamente por altura de fricción.

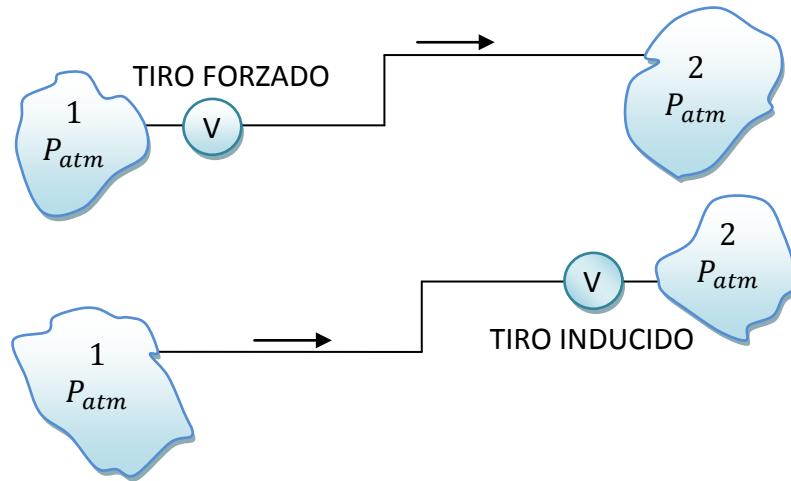


Figura 2.13. Esquema de sistemas simples de ventilación.

La altura de ventilación H_V , es la energía específica realmente comunicada al aire por el ventilador y se calcula aplicando Bernoulli entre los puntos 1 y 2:

$$H_V = \frac{P_2 - P_1}{\gamma} + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} + (z_2 - z_1) + h_{f1-2} \quad (2.94)$$

Las velocidades V_1 y V_2 del aire en el ambiente son muy pequeñas y pueden despreciarse. $\frac{P_2 - P_1}{\gamma}$ es la altura o energía específica de presión y es igual a cero en sistemas de ventilación. $(z_2 - z_1)$ es la altura geodésica de elevación o energía específica potencial y es muy pequeña en fluidos livianos como el aire y puede despreciarse, h_{f1-2} es la altura o energía específica de pérdidas por fricción. Por lo tanto,

$$H_V = h_{f1-2} \quad (2.95)$$

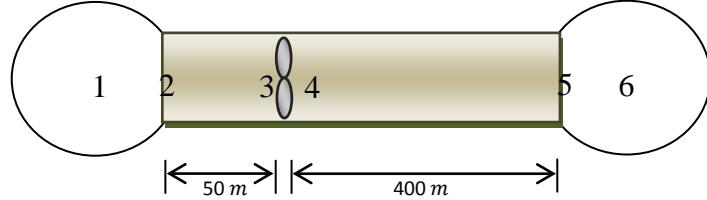
$$\Delta P_V = \gamma_{aire} h_{f1-2} \quad (2.96)$$

La altura de fricción siempre está presente en el sistema de ventilación y su magnitud puede controlarse por medio de la sección transversal de la ductería.

La sección transversal óptima de la ductería depende de la velocidad aceptable del aire para que las pérdidas por fricción y el nivel de ruido sean ambos bajos. Esta velocidad depende del tipo de aplicación del sistema de ventilación; sin embargo, se puede usar en una primera aproximación una velocidad que resulte en un factor de fricción de Moody de 0.01.

Ejemplo 2.10

En un sistema de ventilación se requiere movilizar un caudal de $4 \text{ m}^3/\text{s}$ de aire, la longitud del ducto de entrada es 50 m y la longitud del ducto de salida 400 m , ambas de sección rectangular e igual área ($45 \times 35 \text{ cm}^2$), el rendimiento total es 70% , el coeficiente de fricción de Darcy en los ductos de entrada y salida se estima igual a 0.01 . a) Dibujar los diagramas de presión estática y total. b) Calcular la potencia mecánica del ventilador que se necesita ($P_{atm} = 101.35 \text{ KPa}$, $T_{aire} = 20^\circ\text{C}$, $R = 287 \text{ J/Kg K}$).



Datos:

Aire: $P_{atm} = 101.35 \text{ KPa}$, $T_{aire} = 20^\circ\text{C}$, $R = 287 \text{ J/Kg K}$

$$Q = 0.4 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$L_s = 50 \text{ m}$$

$$L_d = 400 \text{ m}$$

$$A_s = A_d = 45 \times 35 \text{ cm}^2$$

$$\eta_V = 70\%$$

$$\eta_{mec} = 95\%$$

$$f = 0.01$$

a) Cálculo de Presiones totales y estáticas

Se calcula el perímetro y el área:

$$P = 2(0.45)m + 2(0.35)m = 1.6 m$$

$$A = 0.45m \times 0.35m = 0.1575 \text{ m}^2$$

Usando el Diámetro hidráulico:

$$D_h = \frac{4A}{P} = \frac{4(0.1575 \text{ m}^2)}{1.6m} = 0.3938 \text{ m}$$

$$V_s = V_d = \frac{Q}{A} = \frac{0.4 \text{ m}^3/\text{s}}{0.1575 \text{ m}^2} = 25.40 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Perdidas en el ducto de entrada, despreciando pérdidas locales:

$$h_{f_{1-3}} = f \frac{L_s V_s^2}{D_h 2 g} = 0.01 \times \frac{50m}{0.3938m} \frac{(25.40)^2 \frac{m^2}{s^2}}{2(9.81)\frac{m}{s^2}} = 41.75 \text{ m}$$

$$h_{f_{4-6}} = f \frac{L_d V_d^2}{D_h 2 g} = 8xh_{f_{1-3}} = 334.0 \text{ m}$$

Aplicamos Bernoulli de 1 a 2:

$$\frac{P_{01}}{\gamma} - h_{f_{1-2}} = \frac{P_{02}}{\gamma} \quad \text{con } V_1 \approx 0 \text{ y } P_1 = 0 \text{ (Presión relativa)} \rightarrow \frac{P_{01}}{\gamma} = 0$$

$h_{f_{1-2}} = 0$ ya que no hay ducto entre 1 y 2 y se desprecia la perdida en la entrada. Por lo tanto: $\frac{P_{02}}{\gamma} = 0$

$$\frac{P_2}{\gamma} = -\frac{V_2^2}{2g} = -\frac{25.40^2 \frac{m^2}{s^2}}{2 \times 9.81 \frac{m}{s^2}} = -32.88 \text{ m}$$

Bernoulli de 2 a 3:

$$\frac{P_{02}}{\gamma} - h_{f_{2-3}} = \frac{P_{03}}{\gamma} \quad \text{con } \frac{P_{02}}{\gamma} = 0$$

$$h_{f_{2-3}} = h_{f_{1-3}} = 41.75 \text{ m} \rightarrow \frac{P_{03}}{\gamma} = -h_{f_{1-3}} = -41.75 \text{ m}$$

$$\frac{P_3}{\gamma} = -h_{f_{1-3}} - \frac{V_3^2}{2g} = -41.75m - \frac{25.40^2 \frac{m^2}{s^2}}{2 \times 9.81 \frac{m}{s^2}} = -74.63 \text{ m}$$

Bernoulli de 1 a 6:

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + H_V - h_{1-6} = \frac{P_6}{\gamma} + \frac{V_6^2}{2g}$$

$$\text{con } V_6 \approx 0 \text{ y } P_6 = 0 \text{ (Presión relativa)} \rightarrow \frac{P_{06}}{\gamma} = 0$$

$$H_V = h_{f_{1-6}} = h_{f_{1-3}} + h_{f_{4-6}} = 41.75m + 334m = 375.75 \text{ m}$$

Bernoulli de 3 a 4:

$$\frac{P_{03}}{\gamma} + H_V = \frac{P_{04}}{\gamma} \quad \text{sustituyendo } H_V \text{ y } \frac{P_{03}}{\gamma} \quad \text{Se tiene:}$$

$$\frac{P_{04}}{\gamma} = h_{f1-3} + h_{f4-6} - h_{f1-3} = h_{f4-6} = 334.0 \text{ m}$$

$$\frac{P_4}{\gamma} = h_{f4-6} - \frac{V_4^2}{2g} = 334.0 \text{ m} - \frac{25.40^2 \frac{m^2}{s^2}}{2 \times 9.81 \frac{m}{s^2}} = 301.12 \text{ m}$$

Bernoulli de 4 a 5:

También se puede obtener $\frac{P_{04}}{\gamma}$

$$\frac{P_{04}}{\gamma} - h_{f4-5} = \frac{P_{05}}{\gamma}$$

De donde:

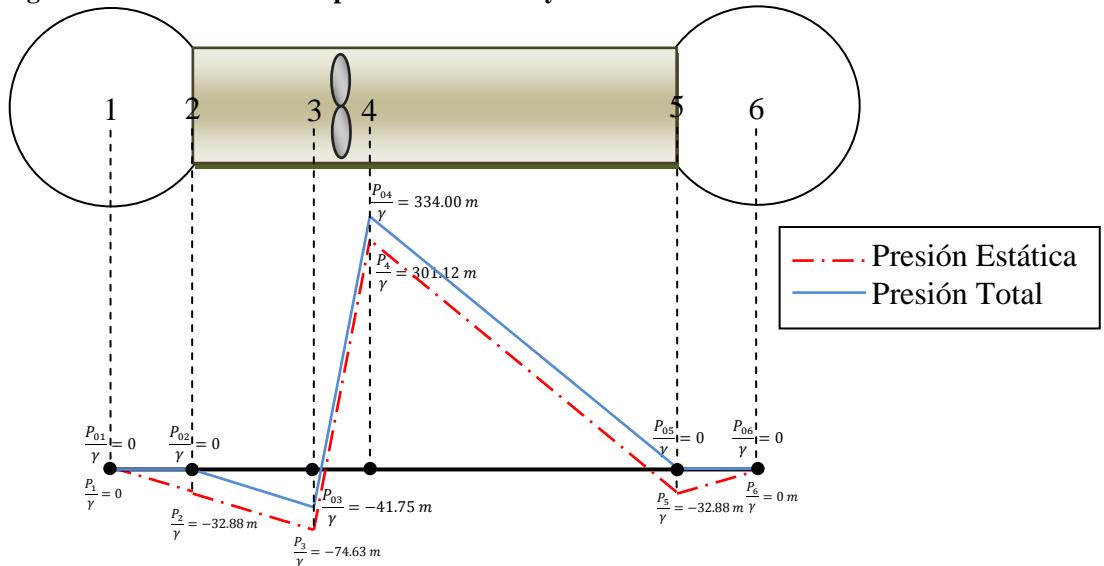
$$\frac{P_{04}}{\gamma} = h_{f4-5}$$

Bernoulli de 5 a 6:

$$\frac{P_{05}}{\gamma} = \frac{P_{06}}{\gamma} = 0 \quad h_{f5-6} = 0 \text{ ya que no hay ducto entre 5 y 6 y se desprecia la pérdida en la salida.}$$

$$\frac{P_5}{\gamma} = -\frac{V_5^2}{2g} = -\frac{25.40^2 \frac{m^2}{s^2}}{2 \times 9.81 \frac{m}{s^2}} = -32.88 \text{ m}$$

Diagramas de Distribución de presiones Estática y Total en metros de columna de aire



- b) Potencia mecánica del ventilador

$$\dot{W}_{hid} = \gamma Q H_V$$

$$\gamma = \rho g = \frac{P}{R T} g = \frac{101.35 \text{ kPa}}{(0.287 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}) \times 293 \text{ K}} \times 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 11.82 \frac{\text{N}}{\text{m}^3}$$

$$\dot{W}_{hid} = \gamma Q H_V = 11.82 \frac{\text{N}}{\text{m}^3} \times 4 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \times 375.75 \text{ m} = 17765.46 \text{ W}$$

$$\dot{W}_{hid} = 17.8 \text{ KW}$$

$$\eta_V = \frac{\dot{W}_{hid}}{\dot{W}_{mec}}$$

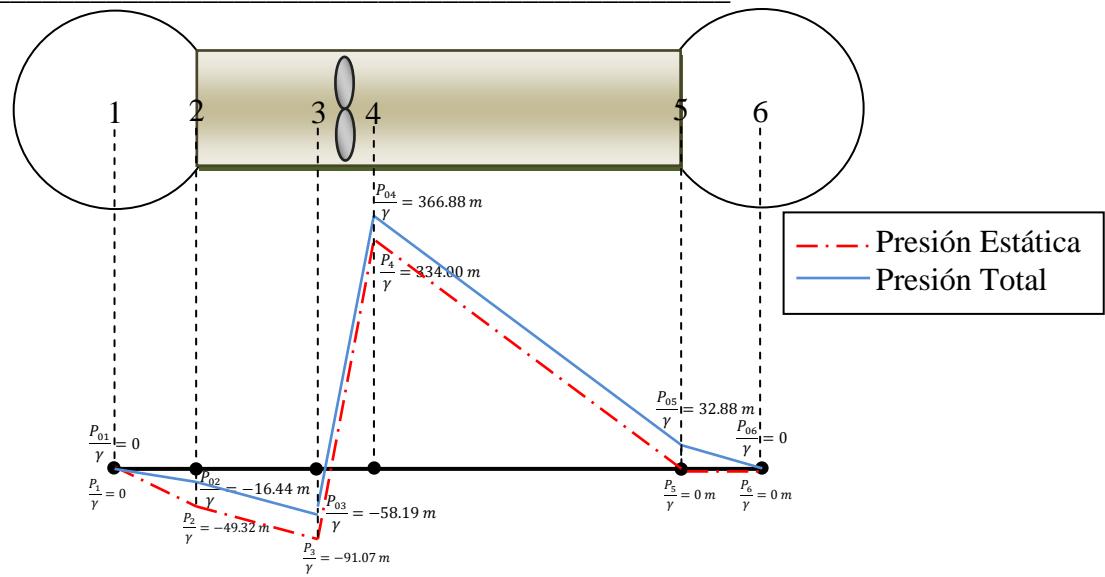
$$\dot{W}_{mec} = \frac{\dot{W}_{hid}}{\eta_V} = \frac{17.8 \text{ KW}}{0.70} = 25.43 \text{ KW}$$

El ejemplo anterior considerando las pérdidas secundarias en la entrada y salida del ducto de ventilación con $K_2 = 0.5$ y $K_5 = 1$ los coeficientes adimensionales de pérdida de carga en la entrada (2) y salida (5) respectivamente. Los diagramas de distribución de presiones totales y estática son:

Las pérdidas en la entrada y salida

$$h_{f2} = 0.5 \times \frac{25.40^2 \frac{m^2}{s^2}}{2 \times 9.81 \frac{m}{s^2}} = 16.44 \text{ m}$$

$$h_{f5} = 1 \times \frac{25.40^2 \frac{m^2}{s^2}}{2 \times 9.81 \frac{m}{s^2}} = 32.88 \text{ m}$$



$$H_V = 425.07 \text{ m}$$

$$\dot{W}_{hid} = 11.82 \frac{N}{m^3} \times 4 \frac{m^3}{s} 425.07 \text{ m} = 20097.31 \text{ W}$$

$$\dot{W}_{hid} = 20.1 \text{ KW}$$

$$\dot{W}_{mec} = \frac{\dot{W}_{hid}}{\eta_V} = \frac{20.1 \text{ KW}}{0.70} = 28.71 \text{ KW}$$

2.5 Aplicación global a Turbinas Hidráulicas

La aplicación de la ecuación de Bernoulli al esquema de la figura 2.14 incluyendo los conductos y accesorios que conducen y controlan el fluido desde el reservorio de aducción hasta la entrada a la máquina y desde la salida de la máquina hasta el reservorio de descarga resulta en:

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 - H_T - h_{f1-2} = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 \quad (2.97)$$

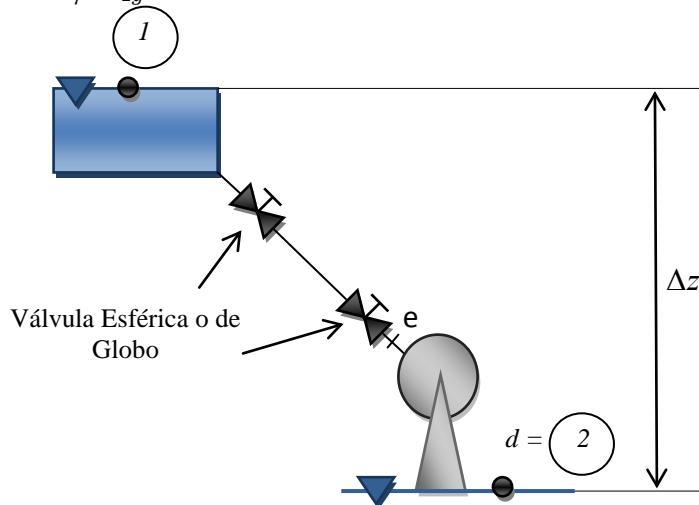


Figura 2.14. Esquema para la aplicación global de la ecuación de Bernoulli a THM.

El tubo de descarga de una turbina hidráulica actúa como un difusor para disminuir la velocidad del fluido en la descarga y recuperar así la energía cinética, transformándola a presión. Su comportamiento se incluye en la eficiencia interna de la turbina; es decir, forma parte integral de la máquina. Los depósitos siempre están abiertos a la atmósfera, $P_1 = P_2 = P_{atm} = 0$ en unidades manométricas. Además, la velocidad del fluido sobre las superficies libres de los depósitos es muy baja y puede despreciarse $V_1 \approx V_2 \approx 0$.

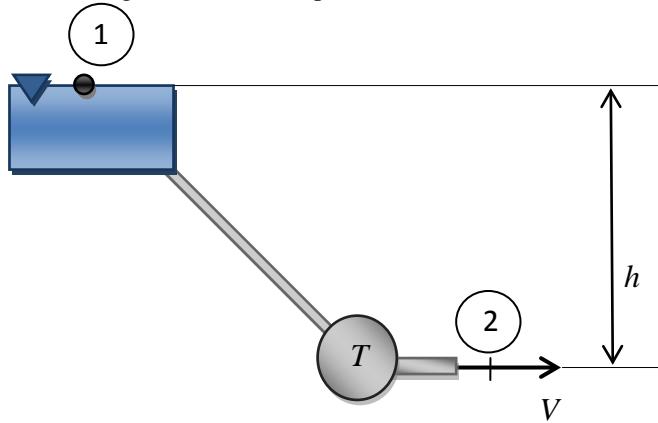
Entonces:

$$H_T = \Delta z - h_{f1-2} \quad (2.98)$$

La altura disponible en el fluido para entregar a la turbina es igual al salto geodésico menos la altura de pérdidas que ocurren en la tubería forzada de aducción.

Ejemplo 2.11

En la instalación de turbina anexa, las pérdidas totales por fricción en las tuberías se pueden expresar como $K \left(\frac{V^2}{2g} \right)$ donde V es la velocidad del agua en la descarga. La sección transversal de flujo de la tubería es A y es constante a lo largo de la misma. Obtener una expresión en función del caudal de agua turbinado, Q , para:



- Altura de turbina, H_T .
- Potencia mecánica entregada por la turbina si esta tiene una eficiencia η_T
- La condición para máxima potencia entregada por la turbina, suponiendo Δz , K y η_T constantes y Q variable.

- Altura de la turbina

$$H_T = \Delta z - K \frac{V^2}{2g} = \Delta z - K \frac{Q^2}{2gA^2}$$

- Potencia mecánica con η_T conocida

$$\dot{W}_{hid} = \gamma Q H_T = \gamma Q \left(\Delta z - K \frac{Q^2}{2gA^2} \right)$$

$$\dot{W}_{mec} = \gamma Q \eta_T \left(\Delta z - K \frac{Q^2}{2gA^2} \right)$$

- Condición de caudal para obtener la máxima potencia mecánica

$$\frac{d\dot{W}_{mec}}{dQ} = \gamma \eta_T \Delta z - \frac{3\gamma \eta_T K Q^2}{2gA^2} = 0$$

$$Q^2 = \frac{2g \Delta z A^2}{3K}$$

$$Q = \sqrt{\frac{2g \Delta z A^2}{3K}}$$

Ejemplo 2.12

Una turbina hidráulica tipo Francis se coloca al final de una galería de presión que tiene 400 m de longitud y 1 m de diámetro interno, tubería de hormigón liso con $\varepsilon = 0.04 \text{ mm}$. La diferencia de cota entre la entrada de la turbina y la superficie libre en el embalse son 120 m. Considere que todas las pérdidas de carga de la galería de presión (tubería de suministro de agua colocada entre la entrada de la turbina y la presa) se pueden calcular con $K \frac{V^2}{2g}$, con K constante y V la velocidad media en la tubería. Siendo

$K = f \frac{L}{D}$; donde L es la longitud de la tubería de la galería de presión y D su diámetro interno. Si la eficiencia global de la turbina es $\eta_T = 85\%$. Para agua a 20°C, calcular:

- La potencia máxima que se puede obtener de dicha turbina
- Girando a 1200 rpm cual será el torque generado

Datos:

$$\text{Agua } 20^\circ\text{C } \rho = 998 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}; \nu = 1.01 \times 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

$$L = 400 \text{ m}$$

$$D = 1 \text{ m}$$

$$\varepsilon = 0.04 \text{ mm}$$

$$\Delta z = 120 \text{ m}$$

$$h_{f1-2} = K \frac{V^2}{2g}$$

$$\text{Con } K = f \frac{\frac{L}{D}}{4}$$

$$\eta_T = 85\%$$

$$N = 1200 \text{ rpm}$$

- a) La condición de caudal para máxima potencia mecánica se muestra en el ejemplo anterior

$$Q = \sqrt{\frac{2g\Delta z A^2}{3K}} = \sqrt{\frac{2x9.81 \frac{m}{s^2} x 120mx \left(\frac{\pi x_1}{4}\right)^2 m^4}{3f \frac{400}{1}}}$$

Como no se conoce el número de Reynolds, el factor de fricción f , no puede calcularse debido a que no se conoce el caudal Q , una primera suposición para factor de fricción se toma en la región completamente rugosa del diagrama de Moody en función de la rugosidad relativa.

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{0.04mm}{1000mm} = 0.00004 \text{ con este valor se obtiene } f = 0.01 \text{ (Ver Apéndice, resumen de ecuaciones)}$$

Sustituyendo este valor de f se obtiene una primera magnitud para el caudal

$$Q = 11 \frac{m^3}{s}$$

$$Re_D = \frac{4Q}{\pi D v} = \frac{4x11 \frac{m^3}{s}}{\pi x 1mx 1.01x10^{-6} \frac{m^2}{s}} = 1.4x10^7$$

Con Re_D y $\frac{\varepsilon}{D}$ se recalcula el valor de f en el diagrama de Moody y se obtiene:

$$f = 0.01 \text{ como no cambio el factor de fricción, el caudal manejado por la turbina será: } Q = 11 \frac{m^3}{s}$$

La potencia máxima se calcula usando la ecuación del ejemplo anterior con

$$K = 0.01x \frac{400m}{1m} = 4$$

$$\dot{W}_{mec} = \gamma Q \eta_T \left(\Delta z - K \frac{Q^2}{2gA^2} \right)$$

$$= 998x9.81 \frac{N}{m^3} x 11 \frac{m^3}{s} x 0.85x \left(120m - 4 \frac{11^2 \frac{m^6}{s^2}}{2x9.81 \frac{m}{s^2} x \left(\frac{\pi x_1}{4}\right)^2 m^2} \right)$$

$$\dot{W}_{mec} = 7323991.59 W = 7.32 MW$$

- b) Torque generado

$$\dot{W}_{mec} = \omega T$$

$$T = \frac{\dot{W}_{mec}}{\omega} = \frac{7323991.59 W}{1200x \frac{\pi}{30}} = 58282.47 Nm$$

Ejemplo 2.13

Una turbina hidráulica con una eficiencia global de 85% y eficiencia mecánica 95% genera una potencia mecánica de 16 MW. La tubería forzada tiene una longitud de 2 Km, un diámetro de 24 pulg (DI=DN) y es de concreto ($\varepsilon = 0.15 mm$). La turbina maneja un caudal de $4 m^3/s$. Calcule: a) La diferencia de cota que aprovecha la turbina, b) La eficiencia hidráulica del sistema que transporta el agua a la turbina, c) El esquema de potencias.

Datos:

$$\text{Agua } 20^\circ C \rho = 998 \frac{kg}{m^3}; v = 1.01x10^{-6} \frac{m^2}{s}$$

$$\eta_T = 85\%$$

$$\eta_{mec} = 95\%$$

$$\dot{W}_{mec} = 16 MW$$

$$L = 2000 m$$

$$D = 24 \text{ pulg} = 0.6096 m$$

$$\varepsilon = 0.15 mm$$

$$Q = 4 m^3/s$$

- a) Diferencia de cota

$$H_T = \Delta z - h_{f1-2}$$

Se requiere calcular primero la altura de la turbina H_T y las pérdidas en la tubería forzada

$$\dot{W}_{hid} = \frac{\dot{W}_{mec}}{\eta_T} = \frac{16 MW}{0.85} = 18.82 MW$$

$$\dot{W}_{hid} = \gamma Q H_T \rightarrow H_T = \frac{\dot{W}_{hid}}{\gamma Q} = \frac{18.82x10^6 W}{998x9.81 \frac{N}{m^3} x 4 \frac{m^3}{s}} = 480.57 m$$

Pérdidas en la tubería forzada

$$h_{f1-2} = \frac{8fL}{g\pi^2 D^5} Q^2$$

$$Re_D = \frac{4Q}{\pi D v} = \frac{4x4 \frac{m^3}{s}}{\pi x 0.6096 m x 1.01 x 10^{-6} \frac{m^2}{s}} = 8.3 \times 10^6$$

$$\frac{\epsilon}{D} = \frac{0.15 mm}{609.6 mm} = 0.00025$$

Con Re_D y $\frac{\epsilon}{D}$ se calcula el valor de f en el diagrama de Moody y se obtiene:

$$f = 0.014$$

$$h_{f1-2} = \frac{8fL}{g\pi^2 D^5} Q^2 = \frac{8x0.014x2000m}{9.81 \frac{m}{s^2} x \pi^2 x 0.6096^5 m^5} 4^2 \frac{m^6}{s^2} = 439.72 m$$

$$\Delta z = H_T + h_{f1-2} = 480.57 m + 439.72 m = 920.29 m$$

b) Eficiencia hidráulica del sistema de transporte

$$\eta_{SH} = \frac{\Delta z - h_{f1-2}}{\Delta z} = \frac{920.29 m - 439.72 m}{920.29 m} = 0.5222$$

$$\eta_{SH} = 52.22\%$$

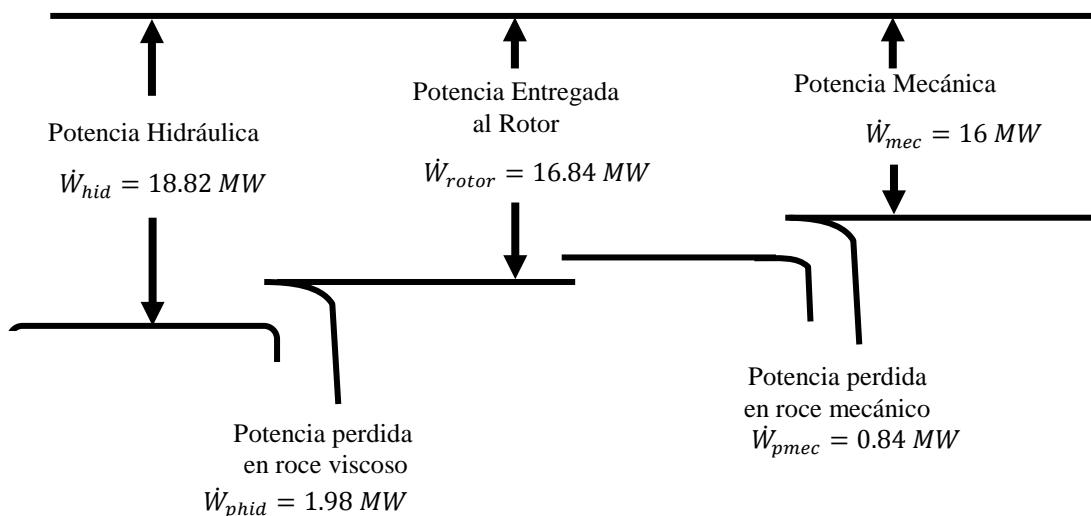
c) Esquema de potencias

A continuación se presentan los cálculos de las potencias que faltan para presentar el esquema:

$$\dot{W}_{rotor} = \frac{\dot{W}_{mec}}{\eta_{mec}} = \frac{16 MW}{0.95} = 16.84 MW$$

$$\dot{W}_{phid} = \gamma Q h_{fint} = \dot{W}_{hid} - \dot{W}_{rotor} = 18.82 MW - 16.84 MW = 1.98 MW$$

$$\dot{W}_{pmech} = \dot{W}_{rotor} - \dot{W}_{mec} = 16.84 MW - 16 MW = 0.84 MW$$



3. Problemas

Compresores

2.1 Un compresor centrifugo toma aire en condiciones totales 90 KPa y 15°C y comprime hasta una presión total de 400 KPa , el rendimiento adiabático y mecánico es 79% y 98% respectivamente cuando se maneja un flujo máscio de 0.45 Kg/s . Calcule la potencia del motor de accionamiento y el diámetro del ducto de descarga del compresor para que el número de mach sea igual a 0.3. $k=1.4$ (aire) $R=287 \text{ J/KgK}$, $C_p=1005 \text{ J/KgK}$

2.2 Un compresor centrífugo que funciona con aire en el Pico del Águila ($P_{atm}=60 \text{ KPa}$ y $T_{amb}=6^\circ\text{C}$) tiene un manómetro colocado en la brida de descarga que mide una presión de 75 psig . El termómetro colocado en la salida mide 300°C . El conducto de salida es circular y tiene un diámetro de 5 cm y la velocidad de salida es 50 m/s .

Determinar:

La potencia necesaria en el eje si el rendimiento mecánico del compresor es 95%.

¿Qué potencia se pierde por fricción mecánica?

¿Qué potencia se pierde por fricción viscosa del fluido de trabajo?

¿Cuál estima usted que puede llegar a ser la máxima velocidad en el conducto de salida de este compresor?

2.3 Un compresor de flujo radial maneja un flujo másico de aire de 0.41 Kg/s , la relación de compresión es 5, la cual corresponde a una presión total en la descarga de 400 KPa y temperatura total de 200°C . El compresor aspira aire de la atmósfera a una temperatura de 25°C y tiene una eficiencia mecánica de 98%. Calcular:

Potencia en el eje del compresor

Potencia perdida debido a fricción fluido-metal, desprendimiento de capa límite y cambios bruscos en la dirección del fluido

Rendimiento adiabático del compresor

Rendimiento total del compresor

Perdidas por fricción mecánica

Caudal de aire del compresor

Hacer el diagrama $T-s$ y el esquema de potencias

$$k = 1.4 \quad R = 0.287 \frac{\text{KJ}}{\text{KgK}} \quad C_p = 1.004 \frac{\text{KJ}}{\text{KgK}}$$

2.4 Un compresor centrífugo funcionando con aire, tiene una sola etapa y gira a 5000 RPM . El compresor tiene las siguientes características: succión desde presión atmosférica de 100 KPa y temperatura ambiente de 15°C (considere que la velocidad de entrada del aire es muy pequeña, cercana a cero). La presión medida con un manómetro a la descarga del compresor es 400 KPa y la temperatura estática 250°C . La descarga se realiza por medio de una tubería de 4 pulgadas de diámetro interno y en ese punto se mide una velocidad promedio de 100 m/s . Considere que la eficiencia mecánica es de 95% y según datos del fabricante las perdidas internas totales son debidas en un 80% a pérdidas en el rotor y el resto en el estator. El compresor tiene un manómetro de control colocado a la entrada del estator y mide una presión de 300 KPa . Calcular:

- a) El torque que se aplica en el eje
- b) El número de Mach a la salida del rotor
- c) Las pérdidas de carga por irreversibilidades que se tienen en el estator

$$k = 1.4, \quad R = 287 \frac{\text{J}}{\text{KgK}}, \quad C_p = 1006 \frac{\text{J}}{\text{KgK}}$$

2.5 Entra aire a 19°C y 100KPa ($k = 1.4, \quad R = 287 \frac{\text{J}}{\text{KgK}}, \quad C_p = 1005 \frac{\text{J}}{\text{KgK}}$) al impulsor de un compresor centrífugo. La potencia mecánica es igual a 100 KW y tiene un rendimiento global de 82%. El flujo másico es 1 Kg/s y la presión en la descarga medida con un manómetro es igual a 95 KPa a una temperatura de 230°C . Calcular el número de Mach en la descarga, el diámetro de la tubería de descarga y el rendimiento interno del compresor.

2.6 Un compresor centrífugo con un rendimiento mecánico de 95% toma aire a 100 KPa y 25°C . El flujo másico es 1 Kg/s de aire. A la descarga del compresor se mide una presión manométrica de 75 psig y una temperatura de 260°C . El diámetro de la tubería de salida es 5 cm . Calcular:

- El rendimiento interno y el número de Mach a la salida del compresor.
- Potencia ideal
- El trabajo específico intercambiado en el rotor
- Potencia en el eje
- Eficiencia global del compresor

2.7 Un turbo compresor de una etapa comprime aire desde 1 atm y 20°C hasta unas condiciones totales de 1.2 atm y 40°C . Dibuje el diagrama Ts de compresión y calcule el rendimiento interno adiabático- Si el flujo de aire operado es 1 Kg/s y el rendimiento mecánico es 95%, calcular la potencia del motor de accionamiento en KW .

Turbinas Térmicas

2.8 Se tiene una turbina de gas de flujo radial con condiciones de estancamiento en la entrada de 0.4 MPa y 1140 K . La presión estática en la salida es 0.1 MPa y se supone que la velocidad en la salida es despreciable. La eficiencia adiabática es 90% y la eficiencia mecánica 95%. Las propiedades del gas que pasa por la turbina son: $k=1.333$, $R=287 \text{ J/KgK}$. La potencia útil producida es 900 KW . Calcular flujo másico de gas manejado por la turbina. Calcular la potencia intercambiada en el rotor. Si el número de Mach a la salida del distribuidor (Tobera) es igual a 1, calcule la velocidad del flujo de gas a la entrada del rotor. Si la caída de presión por fricción en la tobera es 0.196 MPa , calcular el Diámetro del rotor si el ancho del alabe del rotor es igual a 1.8 cm .

2.9 Una turbina de gas de flujo axial, desarrolla una potencia mecánica de 4 MW con un flujo másico de 32 Kg/s de un gas ($R=0.292 \text{ KJ/KgK}$ y $C_p=1.2 \text{ KJ/KgK}$). Las condiciones totales en la entrada de la etapa son: 800 KPa y 1200 K . El gas entra y sale de la etapa en dirección axial (dirección z en un sistema coordenado cilíndrico) y se debe cumplir en la turbina como criterio de diseño, que la velocidad axial se mantenga constante. La presión estática a la salida de las toberas es 500 KPa y la velocidad absoluta del gas es 455 m/s , la cual sale de las toberas formando un ángulo de 65° con la dirección axial.

Determinar:

La velocidad en la entrada de la etapa de la turbina.

La velocidad en la salida de la etapa de la turbina.

El número de Mach en la salida de las toberas.

La caída de presión por fricción en las toberas.

Si la eficiencia interna de la etapa es 75% calcule las perdidas en el rotor y en el estator sabiendo que el 60% de las pérdidas se producen en el rotor. La eficiencia mecánica es 95%.

Dibujar el esquema de potencias de la turbina con sus respectivos valores en *megavatios*.

Explique el efecto que produce los canales fijos y móviles del estator y rotor respectivamente, sobre las velocidades absoluta y relativa en una turbina.

¿Qué velocidad (absoluta o relativa) tiene que variar para que el fluido ceda energía de presión al rotor?. Explique.

2.10 Una turbina de gas recibe aire a 873 K y 4000 kPa . En la salida, un manómetro mide una presión igual a 180 kPa . La potencia mecánica aprovechada es 20 MW manejando un flujo másico de gas igual a 80 Kg/s ($C_p=1006\text{ J/KgK}$, $k=1.4$, $R=287\text{ J/KgK}$), la eficiencia mecánica se estima en un 97%. Calcular el *diámetro del ducto de descarga* si el número de Mach es igual a 0.5. Calcular la *potencia hidráulica perdida* en la turbina.

2.11 Una turbina de gas genera una potencia mecánica de 4 MW cuando maneja 30 Kg/s de flujo másico de un gas con las siguientes propiedades: $C_p=1005\text{ J/KgK}$, $k=1.3$ y $R=232\text{ J/KgK}$. Las condiciones totales en la entrada son 800 kPa y 1100 K . La presión estática absoluta a la salida del estator es 461.42 kPa y el fluido sale de la tobera a una velocidad de 500 m/s . La presión total en la salida de la turbina es 420 kPa .

Calcular:

El número de Mach a la salida del estator

La eficiencia adiabática total a total de la turbina, si en rendimiento mecánico se estima en 98%.

La potencia debido a pérdidas mecánicas

La potencia debido a pérdidas hidráulicas

La potencia debido a pérdidas hidráulicas en el estator con su respectivo porcentaje respecto a las pérdidas hidráulicas totales de la etapa.

La potencia debido a pérdidas hidráulicas en el rotor con su respectivo porcentaje respecto a las pérdidas hidráulicas totales de la etapa.

2.12 La primera etapa de una turbina axial desarrolla una potencia medida en el eje de 4 MW , en el momento en que está manejando 30 Kg/s de gas producido por una cámara de combustión que tiene en su salida las siguientes condiciones: 800 kPa de presión total absoluta y 1200 K de temperatura total. A la entrada del rotor de la etapa se tiene una presión estática relativa de 400 kPa y el gas en ese punto tiene una velocidad de 320 m/s . La velocidad del gas a la entrada de la tobera y a la salida del rotor es de 250 m/s .

Calcular:

La caída de presión en la tobera

El valor del número de Mach a la entrada del rotor

La eficiencia total a total de la etapa si se produce un incremento de entropía de 3 J/KgK a través del rotor y la turbina tiene una eficiencia mecánica de 95%

La potencia perdida por roce mecánico

La potencia perdida por irreversibilidades internas de la etapa

Considerar: $P_{atm} = 100\text{ kPa}$, $C_p = 1350 \frac{\text{J}}{\text{KgK}}$, $k = 1.3$, $R = 311.54 \frac{\text{J}}{\text{KgK}}$

2.13 Entra y sale gas axialmente de una turbina axial. El gas sale de las toberas formando un ángulo de 60° . La velocidad de entrada a la turbina es igual a 160 m/s . El torque que se aprovecha de esta turbina es 3628.733 Nm con una velocidad de giro de 10000 RPM , la potencia de la turbina se usa para accionar un generador. La eficiencia mecánica es 95%. Las condiciones totales a la entrada de la etapa son 800 kPa y 1120 K . Un manómetro colocado a la salida de las toberas mide 350 kPa . La variación en las entalpías estáticas (salida real menos salida ideal del rotor $h_3 - h_{2s}$) es 3300 J/Kg . El flujo másico de gas manejado por la turbina es 25 Kg/s . Tomar $C_p = 1200 \frac{\text{J}}{\text{KgK}}$, $R = 300 \frac{\text{J}}{\text{KgK}}$.

Calcular:

El número de Mach a la salida de la tobera

La caída de presión por fricción en el estator

La eficiencia adiabática total a total

La potencia debido a pérdidas hidráulicas en el rotor

La potencia debido a pérdidas hidráulicas en el estator

2.14 Una turbina axial maneja un flujo másico de 30 Kg/s , produce en el eje 4 MW . Las condiciones totales en la entrada son 800 KPa y 1200 K . La velocidad de entrada al estator es igual a la velocidad de salida del rotor con una magnitud de 160 m/s . En la salida del estator se registra una presión de 500 KPa , La velocidad a la salida de las toberas es 500 m/s . Calcular:

- El número de Mach a la entrada del rotor.
- Las pérdidas carga por irreversibilidades en el estator.
- Si se tiene una eficiencia mecánica de 98% y una ganancia de entropía específica de 3 J/KgK cuando el gas atraviesa el rotor. Determine el rendimiento total a total de la etapa completa.
- Para las mismas condiciones anteriores cual sería el rendimiento de la etapa, considerando condiciones estáticas en lugar de condiciones totales.
- ¿Cuál es la potencia perdida por irreversibilidades no mecánicas?

2.15 Una turbina de vapor de alta presión es alimentada con vapor a una presión de estancamiento de 7 MPa (abs) y temperatura de estancamiento 500°C . La entalpía específica correspondiente es 3410 KJ/Kg . El vapor sale de la turbina a una presión de estancamiento de 0.7 MPa (abs), el vapor permanece en la condición de sobrecalentamiento a través de la expansión. Puede suponerse que el vapor se comporta como un gas perfecto sobre el rango de la expansión con $k=1.3$. La eficiencia adiabática de la turbina es aproximadamente 85 %. Determinar:

La temperatura de estancamiento al final de la expansión

El volumen específico al final de la expansión

El rendimiento total de la turbina si la eficiencia mecánica es 86 %

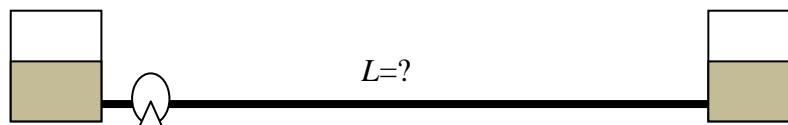
El volumen específico del vapor sobrecalentado está representado por:

$$Pv = 0.231(h - 1943) \text{ Donde } P \text{ está en KPa, } v \text{ en } \frac{\text{m}^3}{\text{Kg}} \text{ y } h \text{ en } \frac{\text{KJ}}{\text{Kg}}$$

2.16 Una turbina de vapor recibe el fluido a condiciones totales de 4 MPa y 300°C . El vapor sale de la turbina con una presión total de 0.35 MPa . La potencia entregada al eje de la máquina es de 20 MW y la eficiencia mecánica es de 98%. El flujo másico es de 55 Kgm/s . Calcular; a) la eficiencia adiabática o interna, b) La potencia entregada al rotor, c) La potencia perdida en roce viscoso, d) La potencia disponible en el vapor, e) La potencia perdida en roce mecánico.

Bombas

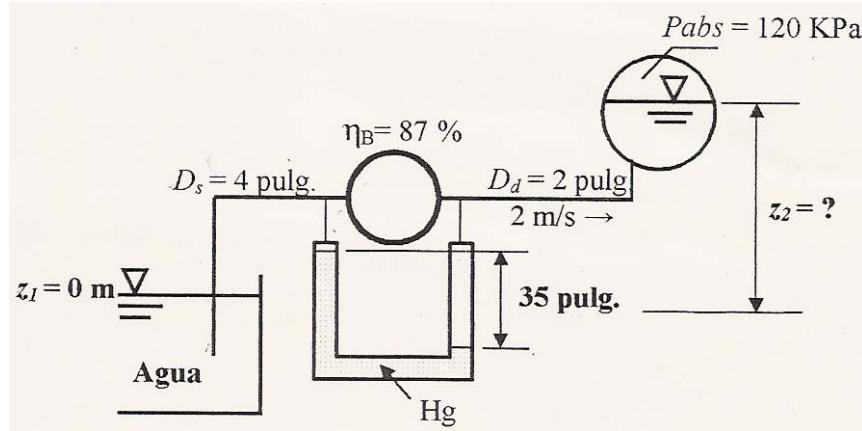
2.17 Un manómetro de tubo en U colocado entre la entrada y la salida de una bomba da una diferencia de altura de 40 pulgadas de mercurio. El ducto de succión tiene 4 pulg. y el descarga 2 pulg. El caudal manejado es $0.1 \text{ m}^3/\text{s}$. Las tuberías son de acero comercial $\epsilon = 5 \times 10^{-5} \text{ m}$. Desprecie las pérdidas en la tubería de succión y calcule la longitud máxima de la tubería de descarga para bombear agua hasta el siguiente depósito. Si el rendimiento interno es 80% calcule la potencia debido a pérdidas internas de la bomba y la potencia mecánica de la bomba si el rendimiento mecánico es 97%.



2.18 Un sistema de bombeo ubicado en Mérida ($P_{atm} = 85 \text{ KPa}$) debe vencer una diferencia de cota de 15 m , tanto la succión y la descarga están abiertas a la atmósfera. Se debe impulsar 0.25 lts/s de agua a 40°C ($\rho = 992 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$; $v = 1 \times 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$). Las tuberías son de hierro galvanizado (rugosidad $\epsilon = 0.15 \text{ mm}$). El diámetro de la tubería de descarga es 2 pulg. ($DN=DI$). Para evitar cavitación la presión en la succión debe mantenerse superior a 12 KPa (abs). Determine el diámetro nominal mínimo de la tubería de succión y la potencia mecánica de la bomba si esta tiene una eficiencia global de 60 %. La longitud total de la tubería de succión es 12 m y la bomba esta en aspiración a 5 m de la superficie libre del tanque de succión. La tubería de descarga 70 m . Desprecie pérdidas secundarias.

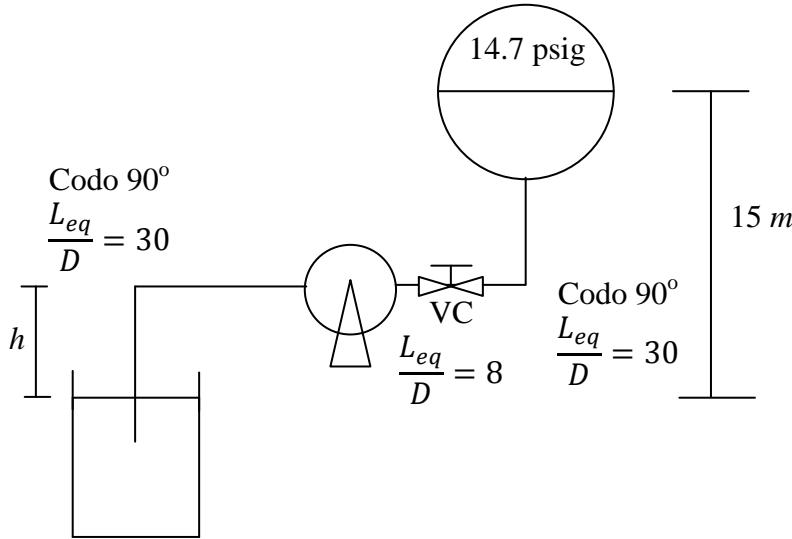
2.19 En el esquema de bombeo anexo calcular:

- Altura de bombeo
- Potencia útil
- Potencia del motor
- Si se consumen 120 W de potencia debido a pérdidas en las tuberías de succión y de descarga. ¿A qué altura puede descargar agua la bomba? El tanque de descarga está presurizado a una presión absoluta de 120 KPa .

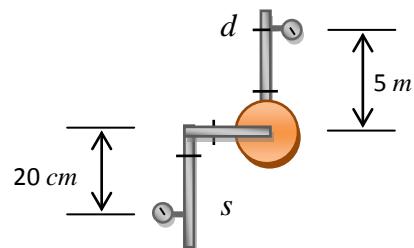


2.20 En el sistema de bombeo que se muestra la longitud de la tubería de succión es de 16 m y la tubería de descarga tiene 30 m de longitud. Se bombea un caudal de 5.31 lts/s de agua a 20°C ($\rho = 998 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$; $\nu = 1.01 \times 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$), el diámetro nominal de la tubería de succión y descarga es 2 pulg . Las tuberías son de acero comercial nuevo ($\varepsilon = 0.046 \text{ mm}$). Calcular el valor de h (altura desde el nivel de agua en el tanque de aspiración hasta la entrada de la bomba) para que la presión en la entrada de la bomba sea igual a la presión de vapor, siendo $P_v = 3.337 \text{ KPa}$ (Presión de vapor del agua a 20°C). ¿Qué puede opinar sobre el valor obtenido? Calcular la potencia mecánica de la bomba y las pérdidas hidráulicas producidas en el interior de la misma si la eficiencia total y mecánica es 85% y 97% respectivamente.

$$P_{atm} = 101.35 \text{ KPa}$$

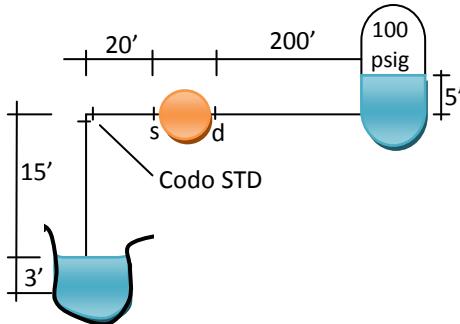


2.21 En una bomba trabajando con agua a 20°C , el manómetro de descarga situado a 5 m por encima del eje de la bomba marca una presión de 30 metros de columna de agua. El vacuómetro situado 20 cm por debajo del eje de la bomba marca un vacío de 50 mm de mercurio.



Las tuberías de succión y descarga son de igual diámetro. Las pérdidas por fricción en la tubería entre 's' y 'd' se estiman en 1.5 m . Calcular la potencia del motor en KW cuando la bomba maneja un caudal de 180 lps y tiene una eficiencia total de 85% .

2.22 El sistema de bombeo de la figura debe enviar $0.25 \text{ pie}^3/\text{s}$ de agua ($\rho = 62.4 \text{ lbm/pie}^3$ y $\nu = 10 \text{ pie}^2/\text{s}$) al tanque que se encuentra presurizado a 100 psig . Las tuberías de succión y descarga de la bomba son de acero comercial ($\varepsilon = 0.00015 \text{ pie}$). La tubería de descarga de la bomba al tanque es de $1.5"$ (suponga $DN = DI$). La presión atmosférica local es de 14.7 psia .



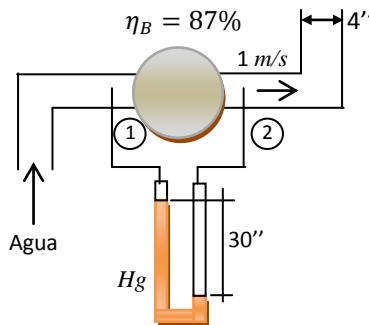
Para que la bomba opere libre de cavitación, la presión P_s no debe ser menor de 5 psia. Determine el diámetro nominal mínimo que requiere la tubería de succión de la bomba y la potencia mecánica que consume la bomba si esta tiene una eficiencia del 60%.

2.23 En el esquema de bombeo anexo calcular:

Altura de bombeo

Potencial útil

Potencia del motor en KW.



2.24 Una bomba centrífuga está diseñada para un caudal $Q = 75 \text{ m}^3/\text{h}$ de agua caliente a 80°C . Los manómetros de salida y de entrada marcan una presión de 17.2 atm y 150 mm Hg respectivamente. La diferencia de altura entre los puntos donde están instalados los manómetros es de 0.90 m y los diámetros de las tuberías de salida y entrada son iguales. La potencia que necesita el motor eléctrico de la red es 54 KW. Determinar el rendimiento global y el rendimiento interno de la bomba si el rendimiento del motor eléctrico es de 0.95 y el rendimiento mecánico de la bomba es 0.97.

Ventiladores

2.25 Un ventilador debe manejar $5 \text{ m}^3/\text{s}$ de aire (peso específico= 11.77 N/m^3), las pérdidas de carga se pueden calcular considerando las siguientes características de los ductos:

Las pérdidas primarias en el ducto de entrada cuyo diámetro es 50 cm y tiene 60 m de longitud, se pueden calcular considerando un coeficiente de fricción de 0.01 . Se debe considerar además la pérdida de carga en la entrada (pérdida secundaria) igual a 50 Pa .

Las pérdidas primarias en el ducto de descarga cuyo diámetro es 40 cm y tiene 120 m de longitud, se pueden calcular considerando un coeficiente de fricción de 0.01 . Al final de los 120 m de longitud del ducto de descarga se tiene un difusor cuyo diámetro de salida es 60 cm , este difusor produce una pérdida de carga de 10 m de aire.

Dibujar los diagramas de presión estática y total en metros de aire.

Calcular la potencia mecánica del ventilador si este tiene una eficiencia global de 75%.

2.26 Se necesita impulsar $5 \text{ m}^3/\text{s}$ de aire de una ambiente a otro, a través de un ducto de ventilación. Se desea conocer los diagramas de distribución de presiones estáticas y totales del sistema (*en mm de agua*), la potencia mecánica del ventilador y la altura de perdidas internas que se producen en el ventilador. Se estima que el ventilador tiene una eficiencia interna de 82% y una eficiencia mecánica de 97%. Las características del sistema son:

Longitud y diámetro del ducto de entrada: 45 m y 60 cm respectivamente.

Longitud y diámetro del ducto de salida: 55 m y 50 cm respectivamente.

El coeficiente de fricción de Darcy para ambos ductos se puede estimar igual 0.015

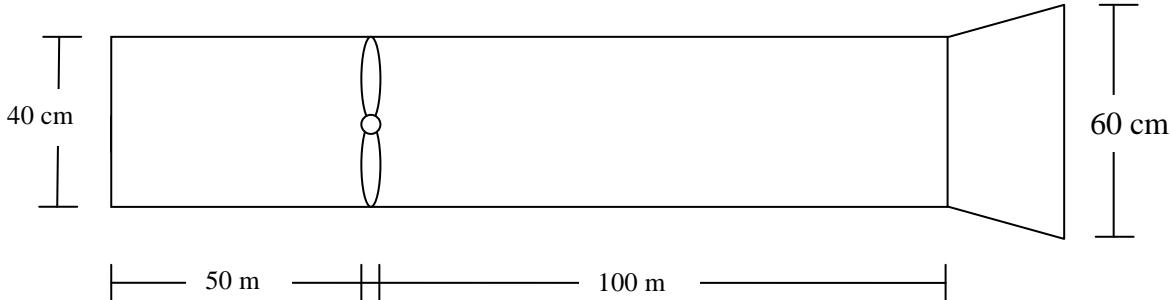
El ducto de salida termina con un difusor cuyo diámetro de salida es 60 cm y la pérdida de carga se estima en 18 mm agua .

2.27 Un ventilador maneja un caudal de $5 \text{ m}^3/\text{s}$ de aire a través de un ducto de 200 m y de 50 cm de diámetro el cual termina en un difusor con un diámetro de salida de 70 cm . Las pérdidas se estiman usando un coeficiente de fricción de 0.012. La pérdida en la entrada se calcula con $0.2V^2/(2g)$ y la perdida en el difusor con $0.4V^2/(2g)$. Trace los diagramas de presión total y estática **con sus**

respectivos valores. Calcule la potencia mecánica del ventilador con un rendimiento global de 85%. El ventilador está ubicado a 50 metros de la entrada al ducto.

2.28 Un ventilador maneja $5 \text{ m}^3/\text{s}$ de aire en un ducto de 50 cm de diámetro y rugosidad 0.001 mm . La pérdida de la entrada se estima en 25 m de aire y en la salida se tiene un difusor con una pérdida de 30 m de aire y diámetro de salida 60 cm . Calcule la **longitud máxima del ducto** a través del cual el ventilador con una potencia mecánica de 10 KW y eficiencia global 87% puede transportar el aire. **Trace los diagramas de presión total y estática** en metros de aire. El ventilador debe colocarse a 20 m de la entrada.

2.29 Un ventilador debe impulsar $2 \text{ m}^3/\text{s}$ de aire, las pérdidas secundarias se pueden estimar usando el método de longitud equivalente con un valor de $L_{eqE} = 25 \text{ m}$ (Entrada al ducto) y $L_{eqD} = 25 \text{ m}$ (en el difusor de salida). El ducto se puede considerar liso y el coeficiente de fricción se calcula usando la ecuación de Blasius $f=0.316/Re_D^{1/4}$. Trace los diagramas de distribución de presión estática y total, calcule la altura del ventilador y la potencia mecánica si la eficiencia global es 82%.



2.30 Un ventilador axial posee un conducto de entrada de sección circular de diámetro 30 cm y un conducto de descarga de 40 cm , también circular. A la salida del conducto de descarga se coloca un difusor con un diámetro de salida de 60 cm . Las pérdidas de carga en el conducto de entrada son de 30 mm de columna de agua. Las pérdidas de carga en el conducto de salida son de 40 mm de columna de agua y un manómetro colocado entre el conducto de salida y el difusor mide una presión de 10 mm de columna de agua.

Dibuje las líneas de presión estática y total a lo largo del sistema

Determine la potencia del motor, si maneja un caudal de $3000 \text{ m}^3/\text{h}$ y la eficiencia global es 70%

Si las pérdidas por fricción mecánica son 50 W , estime la eficiencia mecánica y la eficiencia interna del ventilador.

Nota: el ventilador se encuentra instalado en Mérida, donde la presión atmosférica es 85 KPa y la temperatura ambiente promedio es 23°C .

2.31 Un ventilador centrífugo maneja $15000 \text{ m}^3/\text{h}$ de aire. Los diámetros de los ductos de entrada y salida son 40 y 50 centímetros respectivamente. Al final del ducto de salida hay un difusor cuyo diámetro de salida es 60 cm .

La pérdida de presión de toda la línea de entrada es 21 mm de agua y esto incluye la pérdida en la entrada al ducto, la cual se estima igual a 7 mm de agua.

La pérdida de presión en toda la línea de salida incluyendo el difusor se estima igual a 28 mm de agua, la pérdida solo en el difusor es de 10 mm de agua.

Calcular:

Las pérdidas en los ductos, en metros de altura equivalente de aire

Trazar los diagramas de la repartición de la presión estática y total del sistema, escriba los valores de presión en cada punto en mm de agua.

Calcule la potencia mecánica del ventilador si la eficiencia global es 82%.

2.32 Un ventilador axial maneja un caudal de aire de $15000 \text{ m}^3/\text{h}$ y posee conductos de sección circular. El ducto de entrada tiene una longitud de 20 m y el de descarga 150 m de longitud, ambos de 50 cm de diámetro. El factor de fricción se puede estimar suponiendo que los conductos son lisos y se utiliza la ecuación de Blasius $f = \frac{0.316}{(Re_D)^{1/4}}$ independientemente del valor del Número de Reynolds. Se pide:

Dibuje las líneas de presión estática y total del sistema en ***m de columna de aire***.

Determine la potencia mecánica del motor si el rendimiento total es 85%.

Suponga $P_{atm} = 100 \text{ Kpa}$ y $T_{amb} 15^\circ\text{C}$

Se desprecian las pérdidas locales

2.33 Se necesita un ventilador para mover $5 \text{ m}^3/\text{s}$ de aire a través de un ducto de 40 cm de diámetro, la longitud del ducto de entrada es 50 cm y la longitud del ducto de salida 120 m . El tubo de salida termina con un difusor cuyo diámetro de descarga es 60 cm , este difusor produce una pérdida de carga que se calcula usando el método de longitud equivalente, de esta forma la longitud equivalente del difusor para calcular la perdida secundaria, considerándolo como una expansión gradual, se estima igual a 25 m . Se puede suponer que el coeficiente de fricción de Darcy en todo el ducto es igual a 0.01 . Dibuje los diagramas de presión estática y total y calcule la potencia mecánica del ventilador si su eficiencia global es igual a 83% . Este ventilador se encuentra en un sitio con condiciones atmosféricas estándar.

Nota: considerar como pérdida secundaria solamente la que produce el difusor, cuya longitud equivalente es conocida.

2.34 Un ventilador axial maneja un caudal de $3000 \text{ m}^3/\text{h}$ de aire y posee un conducto de entrada de sección circular de diámetro 30 cm y un conducto de descarga de 40 cm , también circular. A la salida del conducto de descarga se coloca un difusor con un diámetro de salida de 60 cm . Las pérdidas de carga en el conducto de entrada son de 30 mm de agua y en el conducto de salida 40 mm de columna agua y un vacuómetro colocado entre el conducto de salida y el difusor mide una presión de 1 mm de columna de agua.

- Dibuje las líneas de presión estática y total a lo largo del sistema
- Determine la potencia del motor si la eficiencia global es 70%

Nota: el ventilador está en Mérida $P_{atm} = 85 \text{ KPa}$, $T_{amb} = 293 \text{ K}$

2.35 En un sistema de ventilación se requiere movilizar un caudal de $0.4 \text{ m}^3/\text{s}$ de aire, la longitud del ducto de entrada es 50 m y la longitud del ducto de salida 400 m , ambos de sección rectangular y con la misma área de $45 \times 35 \text{ cm}^2$, el rendimiento total y mecánico es $70\% - 95\%$ respectivamente, el coeficiente de fricción de Darcy en los ductos de entrada y salida se estima igual a 0.01 . Dibujar los diagramas de presión estática y total. Calcular la potencia mecánica del ventilador que se necesita. $P_{atm} = 85 \text{ KPa}$, $T_{amb} = 15^\circ\text{C}$, $R_{aire} = 287 \frac{\text{J}}{\text{kgK}}$

2.36 Un ventilador para ser colocado a la entrada de un ducto circular de 40 cm de diámetro y 120 m de longitud, debe manejar $15000 \text{ m}^3/\text{h}$ de aire. Si tomamos el ducto como tubería lisa. Determinar:

- La potencia necesaria a ser suministrada en el eje si el rendimiento global es 70% .
- La presión estática a la salida del ventilador medida en *milímetros* de columna de agua y en pulgadas de mercurio

2.37 Un ventilador debe manejar $2.3 \text{ m}^3/\text{s}$ de aire (peso específico = 11.77 N/m^3), las pérdidas de carga se pueden calcular considerando las siguientes características de los ductos:

Las pérdidas primarias en el ducto de entrada cuyo diámetro es 50 cm y con una longitud de 50 m , se pueden calcular considerando un coeficiente de fricción de 0.01 . Se debe considerar además la pérdida de carga en la entrada (pérdida secundaria) igual a 50 Pa .

Las pérdidas de carga en el ducto de descarga que tiene un diámetro de 40 cm y 120 m de longitud, también se calculan con un coeficiente de fricción de 0.01 . Al final de los 120 m del ducto de descarga se tiene un difusor cuyo diámetro de salida es 60 cm , éste difusor produce una pérdida de carga de 10 m de aire.

Dibujar los diagramas de presión estática y total en *metros* de aire.

Calcular la potencia mecánica del ventilador si este tiene una eficiencia global de 75% .

2.38 Un ventilador centrífugo debe suministrar un caudal de $12000 \text{ m}^3/\text{h}$ de aire. El diámetro del ducto de entrada $D_s = 50 \text{ cm}$ y el diámetro del ducto de salida $D_d = 45 \text{ cm}$. El ducto de salida termina con un difusor, cuyo diámetro de salida $D_{SD} = 60 \text{ cm}$. Trazar el diagrama de la repartición de la presión estática y total a lo largo de todo el ventilador o sea entre el ducto de entrada y la salida del difusor si la pérdida de presión en la línea de entrada $h_{f1-3} = 15 \text{ mm}$ agua, incluyendo la pérdida de entrada al ducto $h_{f2} = 5 \text{ mm}$ agua y la pérdida de presión en la línea de salida $h_{f4-6} = 22 \text{ mm}$ agua, incluyendo la pérdida en el difusor $h_{f5-6} = 12 \text{ mm}$ agua. Determine la altura de trabajo del ventilador H_V y la presión estática a la entrada del difusor.

Además, determine la potencia en *KW* del motor de accionamiento si la eficiencia total del ventilador es de 87% . El eje de toda la instalación es horizontal.

Turbinas Hidráulicas

2.39 Una turbina aprovecha un salto geodésico de 1000 m y un caudal de $1 \text{ m}^3/\text{s}$. Si el rendimiento del sistema hidráulico que suministra el agua a la turbina es de 75% , calcule la potencia hidráulica de la turbina. Si la eficiencia global es 80% calcule la potencia mecánica. Densidad del agua 998 Kg/m^3 .

2.40 Una turbina hidráulica con una eficiencia global de 85%, y eficiencia mecánica de 95% genera una potencia mecánica de 16 MW. La tubería forzada tiene una longitud de 2 Km y un diámetro de 24 pulg y es de concreto ($\varepsilon=0.15\text{ mm}$). La turbina maneja un caudal de $4\text{ m}^3/\text{s}$. Calcule: a) **La máxima diferencia de cota requerida**, b) **la eficiencia hidráulica del sistema**, c) **El esquema de potencias de la turbina con sus respectivos valores**.

2.41 Estime la longitud total de la tubería forzada del sistema hidráulico de suministro de agua (Eficiencia de 78.5%) hacia una turbina que funciona con un caudal de $2.2\text{ m}^3/\text{s}$ con tubería rugosa ($\varepsilon=0.1\text{ mm}$) y diámetro 24 pulg ($DN=DI$). El salto geodésico es 600 m. Calcule la potencia hidráulica del sistema, la potencia debido a perdidas por irreversibilidades internas del la turbina y la potencia mecánica si esta tiene una eficiencia global de 85% con una eficiencia mecánica aproximada de 98%.

2.42 Una turbina hidráulica tipo Francis se coloca al final de una galería de presión que tiene 400 m de longitud y 1 m de diámetro interno. La diferencia de cota entre la entrada de la turbina y la superficie libre en el embalse son 120 m. Considere que todas las pérdidas de carga de la galería de presión (tubería de suministro de agua colocada entre la entrada de la turbina y la presa) se pueden calcular como $K \frac{V^2}{2g}$ (K es constante y V la velocidad media de la tubería). Siendo $K = f \frac{L}{D}$ (f es el coeficiente de fricción de la tubería, L la longitud de la tubería y D el diámetro interno de la tubería). El valor de f en este caso se determina con la ecuación de Blasius, $f = \frac{0.316}{(Re_D)^{1/4}}$ Siendo Re_D el valor del número de Reynolds de la tubería de presión. Considere la viscosidad cinemática del agua igual a $1 \times 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$. Si la eficiencia global de la turbina es de 85%.

Calcular:

- La potencia máxima que se puede obtener de dicha turbina
- Girando a 1200 RPM cual será el torque generado.

2.43 La Central Hidroeléctrica de Santo Domingo tiene una diferencia de cota geodésica de 950 m. Si se construye una galería (tubería) de concreto de 2 m de diámetro interno con una longitud de 5000 m. Determine:

- La Altura disponible para la turbina
- La potencia mecánica que se puede obtener si el rendimiento global de la turbina es 80 %.
- Si las pérdidas de carga del sistema se pueden calcular por medio de la ecuación $K \frac{V^2}{2g}$ que valor tiene la constante K .
- ¿Cuál sería el rendimiento del sistema de alimentación de la turbina?
- Que potencia se obtendría si en lugar de una tubería de 2 m de diámetro se utiliza una tubería de 3 m de diámetro y cuál o cuáles serían las condiciones que definen la utilización de una u otra tubería.

2.44 La represa de Santo Domingo tiene una cota sobre el nivel del mar de 1500 m.s.n.m. La tobera de descarga a la turbina Pelton tiene un diámetro de 15 cm y se encuentra a 600 m.s.n.m. La tubería que une la presa con la casa de turbinas tiene una inclinación constante en todo su recorrido de 60° respecto a la horizontal y tiene un diámetro interno de 2 m. Si consideramos la tubería como tubería lisa. Calcular:

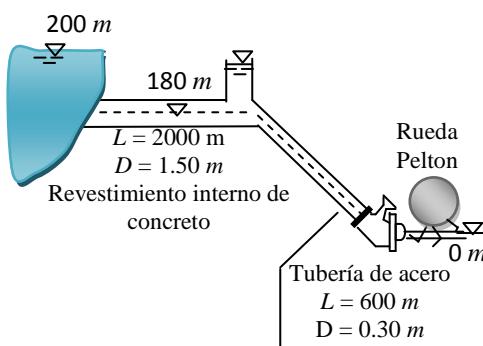
- La presión estática a la mitad de la tubería.
- La potencia que se podría obtener si el rendimiento global de la turbina es de 85%.
- El rendimiento del sistema de suministro de agua a la turbina,

2.45 La válvula de descarga produce una pérdida evaluada con $0.1Vs^2/2g$ donde Vs es la velocidad del chorro descargado, cuyo diámetro es de 0.10 m. Calcular:

El gasto descargado

El nivel del agua en el pozo de oscilación

La potencia del sistema en KW



Capítulo 3

Análisis Dimensional de Turbomáquinas Hidráulicas

3.1 Introducción.

3.2 Teorema PI o teorema de Buckingham.

 3.2.1. Sistemas de dimensiones fundamentales.

 3.2.2. Procedimiento para determinar los grupos PI.

3.3 Aplicación del Teorema PI a Turbomáquinas Hidráulicas

(Bombas, Ventiladores y Turbinas hidráulicas).

3.4 Uso de los números PI

 3.4.1. Similitud.

 3.4.2. Parámetros simplificados.

3.5. Curvas de funcionamiento para bombas.

3.6. Punto de funcionamiento de un sistema de bombeo.

3.7. Diámetro óptimo o económico de la tubería.

3.8. Curvas de funcionamiento para ventiladores.

3.9. Punto de funcionamiento de un sistema de ventilación.

3.10. Curvas de funcionamiento para turbinas

3.11. Velocidad específica ns, Ns .

3.12. Diámetro específico ds, Ds .

3.13. Velocidad específica de succión, S .

3.14. Efecto de escala en Turbomáquinas Hidráulicas,

3.15. Problemas.

Capítulo 3 Análisis Dimensional de Turbomáquinas Hidráulicas

3.1. Introducción.

El estudio de las turbomáquinas no puede resolverse sólo mediante métodos analíticos, su desarrollo depende en gran medida de resultados experimentales. El trabajo experimental en el laboratorio consume tiempo y es caro. Un objetivo evidente es obtener la mayor información posible de unos cuantos experimentos. El análisis dimensional es una herramienta que ayuda a alcanzar este objetivo. Cuando la prueba experimental de un prototipo real de una turbomáquina de tamaño natural es imposible o prohibitivamente costosa, la prueba de modelos en el laboratorio es la única manera factible de atacar el problema. Para poder predecir el comportamiento del prototipo a partir de mediciones en el modelo, el flujo del modelo y el del prototipo deben relacionarse mediante leyes de escalamiento conocidas. Las turbomáquinas dependen de parámetros geométricos y de flujo, el Teorema Pi o Teorema de Buckingham es el procedimiento formal mediante el cual el grupo de variables que gobierna alguna situación física se reduce a un número menor de grupos adimensionales. El empleo del Teorema Pi de Buckingham permite desarrollar rápida y fácilmente los importantes parámetros adimensionales de las turbomáquinas. El comportamiento de todas las Turbomáquinas se comprende mejor mediante el uso de los grupos adimensionales.

3.2. Teorema PI o teorema de BUCKINGHAM.

Dado un problema físico en el cual la variable dependiente es una función de $n - 1$ variables independientes, se puede escribir la siguiente relación funcional:

$$q_1 = f(q_2, q_3, \dots, q_n) \quad (3.1)$$

Donde q_1 es la variable dependiente. Matemáticamente se puede expresar la ecuación (3.1) en una forma equivalente:

$$g(q_1, q_2, \dots, q_n) = 0 \quad (3.2)$$

Donde g es una función desconocida y diferente de f .

El Teorema Pi ó Teorema de Buckingham establece que dada una relación de la forma (3.2), se pueden agrupar las n variables en $n - m$ parámetros adimensionales independientes, o grupos π que en forma funcional se puede expresar como:

$$G(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-m}) = 0$$

ó

$$\pi_1 = G_1(\pi_2, \pi_3, \dots, \pi_{n-m}) \quad (3.3)$$

El número m es usualmente, pero no siempre, igual al número mínimo de dimensiones fundamentales requeridas para especificar las dimensiones de todas variables q_1, q_2, \dots, q_n .

El Teorema no predice la forma de la relación funcional G ó G_1 , las cuales deben determinarse experimentalmente.

Sistemas de dimensiones fundamentales.

MLT: Masa, Longitud, y Tiempo.

FLT: Fuerza, Longitud y Tiempo.

Las variables físicas más importantes se listan a continuación con sus dimensiones en el sistema **MLT**.

VARIABLE	DIMENSIÓN
Superficie	L^2
Volumen	L^3
Densidad	M/L^3
Velocidad	L/T
Aceleración	L/T^2
Cantidad de Movimiento lineal	ML/T
Fuerza	ML/T^2
Presión y Esfuerzo	M/LT^2
Energía y Trabajo	ML^2/T^2
Potencia	ML^2/T^3
Momento de Inercia	ML^2
Velocidad Angular	$1/T$
Aceleración Angular	$1/T^2$
Cantidad de Movimiento Angular	ML^2/T
Torque	ML^2/T^2
Módulo de Elasticidad	M/LT^2
Tensión Superficial	M/T^2
Viscosidad Absoluta	M/LT
Viscosidad Cinemática	L^2/T

Procedimiento para determinar los grupos π .

- 1) Listar todas las variables que intervienen (n).
- 2) Seleccionar un conjunto de dimensiones fundamentales (m).
- 3) Listar las dimensiones de todas las variables en términos de las dimensiones fundamentales.
- 4) Seleccionar de la lista de variables un grupo de variables a repetir igual al número de dimensiones fundamentales (m).

Generalmente se selecciona una variable cinemática, una geométrica y una propiedad del fluido. Las variables dependientes no deben aparecer en este grupo.

5) Establecer ecuaciones dimensionales, combinando las variables a repetir con una de las otras variables cada vez, para formar los grupos adimensionales.

3.3. Aplicación del Teorema PI a Turbomáquinas Hidráulicas (Bombas, Ventiladores y Turbinas hidráulicas).

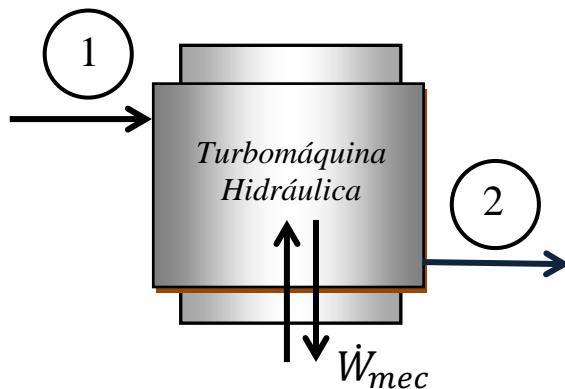


Figura 3.1 Turbomáquina hidráulica

Las turbomáquinas hidráulicas son aquellas que trabajan con fluidos que se pueden considerar como incompresibles como las bombas, que trabajan con líquidos: agua, fluidos sanitarios, etc. Las turbinas hidráulicas trabajan siempre con agua que se obtiene directamente de un río o de un embalse o represamiento de agua. Los ventiladores que trabajan con un gas, se pueden aproximar como incompresibles debido a los pequeños incrementos de presión que experimenta el gas a través de esta máquina.

1) Parámetros importantes de las turbomáquinas hidráulicas:

a) Variables relativas a la máquina.

Q = Caudal de fluido manejado por la bomba, el ventilador o la turbina hidráulica.

H = Altura o energía por unidad de peso intercambiada con el fluido, es la altura que requiere la bomba (H_B) o ventilador (H_V) para calcular la **potencia mínima** o potencia hidráulica del sistema. En el caso de una turbina hidráulica, es la altura aprovechada del fluido que se utiliza para calcular la **potencia máxima** o potencia hidráulica (H_T). Para todas las turbomáquinas hidráulicas es la altura que se obtiene al aplicar la ecuación de Bernoulli.

D = Diámetro del rodete de la máquina.

N = RPM de la máquina.

\dot{W}_{mec} = Potencia mecánica en el eje. Es la **potencia máxima** requerida en una bomba o ventilador para impulsar el fluido, para vencer las pérdidas del tipo hidráulico dentro de la máquina y para vencer las pérdidas mecánicas. En el caso de una turbina hidráulica es la **potencia mínima** que se puede aprovechar en el eje de la máquina.

η = Eficiencia total de la máquina. Es la eficiencia que se obtiene al relacionar la potencia mínima o potencia hidráulica de una bomba o ventilador entre la potencia mecánica. Para una turbina hidráulica en que la potencia mínima es la potencia mecánica, la eficiencia se obtiene de la relación potencia mecánica entre potencia hidráulica.

b) Variables relativas al fluido.

ρ = Densidad del fluido.

μ = Viscosidad absoluta del fluido.

1) Lista de variables: $f(\eta, Q, H, N, Pm, D, \rho, \mu) = 0$; $n = 8$

Variables dependientes: H, η, \dot{W}_{mec} .

Variables independientes: Q, N, D, ρ, μ

Relación funcional dimensional: $H, \eta, \dot{W}_{mec} = f(Q, N, D, \rho, \mu)$.

$$2) \quad M, L, T; \quad m = 3; \quad n - m = 8 - 3 = 5 \text{ grupos } \pi$$

$$3) \quad \begin{array}{l} Q [L^3 T^{-1}] \\ N [T^{-1}] \\ D [L] \end{array} \quad \begin{array}{l} \dot{W}_{mec} [ML^2 T^{-3}] \\ \rho [ML^{-3}] \\ \mu [ML^{-1} T^{-1}] \end{array} \quad \eta []$$

Si se usa la dimensión $[L]$ para H , se altera el significado físico de esta variable, ya que en realidad H significa energía específica o energía por unidad de peso y no longitud. Por lo tanto se usa:

$$gH [L^2 T^{-2}] = \left[\frac{ML^2}{MT^2} \right] = \left[\frac{FL}{M} \right] = \text{energía por unidad de masa.}$$

4) Variables a repetir:

Cinemática: $N [T^{-1}]$

Geométrica: $D [L]$

Propiedad del Fluido: $\rho [ML^{-3}]$

Estas tres variables contienen las tres dimensiones fundamentales.

$$5) \quad N^a D^b \rho^c Q = M^0 L^0 T^0$$

$$T^a L^b M^c L^{3c} L^3 T^{-1} = M^0 L^0 T^0$$

$$M: c = 0$$

$$L: b - 3c + 3 = 0 \Rightarrow b = -3$$

$$T: -a - 1 = 0 \Rightarrow a = -1$$

$$\pi_1 = \phi = \frac{Q}{ND^3} = \text{Coeficiente de Gasto o de Caudal} \quad (3.4)$$

$$N^a D^b \rho^c gH = M^0 L^0 T^0$$

$$T^a L^b M^c L^{3c} L^2 T^{-2} = M^0 L^0 T^0$$

$$M: c = 0$$

$$L: b - 3c + 2 = 0 \Rightarrow b = -2$$

$$T: -a - 2 = 0 \Rightarrow a = -2$$

$$\pi_2 = \psi = \frac{gH}{N^2 D^2} = \text{Coeficiente de Altura} \quad (3.5)$$

$$N^a D^b \rho^c \dot{W}_{mec} = M^0 L^0 T^0$$

$$T^a L^b M^c L^{3c} M L^2 T^{-3} = M^0 L^0 T^0$$

$$M: c + 1 = 0 \Rightarrow c = -1$$

$$L: b - 3c + 2 = 0 \Rightarrow b = -5$$

$$T: -a - 3 = 0 \Rightarrow a = -3$$

$$\pi_3 = \hat{P} = \left[\frac{\dot{W}_{mec}}{\rho N^3 D^5} \right] = \text{Coeficiente de Potencia} \quad (3.6)$$

$$N^a D^b \rho^c \mu = M^0 L^0 T^0$$

$$T^a L^b M^c L^{3c} M L^{-1} T^{-1} = M^0 L^0 T^0$$

$$M: c + 1 = 0 \Rightarrow c = -1$$

$$L: b - 3c - 1 = 0 \Rightarrow b = -2$$

$$T: -a - 1 = 0 \Rightarrow a = -1$$

$$\pi_4 = \left[\frac{\mu}{\rho D^2 N} \right]; \quad Re = \frac{1}{\pi_4} = \frac{\rho D^2 N}{\mu} = \text{Número de Reynolds del álabre} \quad (3.7)$$

$$\pi_5 = \eta \quad (3.8)$$

Relación funcional adimensional:

$$\frac{gH}{N^2 D^2}, \eta, \frac{\dot{W}_{mec}}{\rho N^3 D^5} = f \left[\frac{Q}{ND^3}, \frac{\rho D^2 N}{\mu} \right]$$

Para ventiladores se usa el aumento de presión ΔP en lugar de H .

$$\Delta P = \gamma H = \rho g H$$

$$gH = \frac{\Delta P}{\rho}$$

El coeficiente de altura para ventiladores resulta entonces en:

$$\psi = \pi_2 = \frac{\Delta P}{\rho N^2 D^2} \quad (3.9)$$

La viscosidad cinemática de los líquidos $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ es muy pequeña y a pesar de que la velocidad ND es baja, el Número de Reynolds del alabe es muy elevado. Bajo estas condiciones se ha comprobado experimentalmente que la influencia del número de Reynolds sobre el funcionamiento de la máquina es muy pequeña y se puede despreciar en una primera aproximación. La relación funcional adimensional puede escribirse:

$$\psi, \eta, \hat{P} = f(\phi)$$

La potencia hidráulica es:

$$\dot{W}_{hid} = \rho g Q H \quad (3.10)$$

Y para las bombas o ventiladores:

$$\eta = \frac{\dot{W}_{hid}}{\dot{W}_{mec}} \quad (3.11)$$

Por lo tanto,

$$\dot{W}_{mec} = \frac{\rho g Q H}{\eta} \text{ Dividiendo todo por } \rho N^3 D^5$$

$$\frac{\dot{W}_{mec}}{\rho N^3 D^5} = \frac{\rho g Q H}{\eta \rho N^3 D^5} \rightarrow \hat{P} = \frac{1}{\eta} \frac{Q}{N D^3} \frac{g H}{N^2 D^2}$$

Así se obtiene la relación funcional adimensional para bombas o ventiladores:

$$\hat{P} = \phi \psi / \eta \quad (3.12)$$

Para las turbinas hidráulicas:

$$\hat{P} = \eta \phi \psi \quad (3.13)$$

3.4. Uso de los números PI en las turbomáquinas hidráulicas

3.4.1. Similitud.- Cuando la prueba experimental de un prototipo de turbomáquina de tamaño natural no es posible, debido a que la experimentación resulta extremadamente costosa, la prueba sobre un modelo en el laboratorio sobre el cual se puedan realizar experimentos de bajo costo es la única manera de atacar el problema. Si se va a predecir el comportamiento del prototipo a partir de mediciones en el modelo, es obvio que no se puede efectuar cualquier prueba sobre cualquier modelo. Las condiciones de operación de las dos máquinas de diferente tamaño (modelo y prototipo) deben ser tales que los Números π tengan el mismo valor, a pesar de los valores individuales de las variables que intervienen, entonces se obtienen condiciones físicas exactamente similares en cada una de ellas. La similitud física completa implica:

- a) Similitud Geométrica. Requiere que el modelo y el prototipo sean de la misma forma y que las relaciones de dimensiones lineales sean las mismas en todas partes mediante un factor de escala constante.
- b) Similitud cinemática. Significa que las velocidades en puntos correspondientes están en la misma dirección y que las relaciones de velocidad son las mismas; relacionadas en magnitud mediante un factor de escala constante, es decir, los triángulos de velocidades de las condiciones de flujo son similares.
- c) Similitud dinámica. Significa que las relaciones de las diferentes fuerzas son las mismas en todas partes mediante un factor de escala constante. Dos flujos deben poseer tanto similitud geométrica como cinemática para ser similares dinámicamente, en ese caso, los datos medidos en un flujo de modelo pueden relacionarse cuantitativamente con las condiciones de flujo del prototipo.

A menudo no es posible obtener la similitud completa cuando intervienen varios números π en el proceso, debido a que un cambio en la escala lineal requiere de una relación exacta de escala entre otras variables, que no siempre puede ser satisfecha. Tal problema se presenta a menudo en Turbomáquinas Hidráulicas para satisfacer el N° de Reynolds. Para alcanzar la similitud dinámica entre modelo y prototipo geométricamente similares, debemos duplicar al menos tres de los grupos adimensionales obtenidos mediante el Teorema Pi de Buckingham para turbomáquinas hidráulicas, parámetros ϕ, ψ, \hat{P} .

En un problema de similitud la relación de escala entre prototipo y modelo $\lambda = \frac{D_p}{D_m}$ (relación entre los diámetros de los rotores de prototipo y modelo) es siempre diferente de uno.

Se debe cumplir $\phi_p = \phi_m, \psi_p = \psi_m, \hat{P}_p = \hat{P}_m$

$$\frac{Q_p}{N_p D_p^3} = \frac{Q_m}{N_m D_m^3} \quad (3.14)$$

$$\frac{H_p}{N_p^2 D_p^2} = \frac{H_m}{N_m^2 D_m^2} \quad (3.15)$$

$$\frac{\dot{W}_{mecp}}{\rho_p N_p^3 D_p^5} = \frac{\dot{W}_{mecm}}{\rho_m N_m^3 D_m^5} \quad (3.16)$$

Se usa el subíndice ‘*p*’ para representar los datos o incógnitas del prototipo y el subíndice ‘*m*’ para el modelo. Si el modelo y el prototipo trabajan con el mismo fluido, se puede simplificar la influencia de la densidad en la igualación de los coeficientes de potencia.

Ejemplo 3.1

La tabla brinda los datos para el prototipo y para una bomba modelo geométricamente similar. Para las condiciones correspondientes a la similitud dinámica entre las bombas modelo y prototipo, calcule los valores que faltan en la tabla 3.1.

Tabla 3.1 Datos con similitud modelo-prototipo

Variable	Prototipo	Modelo
ΔP (aumento de presión)	?	74.9 KPa
Q	1.25 m^3/min	?
ρ	800 Kg/m^3	999 Kg/m^3
ω	10 rad/s	100 rad/s
D	60 mm	120 mm

a) ΔP_p del prototipo

$$\psi_p = \psi_m$$

$$\frac{\Delta P_p}{\rho_p N_p^2 D_p^2} = \frac{\Delta P_m}{\rho_m N_m^2 D_m^2}$$

$$\Delta P_p = \Delta P_m \frac{\rho_p}{\rho_m} \left(\frac{N_p}{N_m} \right)^2 \left(\frac{D_p}{D_m} \right)^2$$

Sustituyendo:

$$\Delta P_p = 74.9 \text{ KPa} \frac{800}{999} \left(\frac{10}{100} \right)^2 \left(\frac{60}{120} \right)^2$$

$$\Delta P_p = 0.15 \text{ KPa}$$

b) Q_m caudal del modelo

$$\phi_p = \phi_m$$

$$\frac{Q_p}{N_p D_p^3} = \frac{Q_m}{N_m D_m^3}$$

$$Q_m = Q_p \frac{N_m}{N_p} \left(\frac{D_m}{D_p} \right)^3$$

Sustituyendo:

$$Q_m = 1.25 \frac{100}{10} \left(\frac{120}{60} \right)^3$$

$$Q_m = 100 \frac{m^3}{min}$$

3.4.2. Parámetros simplificados. Si los efectos de viscosidad; es decir, del número de Reynolds son secundarios como generalmente es el caso, se puede obtener información muy importante para una misma máquina trabajando con el mismo fluido, aplicando solamente los coeficientes de caudal, altura y potencia.

Para una misma máquina que trabaja con un fluido específico, el diámetro D es constante, entonces $\lambda = \frac{D_p}{D_m} = 1$, también la densidad ρ es constante, así los grupos adimensionales se simplifican. Con estas restricciones existe entonces una relación simple entre las rpm de la máquina y las demás variables, recordando que éstas se aplican solo en condiciones de similitud.

Se usa el subíndice ‘1’ para representar los parámetros que son datos o incógnitas de la máquina en una condición de operación específica (o simplemente parámetros de funcionamiento 1), y se usa el subíndice ‘2’ para representar los parámetros que son datos o incógnitas de la misma máquina después de haber variado algún parámetro de las condiciones de funcionamiento 1, obteniéndose así, nuevos parámetros de funcionamiento de la máquina (o simplemente parámetros de funcionamiento 2).

Se debe cumplir $\phi_1 = \phi_2$, $\psi_1 = \psi_2$, $\hat{P}_1 = \hat{P}_2$

$$\frac{Q_1}{N_1} = \frac{Q_2}{N_2} \quad (3.17)$$

$$\frac{H_1}{N_1^2} = \frac{H_2}{N_2^2} \quad (3.18)$$

$$\frac{\dot{W}_{mec1}}{N_1^3} = \frac{\dot{W}_{mec2}}{N_2^3} \quad (3.19)$$

Estas relaciones simplificadas son muy importantes para extender la información obtenida experimentalmente de una turbomáquina. El diagrama elemental de una bomba, con un diámetro de rotor D , se obtiene experimentalmente para un régimen de revoluciones fijo y consiste en tres curvas: altura de bombeo, eficiencia global y potencia mecánica versus caudal tal como se muestra en la figura 3.2.

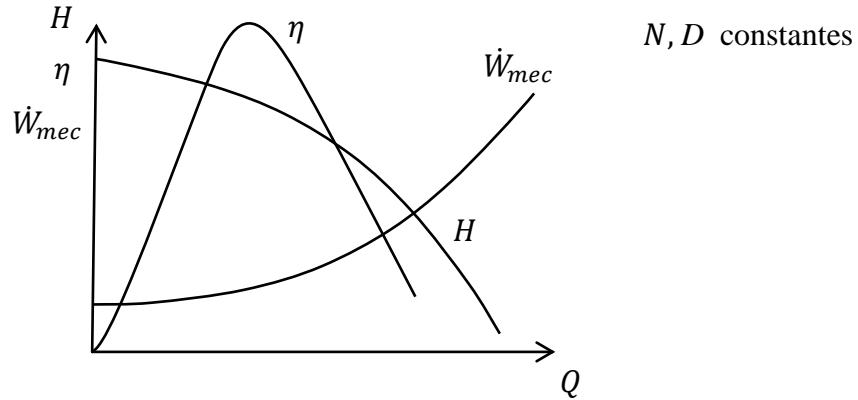


Figura 3.2. Diagrama elemental de una bomba

La curva para la altura de bombeo en la Fig. 3.2 puede representar la curva característica $H - Q$ obtenida a revoluciones fijas $N = N_1$. Se pueden evaluar los parámetros simplificados en algún punto de esta curva Q_1, H_1 , para obtener un punto de operación similar Q_2, H_2 , pero sobre otra curva a régimen de revoluciones N_2 , diferente de N_1 , para esto se debe cumplir:

$$Q_2 = Q_1 \frac{N_2}{N_1} \quad (3.20)$$

$$H_2 = H_1 \left(\frac{N_2}{N_1} \right)^2 \quad (3.21)$$

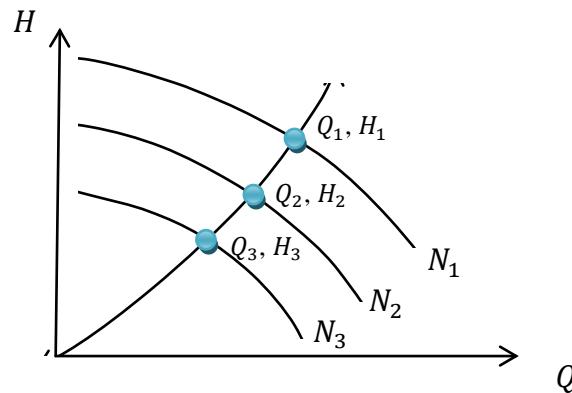


Figura 3.3. Predicción de características a diferentes rpm

Usando varios puntos sobre la característica de N_1 se puede predecir la curva de funcionamiento para N_2 así como las curvas de funcionamiento para diferentes rpm. El lugar geométrico de los puntos similares en el plano $H - Q$ es una parábola, ya que H es función de Q^2 . Sustituyendo la ecuación (3.20) en la ecuación (3.21) se tiene:

$$H_2 = H_1 \left(\frac{Q_2}{Q_1} \right)^2 \quad (3.22)$$

La Fig. 3.3 muestra una de estas parábolas. El punto similar Q_3, H_3 se puede localizar sobre la característica correspondiente a N_3 .

De igual forma se puede trabajar con la curva de potencia $P - Q$, en cuyo caso P es función de Q^3 para el lugar geométrico de los puntos similares.

$$\dot{W}_{mec\ 2} = \dot{W}_{mec\ 1} \left(\frac{N_2}{N_1} \right)^3 \quad (3.23)$$

$$\dot{W}_{mec_2} = \dot{W}_{mec_1} \left(\frac{Q_2}{Q_1} \right)^3 \quad (3.24)$$

La utilidad de los grupos adimensionales para predecir características a diferentes rpm es importantísima; sin embargo, debe recordarse que el N° de Reynolds no se satisface y que por lo tanto las predicciones no son exactas, pero si muy aproximadas y de gran utilidad para ingeniería.

Ejemplo 3.2

Una bomba maneja un caudal de $0.25 \text{ m}^3/\text{s}$ cuando gira a 1750 RPM con una altura de 40 m . Si se necesita que la bomba de un caudal de $0.5 \text{ m}^3/\text{s}$, ¿a qué rpm se debe hacer girar la bomba y qué altura manejaría en estas condiciones?

Datos:

Tabla 3.2. Datos parámetros simplificados

Parámetros de funcionamiento (1)	Parámetros de funcionamiento (2)
$Q_1 = 0.25 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$	$Q_2 = 0.5 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$
$N_1 = 1750 \text{ RPM}$	$N_2 = ?$
$H_{B1} = 40 \text{ m}$	$H_{B2} = ?$

a) N_2 Régimen de revoluciones en (2)

$$\phi_1 = \phi_2$$

$$\frac{Q_1}{N_1} = \frac{Q_2}{N_2}$$

$$N_2 = N_1 \frac{Q_2}{Q_1}$$

Sustituyendo:

$$N_2 = 1750 \text{ rpm} \frac{0.5}{0.25}$$

$$N_2 = 3500 \text{ rpm}$$

b) H_{B2} Altura de bombeo en (2)

$$\psi_1 = \psi_2$$

$$\frac{H_1}{N_1^2} = \frac{H_2}{N_2^2}$$

$$H_{B2} = H_{B1} \left(\frac{N_2}{N_1} \right)^2$$

$$H_{B2} = 40 \text{ m} \left(\frac{3500}{1750} \right)^2$$

$$H_{B2} = 160 \text{ m}$$

Ejemplo 3.3.

Se va a diseñar una bomba centrífuga para un caudal de agua de $5.7 \text{ m}^3/\text{s}$, contra una altura de 155 m , rotando a 450 RPM . Para comprobar el diseño, se construye un modelo para unas condiciones de operación de 200 l/s y una potencia de 300 KW , trabajando con agua a densidad estándar. Si la eficiencia del modelo se asume que será de 89%, cual será:

- a) La velocidad de rotación del modelo
- b) La razón de escala

- c) La potencia consumida por el prototipo

Cuando el modelo se opera contra la altura del prototipo, cual será:

- d) La velocidad de rotación
- e) El caudal
- f) La potencia requerida

Datos:

Tabla 3.3 Datos con similitud

Variable	Prototipo	Modelo
H_B	155 m	
Q	5.7 m^3/s	200 l/s
N	450 RPM	?
D		
η_B		89%
$\lambda = ?$		
\dot{W}_{mec}	?	300 KW
Cuando el modelo se opera contra la altura del prototipo		
H_B	155 m	155 m
N	450 RPM	?
Q	5.7 m^3/s	?
\dot{W}_{mec}		?

Combinando el coeficiente de caudal y de altura, se puede eliminar la relación de diámetros:

$$\frac{Q_P}{N_P D_P^3} = \frac{Q_m}{N_m D_m^3} \Rightarrow \frac{D_P}{D_m} = \left[\frac{Q_P}{Q_m} \frac{N_m}{N_P} \right]^{1/3}$$

$$\frac{g H_P}{N_P^2 D_P^2} = \frac{g H_m}{N_m^2 D_m^2} \Rightarrow \frac{D_P}{D_m} = \left[\frac{H_P}{H_m} \left(\frac{N_m}{N_P} \right)^2 \right]^{1/2}$$

por lo tanto:

$$N_m = N_p \frac{(Q_P/Q_m)^{1/2}}{(H_P/H_m)^{3/4}}$$

La altura del modelo se puede calcular a partir de la eficiencia:

$$\eta_B = \frac{\dot{W}_{hid}}{\dot{W}_{mec}}$$

$$\dot{W}_{hid} = \eta_B \dot{W}_{mec}$$

$$\dot{W}_{hid} = 0.89 \times 300 \text{ KW}$$

$$\dot{W}_{hid} = 267 \text{ KW}$$

$$\dot{W}_{hid} = \gamma Q_m H_m$$

$$H_m = \frac{\dot{W}_{hid}}{\gamma Q_m}$$

$$H_m = \frac{267 \times 10^3 \frac{Nm}{s}}{998 \times 9.81 \frac{N}{m^3} 0.2 \frac{m^3}{s}}$$

$$H_m = 136.36 \text{ m}$$

- a) N_m Régimen de revoluciones del modelo

$$N_m = 450 \text{ RPM} \frac{\left(\frac{5.7}{0.2} \right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{155}{136.36} \right)^{\frac{3}{4}}}$$

$$N_m = 2182.23 \text{ RPM}$$

- b) λ Razón de escala

$$\frac{D_P}{D_m} = \left[\frac{5.7}{0.2} \times \frac{2182.23}{450} \right]^{1/3}$$

$$\lambda = 5.17$$

- c) \dot{W}_{mec_p} Potencia mecánica consumida por el prototipo

$$\hat{P}_p = \hat{P}_m$$

$$\left[\frac{\dot{W}_{mec_p}}{\rho_p N_p^3 D_p^5} \right] = \left[\frac{\dot{W}_{mec_m}}{\rho_m N_m^3 D_m^5} \right]$$

$$\dot{W}_{mec_p} = \dot{W}_{mec_m} \left(\frac{N_p}{N_m} \right)^3 \left(\frac{D_p}{D_m} \right)^5$$

$$\dot{W}_{mec_p} = 300 \text{KW} \left(\frac{450}{2182.23} \right)^3 5.17^5$$

$$\dot{W}_{mec_p} = 9716.5 \text{ KW}$$

Cuando el modelo se opera contra la altura del prototipo se tiene:

d) Régimen de revoluciones del modelo

$$\frac{g H_p}{N_p^2 D_p^2} = \frac{g H_m}{N_m^2 D_m^2}$$

$$N_m = N_p \frac{D_p}{D_m} = 450 \times 5.17 = 2325 \text{ RPM}$$

e) Caudal del modelo

$$\frac{Q_m}{N_m D_m^3} = \frac{Q_p}{N_p D_p^3}$$

$$Q_m = Q_p \frac{N_m}{N_p} \frac{1}{(D_p/D_m)^3}$$

$$Q_m = 5.7 \frac{2325}{450} \frac{1}{(5.17)^3} = 0.213 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

$$Q_m = 213 \frac{\text{l}}{\text{s}}$$

f) Aunque se puede seguir resolviendo el problema para calcular la potencia mecánica del modelo, haciendo similitud con el prototipo, también, se puede calcular la potencia requerida para el modelo, usando los grupos Pi simplificados aplicados al modelo:

Tabla 3.4 Parámetros simplificados del modelo

	Modelo	
	Parámetros de funcionamiento (1)	Parámetros de funcionamiento (2)
\dot{W}_{mec}	300 KW	?
N	2182.23 RPM	2325 RPM

$$\left[\frac{\dot{W}_{mec_1}}{N_1^3} \right] = \left[\frac{\dot{W}_{mec_2}}{N_2^3} \right]$$

$$\dot{W}_{mec_2} = \dot{W}_{mec_1} \left(\frac{N_2}{N_1} \right)^3$$

$$\dot{W}_{mec_2} = 300 \left(\frac{2325}{2182.23} \right)^3$$

$$\dot{W}_{mec_2} = 362.82 \text{ KW}$$

Ejemplo 3.4

Se obtiene experimentalmente la curva de funcionamiento de una bomba girando a 1170 RPM, la curva que se obtiene es una función cuadrática según la ecuación: $H = 490 - 7 \times 10^{-8} Q^2$ con H en pies y Q en galones por minuto. Obtener tres puntos de la curva H .vs. Q de la bomba cuando se hace girar a 1750 RPM.

Los parámetros de funcionamiento H y Q para 1170 RPM se obtienen tomando tres valores de caudal ($Q = 10000 \text{ gpm}$, $Q = 10000 \text{ gpm}$ y $Q = 30000 \text{ gpm}$) y evaluando en la ecuación de la curva de la bomba.

Tabla 3.5 Datos con parámetros simplificados

Parámetros de funcionamiento (1)		Parámetros de funcionamiento (2)	
$N_1 = 1170 \text{ RPM}$		$N_2 = 1750 \text{ RPM}$	
Q	H	Q	H
10000	483	?	?
20000	462	?	?
30000	427	?	?

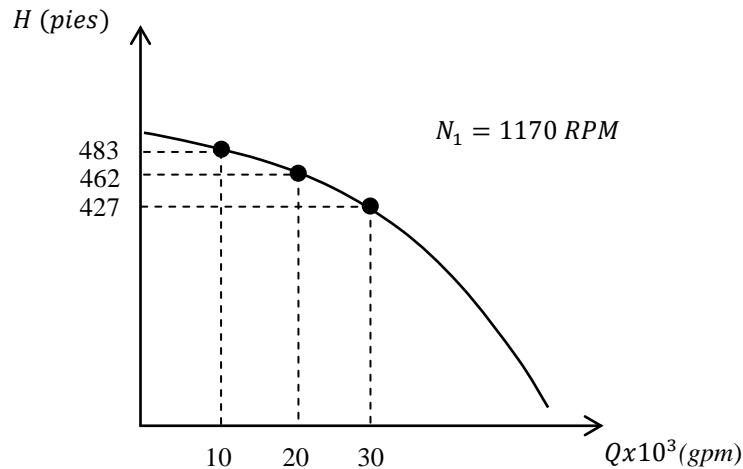


Figura 3.4 Curva de funcionamiento para 1170 RPM

Se usan los parámetros simplificados, ya que se tiene una bomba cuya curva se ha obtenido experimentalmente para $N_1 = 1170 \text{ rpm}$ y se quiere conocer tres puntos de la curva de funcionamiento de la misma bomba girando a $N_2 = 1750 \text{ rpm}$. Los caudales se obtienen igualando los coeficientes de gasto:

$$\frac{Q_1}{N_1} = \frac{Q_2}{N_2}$$

$$Q_2 = Q_1 \frac{N_2}{N_1}$$

Con $Q_1 = 10000 \text{ gpm}$

$$Q_2 = 10000 \text{ gpm} \left(\frac{1750}{1170} \right)$$

$$Q_2 = 14957.26 \text{ gpm}$$

Con $Q_1 = 20000 \text{ gpm}$

$$Q_2 = 29914.53 \text{ gpm}$$

Con $Q_1 = 30000 \text{ gpm}$

$$Q_2 = 44871.79 \text{ gpm}$$

Las alturas de bombeo se calculan igualando los coeficientes de altura:

$$\frac{H_1}{N_1^2} = \frac{H_2}{N_2^2}$$

$$H_2 = H_1 \left(\frac{N_2}{N_1} \right)^2$$

Con $H_1 = 483 \text{ pies}$

$$H_2 = 483 \text{ pies} \left(\frac{1750}{1170} \right)^2$$

$$H_2 = 1080.56 \text{ pies}$$

Con $H_1 = 462 \text{ pies}$

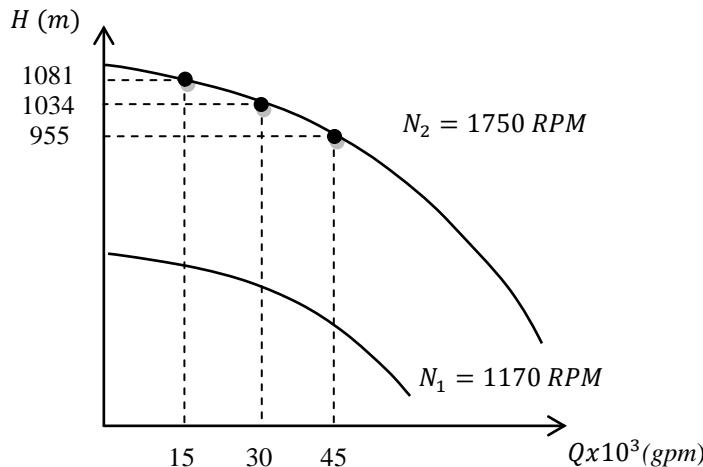
$$H_2 = 1033.59 \text{ pies}$$

Con $H_1 = 427 \text{ pies}$

$$H_2 = 955.28 \text{ pies}$$

Tabla 3.6 Datos y resultados usando parámetros simplificados

Parámetros de funcionamiento (1)		Parámetros de funcionamiento (2)	
$N_1 = 1170 \text{ RPM}$		$N_2 = 1750 \text{ RPM}$	
$Q \text{ (gpm)}$	$H \text{ (pies)}$	$Q \text{ (gpm)}$	$H \text{ (pies)}$
10000	483	14957.26	1080.56
20000	462	29914.53	1033.59
30000	427	44871.79	955.28

Figura 3.5 Curva de funcionamiento resultante para $N_2=1750 \text{ rpm}$ comparada con la curva a $N_1=1170 \text{ RPM}$.**Ejemplo 3.5**

Se requiere una turbina hidráulica para trabajar a 30000 Hp bajo una altura de 125 pies , 80 RPM y con una eficiencia estimada igual a 88% . Un modelo de esta turbina se quiere experimentar en un laboratorio que permite potencias de 50 Hp y alturas de 20 pies . ¿Cuál será la velocidad de rotación del modelo, la razón de escala y el caudal?

Datos:

Tabla 3.7. Datos con similitud

Variable	Prototipo	Modelo
\dot{W}_{mec}	30000 Hp	50 Hp
H_T	125 pies	20 pies
N	80 RPM	?
λ		?
Q		?
η_T	88%	

Combinando el coeficiente de caudal y de potencia, se puede eliminar la relación de diámetros:

$$\frac{\frac{g H_P}{N_p^2 D_p^2}}{\frac{\dot{W}_{mecp}}{N_p^3 D_p^5}} = \frac{\frac{g H_m}{N_m^2 D_m^2}}{\frac{\dot{W}_{mecm}}{N_m^3 D_m^5}} \Rightarrow \frac{D_p}{D_m} = \left(\frac{H_P}{H_m}\right)^{1/2} \left(\frac{N_m}{N_p}\right)$$

$$\frac{\dot{W}_{mecp}}{N_p^3 D_p^5} = \frac{\dot{W}_{mecm}}{N_m^3 D_m^5} \Rightarrow \frac{D_p}{D_m} = \left(\frac{\dot{W}_{mecp}}{\dot{W}_{mecm}}\right)^{1/5} \left(\frac{N_m}{N_p}\right)^{3/5}$$

- a) Velocidad de rotación del modelo

Combinando las ecuaciones anteriores para eliminar la relación de diámetros se tiene:

$$N_m = N_p \left(\frac{H_m}{H_p}\right)^{5/4} \left(\frac{\dot{W}_{mecp}}{\dot{W}_{mecm}}\right)^{1/2}$$

$$N_m = 80 \left(\frac{20}{125}\right)^{5/4} \left(\frac{30000}{50}\right)^{1/2}$$

$$N_m = 198 \text{ RPM}$$

- b) Razón de escala

$$\frac{D_p}{D_m} = \left(\frac{125}{20} \right)^{1/2} \left(\frac{198}{80} \right)$$

$$\frac{D_p}{D_m} = 6.19$$

- c) Caudal del modelo

Se calcula primero el caudal del prototipo

$$\dot{W}_{hid,p} = \frac{\dot{W}_{mec,p}}{\eta_{Tp}}$$

$$\dot{W}_{hid,p} = \frac{30000 H p^{746 W}}{0.88} = 25431818.18 W$$

$$Q_p = \frac{\dot{W}_{hid}}{\gamma H_{Tp}}$$

$$Q_p = \frac{25431818.18 W}{998 \frac{kg}{m^3} \times 9.81 \frac{m}{s^2} \times 125 \text{pies} \frac{0.3048 m}{1 pie}} = 68.18 \frac{m^3}{s}$$

$$Q_p = 68.18 \frac{m^3}{s} = 2407.73 \frac{\text{pies}^3}{s}$$

$$\frac{Q_m}{N_m D_m^3} = \frac{Q_p}{N_p D_p^3}$$

$$Q_m = Q_p \frac{N_m}{N_p} \frac{1}{\lambda^3}$$

$$Q_m = 68.18 \frac{m^3}{s} \left(\frac{198}{80} \right) \frac{1}{6.19^3}$$

$$Q_m = 0.71 \frac{m^3}{s} = 25.13 \frac{\text{pies}^3}{s}$$

Ejemplo 3.6

Se va a diseñar una turbina hidráulica para producir 27 MW a 94 RPM. La eficiencia hidráulica del sistema de transporte de agua a la turbina es 75%. La turbina aprovecha una diferencia de altura geodésica de 22 m. Para chequear el diseño se construye un modelo que produce 37.5 KW bajo una altura de 4.9 m. Calcular:

- a) Las RPM del modelo

- b) La razón de escala

Con una eficiencia del modelo de 88%, calcular:

- c) El gasto a través del modelo

- d) El gasto a través del prototipo

Tabla 3.8. Datos con similitud

Variable	Prototipo	Modelo
\dot{W}_{mec}	27 MW	37.5 KW
H_T		4.9 m
N	94 RPM	?
λ		?
η_T		88%
Q	?	?

Combinando el coeficiente de potencia y de altura, se puede eliminar la relación de diámetros.

$$\left[\frac{P_{m_p}}{\rho_p N_p^3 D_p^5} \right] = \left[\frac{P_{m_m}}{\rho_m N_m^3 D_m^5} \right] \Rightarrow \frac{D_p}{D_m} = \left(\frac{P_{m_p} \rho_m N_m^3}{P_{m_m} \rho_p N_p^3} \right)^{1/5}$$

$$\frac{g H_p}{N_p^2 D_p^2} = \frac{g H_m}{N_m^2 D_m^2} \Rightarrow \frac{D_p}{D_m} = \left[\frac{H_p}{H_m} \left(\frac{N_m}{N_p} \right)^2 \right]^{1/2}$$

Por lo tanto:

$$N_m = N_p \left(\frac{H_p}{H_m} \right)^{5/4} \left(\frac{P_{m_p}}{P_{m_m}} \right)^{1/2}$$

La altura del prototipo la podemos calcular usando la eficiencia hidráulica del sistema de transporte de agua a la turbina

$$\eta_{SH} = \frac{H_p}{\Delta z}$$

$$H_p = 0.75 \times 22$$

$$H_p = 16.5 \text{ m}$$

a) Régimen de revoluciones

$$N_m = 94 \frac{\left(\frac{27000}{37.5}\right)^{1/2}}{\left(\frac{16.5}{4.9}\right)^{5/4}} \Rightarrow N_m = 553.0 \text{ RPM}$$

b) Razón de escala

$$\frac{D_P}{D_m} = \left[\frac{16.5}{4.9} \left(\frac{553.0}{93.7} \right)^2 \right]^{1/2} \Rightarrow \frac{D_P}{D_m} = 10.83$$

$$\eta_m = \frac{P_{mec}}{P_{hid}} \Rightarrow \gamma Q_m H_m = \frac{P_{mec} m}{\eta_m}$$

c) Gasto del modelo

$$Q_m = \frac{P_{mec} m}{\eta_m \gamma H_m} = \frac{37.5 \times 1000 W}{0.88 \times 1000 \frac{kgf}{m^3} \times 9.81 \frac{New}{kgf} \times 9.81 \frac{m}{m^3} \times 4.9 m} = 0.8865 \frac{m^3}{s} = 886.5 \text{ l/s}$$

e) Gasto del prototipo

$$\frac{Q_P}{N_P D_P^3} = \frac{Q_m}{N_m D_m^3}$$

$$Q_P = Q_m \frac{N_P}{N_m} (D_P/D_m)^3$$

$$Q_P = 886.5 \frac{94}{553} (10.83)^3 = 191410.97 \text{ l/s}$$

3.5 Curvas de funcionamiento para bombas.

Las curvas de funcionamiento para bombas se obtienen experimentalmente en un banco de pruebas como el que se muestra esquemáticamente en la Fig. 3.6. Los fabricantes publican dos tipos de curvas para presentar al usuario el rango de funcionamiento de sus productos: curvas elementales dimensionales (Fig. 3.7) y curvas completas dimensionales o diagramas de concha (Fig. 3.8).

Accesorios de control de flujo:

V_{Ch} = Válvula Check.

VC = Válvula de compuerta

Instrumentación:

M_s = Manómetro de succión.

M_d = Manómetro de descarga.

PO = Placa orificio.

V = Vertedero.

T = Torquímetro.

RPM = Tacómetro.

Equipo:

Motor de comente directa,

Bomba.

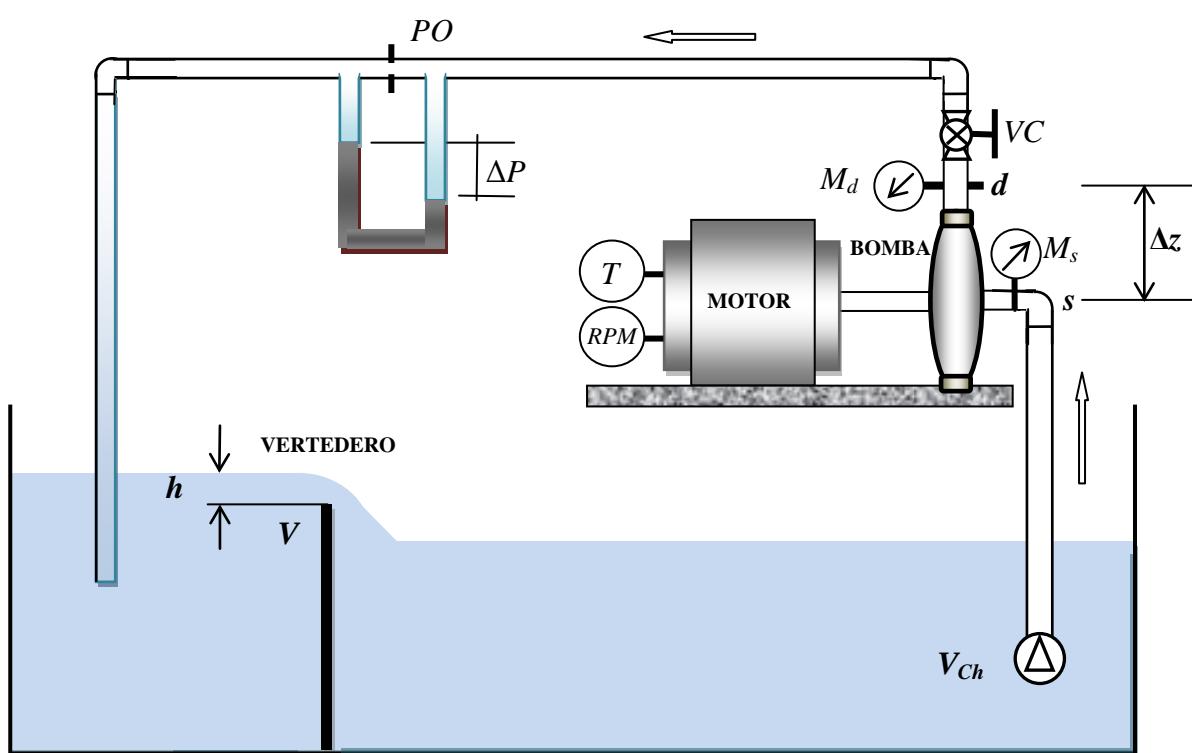


Figura 3.6. Esquema de un banco de prueba para bombas.

Ecuaciones de Cálculo:

$$H_B = \frac{P_d - P_s}{\gamma} + \frac{V_d^2 - V_s^2}{2g} + (z_d - z_s) \quad (3.25)$$

$$Q = f(\Delta P \text{ en PO ó } h \text{ en el Vertedero})$$

$$\dot{W}_{mec} = \frac{T \pi N}{30} \quad (3.26)$$

$$\eta = \frac{\dot{W}_{hid}}{\dot{W}_{mec}} = \frac{\gamma Q H}{\dot{W}_{mec}} \quad (3.27)$$

Para la velocidad de rotación del ensayo fija, medida en el tacómetro y empezando con la válvula de control de gasto en posición completamente abierta (válvula *VC*), se toman lecturas estabilizadas de las presiones de succión y descarga de la bomba, la presión diferencial en la placa de orificio, la altura del vertedero, el torque del torquímetro y la temperatura del agua del sistema. Se repite el procedimiento según el número de posiciones o aperturas de la válvula, reduciendo progresivamente el caudal hasta finalizar con la válvula completamente cerrada. Con los datos tomados se llena la tabla 3.9 tal como se muestra a continuación:

Tabla 3.9 Tabla de datos experimentales de una bomba

Posición de la Válvula	Potencia Mecánica		Presiones		Caudal		Caudal	
	T(Nm)	\dot{W}_{mec}	P_s	P_d	Lectura	m^3/s	h (vertedero)	m^3/s
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								
8								

Con los datos registrados en la tabla 3.9 y usando las ecuaciones de cálculo se calcula H_B , Q , \dot{W}_{mec} y η para cada posición de la valvula y posteriormente se construyen las curvas elementales de la bomba que se muestran en la figura 3.7.

a) Curvas elementales dimensionales.

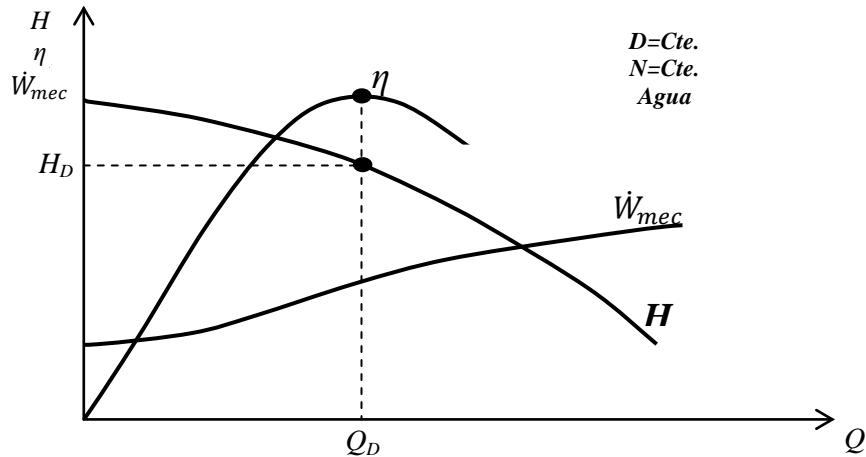


Figura 3.7. Curvas elementales dimensionales para bombas

En la figura 3.7 se puede observar que la altura es un máximo a válvula cerrada, y disminuye continuamente a medida que aumenta el caudal. La potencia de entrada es mínima a válvula cerrada y aumenta conforme se incrementa el caudal. En consecuencia, para minimizar la carga inicial, es aconsejable arrancar la bomba con la válvula de salida cerrada durante un corto tiempo para evitar que la bomba se sobrecaliente. La eficiencia de la bomba aumenta con el caudal hasta que alcanza el punto de máxima eficiencia y después disminuye conforme aumenta la relación de flujo.

b) Curvas completas dimensionales o diagramas de concha

Para representar la información de manera compacta, es deseable incluir datos de prueba mediante una serie de ensayos elementales con varios diámetros de impulsor en una sola gráfica. La figura 3.8 muestra las curvas características de una bomba llamados diagramas de concha. Estas curvas corresponden a una carcasa básica con cuatro diámetros diferentes del rotor, es decir se varía la capacidad de la bomba cambiando el tamaño del impulsor en una voluta dada. Para cada diámetro, se grafica la carga contra el caudal, cada curva se etiqueta con el diámetro correspondiente. Los perfiles de eficiencia se grafican uniendo los puntos que tienen la misma eficiencia constante. Algunos diagramas de concha incluyen curvas de carga de succión positiva ($NPSH$, por sus siglas en inglés) para los diámetros extremos. Estas curvas son estrictamente aplicables a un fluido de una cierta densidad y viscosidad, normalmente agua. Si la bomba se usa para bombejar, por ejemplo mercurio, la potencia al freno debería ser unas trece veces mayor, mientras que Q , H y η apenas cambiarían (H se interpretaría en altura equivalente de mercurio). Si la bomba se usa con aceite SAE 30, todos los valores (\dot{W}_{mec} , Q , H y η) cambiarían como consecuencia del gran cambio en la viscosidad según el número de Reynolds.

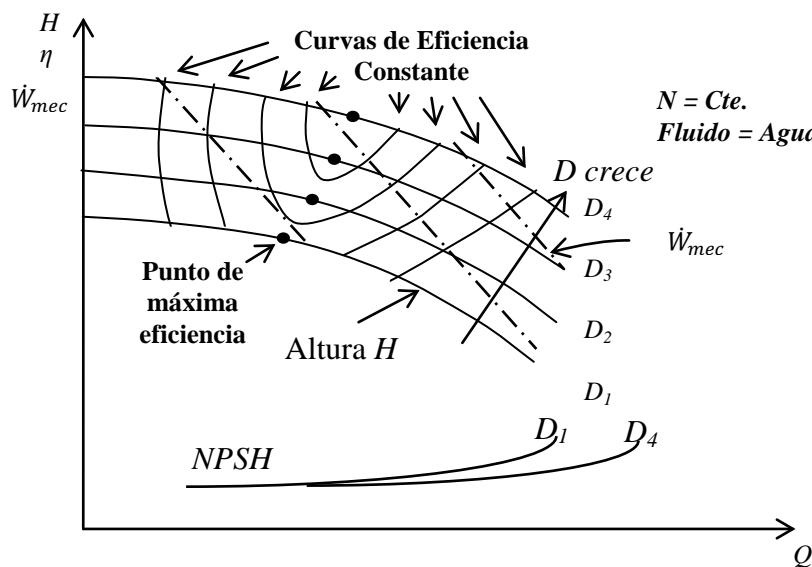


Figura 3.8. Curvas completas dimensionales para bombas

En ambos tipos de curva se puede apreciar que existe un punto de máxima eficiencia con un valor de caudal Q_D y altura H_D . Estos valores son los valores de diseño de la bomba y el punto (Q_D, H_D) correspondiente se denomina también punto de diseño. Si $Q < Q_D$ la eficiencia disminuye; así como también para $Q > Q_D$.

3.6 Punto de funcionamiento de un sistema de bombeo.

El sistema de bombeo comprende la tubería y accesorios a través de los cuales el líquido fluye hacia y desde la bomba; en otras palabras, se considera parte del sistema de bombeo solamente la longitud de tubería y accesorios que contienen líquido controlado por la acción de bombeo. La Fig. 3.9 muestra un esquema del sistema de bombeo más simple y fundamental compuesto por los depósitos de succión y descarga, presurizados o abiertos a la atmósfera, las tuberías y los accesorios. El sistema ofrece resistencia al flujo por fricción hidráulica. Si el líquido descarga a una elevación más alta que la toma y si la presión en la descarga es mayor que en la toma, el sistema ejerce una resistencia adicional que requiere energía o altura de bombeo. Por lo tanto, la bomba debe vencer la resistencia total del sistema al caudal deseado compuesta por altura geodésica de elevación, altura de presión y altura de fricción.

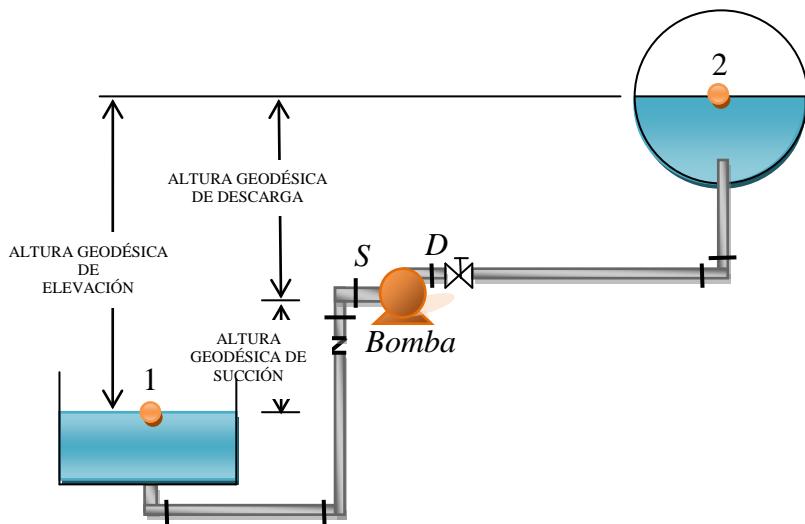


Figura 3.9. Esquema de un sistema de bombeo simple

La altura de bombeo o altura manométrica H_B , es la energía específica realmente comunicada al líquido por la bomba y se calcula como la diferencia entre la energía específica del líquido en la brida de descarga y la brida de succión de la bomba. Aplicando la ecuación de Bernoulli entre la brida de succión 'S' y la brida de descarga 'D' del sistema de la Fig. 3.9, se obtiene la ecuación 3.28:

$$H_B = \frac{P_D - P_S}{\gamma} + \frac{V_D^2 - V_S^2}{2g} + (z_D - z_S) \quad (3.28)$$

La ecuación de Bernoulli también puede aplicarse entre los puntos 1 y 2 para obtener H_B en cuyo caso,

$$H_B = \frac{P_2 - P_1}{\gamma} + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} + (z_2 - z_1) + h_{f\ 1-2} \quad (3.29)$$

Las velocidades V_1 y V_2 del líquido sobre la superficie de los reservorios de succión y descarga son muy pequeñas y pueden despreciarse. Por lo tanto,

$$H_B = \frac{P_2 - P_1}{\gamma} + (z_2 - z_1) + h_{f\ 1-2} \quad (3.30)$$

Donde:

$\frac{P_2 - P_1}{\gamma}$ es la altura o energía específica de presión,

$(z_2 - z_1)$ es la altura geodésica de elevación o energía específica potencial y

$h_{f\ 1-2}$ es la altura de perdidas por fricción.

La altura de presión puede ser nula en el caso que ambos recipientes estén abiertos a la atmósfera o cuando $P_2 = P_1$. También puede ser negativa cuando $P_2 < P_1$; en cuyo caso, la altura de presión ayuda la acción de bombeo empujando el líquido hacia la descarga.

La altura geodésica de elevación es la suma de la altura geodésica de descarga más la altura geodésica de succión. El depósito de succión puede estar por encima del eje de la bomba; en cuyo caso, la altura geodésica de succión ayuda la acción de bombeo empujando el líquido hacia la brida de entrada de la bomba.

La altura de fricción siempre está presente en el sistema de bombeo y su magnitud puede controlarse por medio del diámetro de la tubería.

De la ecuación 3.30, se puede observar que la altura de bombeo del sistema, H_B , consta de una parte fija $\left[\frac{P_2 - P_1}{\gamma} + (z_2 - z_1)\right]$ que no depende del caudal manejado, Q , y de una parte variable h_{f1-2} que si es una función cuadrática de Q , según la ecuación de Darcy - Weisbach para el cálculo de la altura de pérdidas. El punto de funcionamiento se obtiene al interceptar la curva de altura de bombeo requerida por el sistema, con la curva de altura manométrica o de bombeo proporcionada por la bomba, tal como se ilustra en la Fig. 3.10.

El objetivo del Ingeniero consiste entonces en diseñar el sistema para que el punto de funcionamiento coincida lo mejor posible con el punto de diseño o de máxima eficiencia de la bomba que se escoga para ejecutar el trabajo.

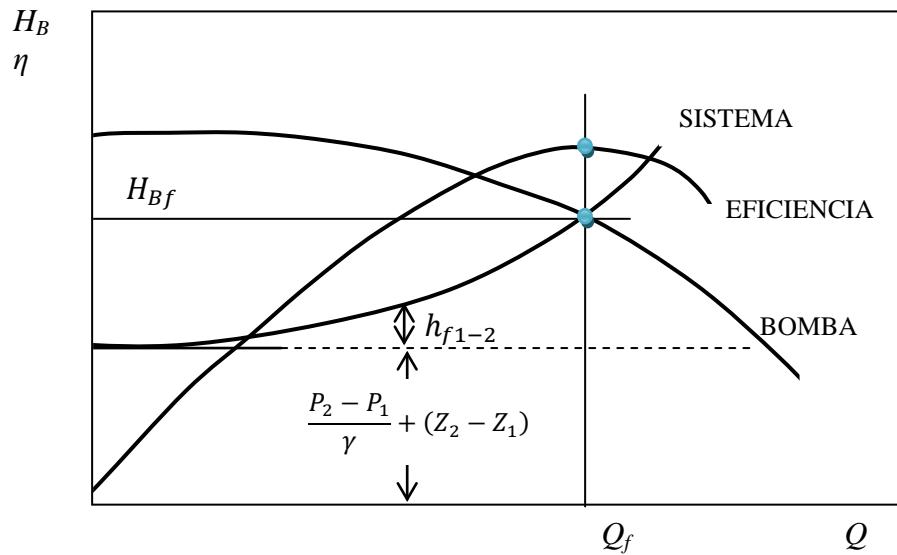


Figura 3.10. Punto de funcionamiento de un sistema de bombeo.

3.7 Diámetro óptimo o económico de la tubería.

En un sistema de bombeo, el diámetro óptimo o económico de la tubería es aquel para el cual la suma de los costos de instalación, mantenimiento y operación es mínima. El costo de la tubería se puede aproximar con C_1DL , donde C_1 es un coeficiente de costo por unidad de diámetro y longitud. El costo del conjunto motor-bomba se puede aproximar con C_2P , donde C_2 es un coeficiente de costo por unidad de potencia (KW) instalada. Tanto C_1 como C_2 incluyen los costos de instalación, operación y mantenimiento. El costo total del sistema es:

$$C = C_1DL + C_2P \quad (3.31)$$

Sustituyendo a P en función de las variables del sistema se tiene:

$$C = C_1DL + C_2 \frac{\gamma g Q \left(h + \frac{8fQ^2}{g\pi^2 D^5} L \right)}{1000 \eta} \quad (3.32)$$

donde se han despreciado las pérdidas en accesorios. Derivando el costo total con respecto al diámetro se obtiene:

$$\frac{dC}{dD} = C_1 L + C_2 \frac{\gamma g Q 16 f Q^2 L}{2g\pi^2 1000 \eta} \left(-\frac{5}{D^6} \right)$$

Haciendo $\frac{dC}{dD} = 0$ resulta:

$$D = K \sqrt{Q} \quad (3.33)$$

donde:

$$K = \frac{C_2 \gamma 40 f}{C_1 \pi^2 1000 \eta} \quad (3.34)$$

La ecuación 3.33 se conoce como la fórmula de Bresse y es aplicable cuando la operación de bombeo es continua. K es una constante basada en experiencia y tiene un valor aproximado a $1.2 (S/m)^{1/2}$ y el caudal Q se debe calcular en m^3/s . En realidad, el hecho de adoptar la fórmula de Bresse equivale a fijar una velocidad media económica:

$$V = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4Q}{\pi Q K^2} = \frac{4}{\pi K^2} \quad (3.35)$$

que para valores de K entre 1 y 1.5, resulta en velocidades de $1.28 m/s$ a $0.57 m/s$.

Si la operación es intermitente, se puede usar la fórmula empírica de Marquardt:

$$D = \beta^{1/4} K \sqrt{Q} \quad (3.36)$$

Donde:

- K Coeficiente de Bresse, $(s/m)^{1/2}$
- D Diámetro Económico, m
- Q Caudal o Gasto, m^3/s
- β Coeficiente de utilización
- $\beta = (\text{Número de horas diarias de servicio real}) / 24$

Un criterio más sencillo consiste en especificar la velocidad mas económica en la tubería, de acuerdo a los datos de Richter que se indican en la Tabla 3.10- La Tabla 3.11 se puede usar para velocidades recomendadas y caídas máximas de presión en líneas de acero al carbón transportando líquidos de procesos.

Tabla 3.10. Velocidad media económica en tuberías, m/s

Tuberías de succión en bombas centrifugas	
Temperatura del líquido menor que $70^\circ C$	0.5 a 1.0
Tuberías de descarga en bombas centrifugas	1.5 a 2.0
Redes de distribución para agua potable e industrial	
Tuberías principales	1.0 a 2.0
Tuberías laterales	0.5 a 0.7
Tuberías muy largas	1.5 a 3.0
Tuberías en instalaciones hidroeléctricas con turbinas	
Con inclinación y diámetro pequeño	2.0 a 4.0
Con inclinación y diámetro grande	3.6 a 8.0
Horizontales y gran longitud	1.0 a 3.0

Tabla 3.11. Velocidades recomendadas y caídas máximas de presión en líneas de acero al carbón trasportando líquidos de procesos

Tipo de servicio	Velocidad [ft/s]	ΔP_{max} [psi/100 ft]
1.- Recomendaciones generales	5 - 15	4.0
2.- Régimen laminar	4 - 5	
3.- Régimen turbulento		
Densidad del líq. [lbm/ft]		
100	5 - 8	
50	6 - 10	
20	10 - 15	
4.- succión de bombas		
Líquido en ebullición	2 - 6	0.4
Líquido sin ebullición	4 - 8	0.4
5.- Descarga de bombas		
0 - 250 GPM	6 - 8	4.0
250 - 700 GPM	8 - 10	
>700 GPM	10 - 15	2.0
6.- Salidas de condensadores	3 - 6	0.5
7.- Entradas a Chillers y Torres	4 - 6	
8.- Líneas por gravedad	3 - 8	0.4
LINEAS DE AGUA		
1.- Servicio general	2 - 16	1.5
Diámetro [in]		
1	2 - 3	
2	3 - 4.5	
4	5 - 7	
6	7 - 9	
8	8 - 10	
10	10 - 12	
12	10 - 14	
2.- succión de bombas	4 - 7	
3.- Descarga de bombas	5 - 10	
4.- Alimentación de calderas	8 - 15	
5.- Líneas de refinería	2 - 5	2.5
6.- Agua de enfriamiento	12-16	2.0

Ejemplo 3.7.

La bomba cuyas curvas de funcionamiento se muestran en la Figura 3.12, se quiere utilizar en el siguiente sistema de bombeo:

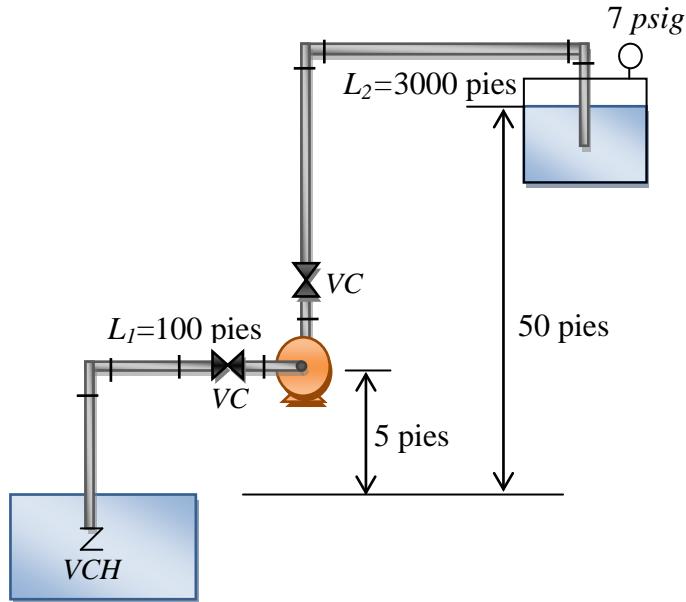


Figura 3.11 Sistema de bombeo

L_1 = longitud de la tubería de succión

L_2 = longitud de la tubería de descarga

VC = válvula de compuerta completamente abierta $K = 0.15$

VCH = Válvula de pié con obturador ascendente y filtro $K = 8$

Codos estándar de radio largo. $K = 0.5$

Salida $K = 1$

Accesorios en la succión:

1 válvula de pie con obturador ascendente y filtro

1 codo estandar de 90°

1 valvula de compuerta completamente abierta

Accesorios en la descarga

2 codos estandar de 90°

1 válvula de compuerta completamente abierta

1 salida de tubería

El sistema debe manejar 375 GPM de agua a una temperatura promedio de $15^\circ C$ en operación continua. Se desea seleccionar el diámetro del impulsor y el diámetro económico de la tubería (acero comercial nuevo céduila 40), para máxima eficiencia en el punto de funcionamiento del sistema. Despreciar las pérdidas de entrada de la tubería. Calcular además la potencia de accionamiento del motor.

Cálculo del diámetro económico en tubería de acero comercial céduila 40.

Usando la fórmula de Bresse:

$$D = 1.2 \sqrt{375 \text{ gpm} \frac{\frac{1}{4.403} \text{ m}^3/\text{h}}{\frac{1}{3600} \text{ m}^3/\text{s}}} = 1.2 \sqrt{0.02366 \text{ m}^3/\text{s}} = 0.1846 \text{ m}$$

$$D = 0.185 \text{ m} = 7.21 \text{ in. Se toma } D = 8 \text{ in}$$

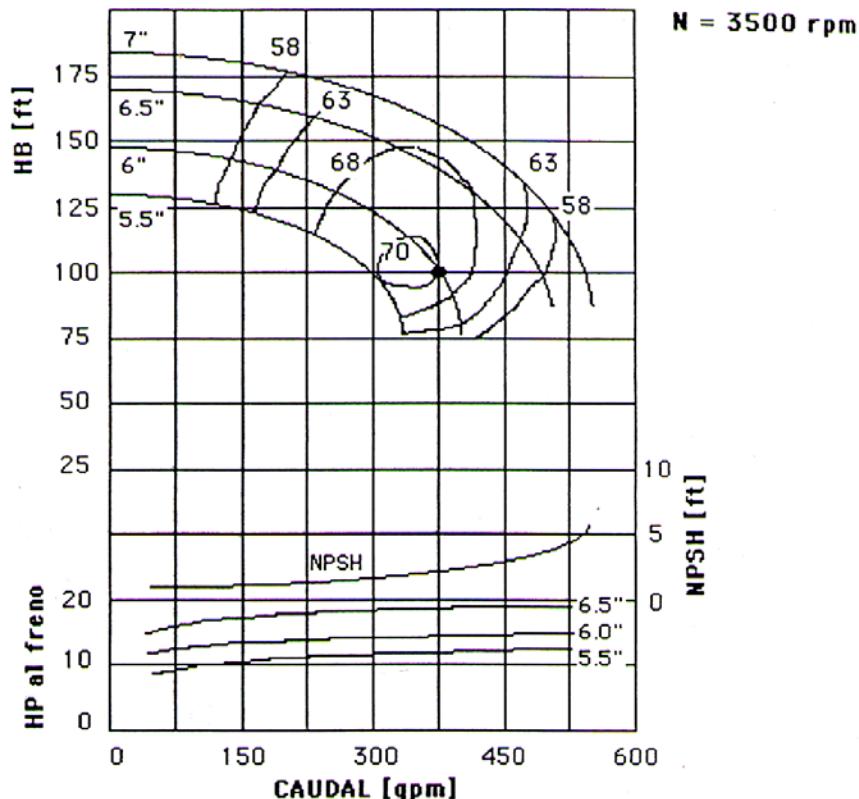


Figura 3.12. Curvas de funcionamiento de la bomba

Usando las velocidades económicas de Richter, en un sistema de bombeo, el rango de velocidades recomendado por Richter para la succión está entre 0.5 y 1 m/s, se toma el valor más grande $V_s=1$ m/s.

$$D_{succión} = \sqrt{\frac{4Q}{\pi V_s}} = \sqrt{\frac{4x0.0237}{\pi x1}} = 0.1736 \text{ m} = 6.84 \text{ in}, \quad \text{Se toma 8 in (diámetro comercial)}$$

El rango de velocidades recomendado por Richter para la descarga está entre 1.5 y 2 m/s, se toma el valor más grande $V_s=2$ m/s.

$$D_d = \sqrt{\frac{4x0.0237}{\pi x^2}} = 0.1227 \text{ m} = 4.83 \text{ in}, \quad \text{Se toma 6 in (diámetro comercial)}$$

Se toman los siguientes Diámetros Económicos (Diámetros comerciales):

$$D_s = 8 \text{ in}; \quad D_{interno} = 202.7 \text{ mm}$$

$$D_d = 6 \text{ in}; \quad D_{interno} = 154.1 \text{ mm}$$

Cálculo de la altura de bombeo H_B :

$$H_B = \frac{P_2 - P_1}{\nu} + (Z_2 - Z_1) + h_f \text{ succion} + h_f \text{ descarga}$$

$$P_{2\ man} = 7 \text{ psig} \frac{\frac{2116.8}{\text{psi}^2} \text{lbf}}{14.7 \text{ psi}} = 1008 \frac{\text{lbf}}{\text{psi}^2}$$

$$P_{1\ man} = 0 \frac{lb f}{n i e^2}$$

$$\gamma = 62.4 \frac{lb f}{in^3}$$

$$\frac{P_2 - P_1}{\gamma} = \frac{1008}{62.4} = 16.15 \text{ pies}$$

$$z_2 - z_1 = 50 \text{ pies}$$

Cálculo de las pérdidas en las tuberías:

Calculo de las perdidas

Tubería de succión:

L_s=100 pies de tubería recta

$D_{\text{cav}} = 8 \text{ in.}$, $D_{\text{interior}} = 202.7 \text{ mm}$

Tramo recto:

$$\nu = 1.005 \times 10^{-6} \frac{m^2}{\text{agua a } 20^\circ\text{C}}$$

$$Re = \frac{4Q}{\nu \pi D} = \frac{4x0.0237}{1.005x10^{-6}\frac{m^2}{s}\pi x0.2027m} = 1.5x10^5$$

$$Re = 1.5 \times 10^5 \quad \varepsilon/D = \frac{0.046}{202.7} = 2.3 \times 10^{-4}, \quad f_s = 0.018$$

$$h_{fp} = \frac{8fL}{g\pi^2 D^5} Q^2 = \frac{8 \times 0.018 \times 100 \times 0.3048}{9.81 \times \pi^2 \times 0.2027^5} 0.0237^2$$

$$h_{fp} = 0.074 \text{ m} = 0.24 \text{ pies}$$

Válvula de pie con obturador ascendente y filtro:

$$V_s = \frac{Q}{A} = \frac{4 \times 0.0237 \text{ m}^3/\text{s}}{(\pi(0.2027)^2) \text{ m}^2} = 0.73 \text{ m/s}$$

$$h_{fsVP} = K \frac{V_s^2}{2g} = 8 \times \frac{0.73^2}{2 \times 9.81} = 0.22 \text{ m} = 0.72 \text{ pies}$$

Codo estandar de 90°:

$$h_{fSC90} = 0.5 \times \frac{0.73^2}{2 \times 9.81} = 0.014 \text{ m} = 0.045 \text{ pies}$$

Válvula de compuerta completamente abierta:

$$h_{fSVC} = 0.15 \times \frac{0.73^2}{2 \times 9.81} = 0.004 \text{ m} = 0.013 \text{ pies}$$

$$h_{fsucción} = 0.074 + 0.22 + 0.014 + 0.004 = 0.312 \text{ m} = 1.02 \text{ pies}$$

Tubería de descarga

$L_d = 3000$ pies de tubería recta

$D_d = 6$ in, $D_{interno} = 154.1$ mm

Tramo recto:

$$\nu = 1.005 \times 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \text{ agua a } 20^\circ\text{C}$$

$$Re = \frac{4Q}{\nu \pi D} = \frac{4 \times 0.0237}{1.005 \times 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \times \pi \times 0.1541 \text{ m}} = 1.9 \times 10^5$$

$$Re = 1.9 \times 10^5 \quad \varepsilon/D = \frac{0.046}{154.1} = 3 \times 10^{-4}, \quad f_d = 0.018$$

$$h_{fp} = \frac{8fL}{g\pi^2 D^5} Q^2 = \frac{8 \times 0.018 \times 3000 \times 0.3048}{9.81 \times \pi^2 \times 0.1541^5} 0.0237^2$$

$$h_{fp} = 8.79 \text{ m} = 28.84 \text{ pies}$$

2 Codos estandar de 90°:

$$V_d = \frac{Q}{A} = \frac{4 \times 0.0237 \text{ m}^3/\text{s}}{(\pi(0.1541)^2) \text{ m}^2} = 1.27 \text{ m/s}$$

$$h_{fSC90} = 2 \times 0.5 \times \frac{1.27^2}{2 \times 9.81} = 0.082 \text{ m} = 0.27 \text{ pies}$$

Válvula de compuerta completamente abierta:

$$h_{fSVC} = 0.15 \times \frac{1.27^2}{2 \times 9.81} = 0.012 \text{ m} = 0.04 \text{ pies}$$

Salida:

$$h_{fsalida} = 1 \frac{1.27^2}{2 \times 9.81} = 0.082 \text{ m} = 0.27 \text{ ft}$$

$$h_{fdescarga} = 8.79 + 0.082 + 0.012 + 0.082 = 8.97 \text{ m} = 29.42 \text{ pies}$$

$$H_B = 16.15 \text{ ft} + 50 \text{ ft} + 1.02 \text{ ft} + 29.42 \text{ ft} = 96.60 \text{ ft}$$

Entrando en la Fig. E1.1 con $Q = 375 \text{ gpm}$ y $H_B = 96.60 \text{ ft}$, se puede observar que los calculos de H_B usando los diámetros económicos de la tubería resultan en un punto de funcionamiento muy cercano al punto de mejor eficiencia o punto de diseño de la bomba.

El diámetro apropiado del impulsor para lograr el punto de funcionamiento es de 6", obteniéndose una eficiencia del 70%. En la Fig. 3.12 se lee una potencia del motor de aproximadamente igual a 15 Hp para $L = 375 \text{ gpm}$ y diámetro de impulsor igual a 6". También puede calcularse la potencia mecánica usando:

$$\dot{W}_{mec} = \frac{\dot{W}_{hid}}{\eta_B} = \frac{\gamma Q H_B}{\eta_B} = \frac{998 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 9.81 \times 0.0237 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \times 30.48 \text{ m}}{0.7} = 10103.3 \text{ W}$$

$$\dot{W}_{mec} = 10.1 \text{ KW} = 13.5 \text{ Hp}$$

3.8 Curvas de funcionamiento para ventiladores.

Las curvas de funcionamiento para ventiladores se obtienen experimentalmente en un banco de pruebas como el que se muestra esquemáticamente en la Fig. 3.13. Los fabricantes de ventiladores publican dos tipos de curvas para ilustrar al usuario el rango de funcionamiento de sus productos: curvas elementales dimensionales (Fig. 3.14) y curvas completas dimensionales o diagramas de concha (Fig. 3.15). Estas curvas son similares a las curvas de las bombas, pero sustituyendo ΔP por H . ΔP es el incremento de presión a través del ventilador y puede ser ΔP total o ΔP estático.

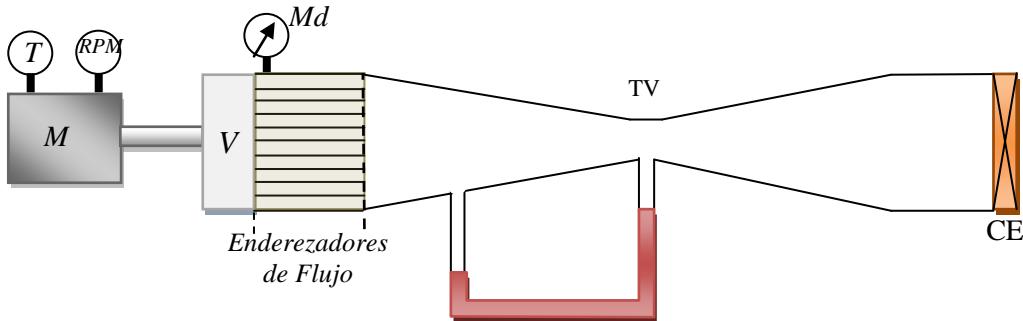


Figura 3.13. Esquema de un banco de prueba para ventiladores.

Accesorios de control de flujo:

CE = Compuerta de estrangulación.

Instrumentación:

Md = Manómetro de descarga. TV = Tubo Vénturi.

T = Torquímetro. RPM = Tacómetro.

Equipo:

M = Motor de corriente directa. V = Ventilador.

Ecuaciones de Cálculo:

$\Delta P = P_d$

$Q = f(\Delta P \text{ en tubo Vénturi según curva de calibración})$

$$P_m = \frac{T\pi N}{30} \quad \eta = \frac{P_{hid}}{P_m} = \frac{Q\Delta P}{P_m}$$

a) Curvas elementales dimensionales

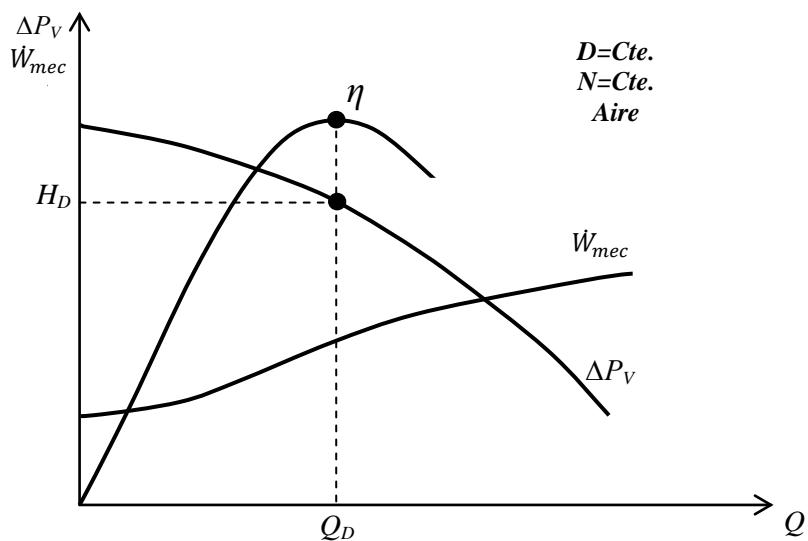


Figura 3.14. Curvas elementales dimensionales para ventiladores

b) Curvas completas dimensionales

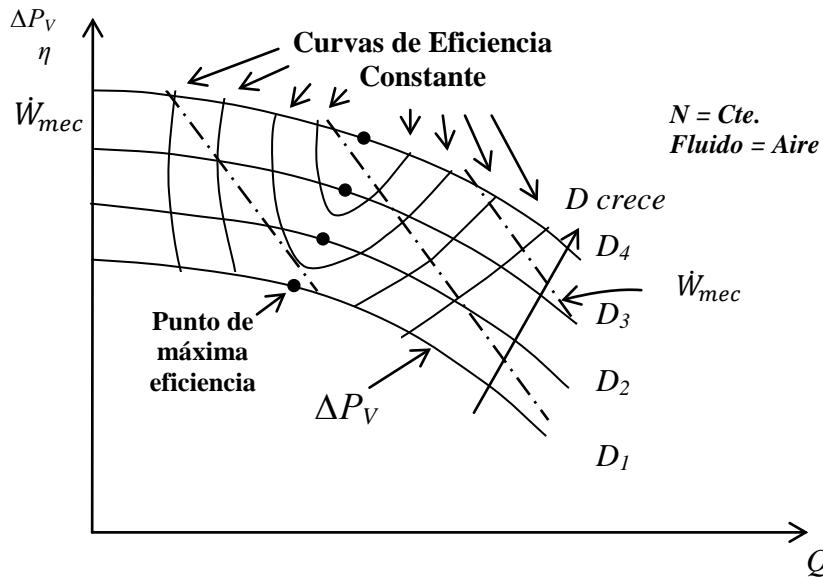


Figura 3.15 Curvas completas dimensionales para ventiladores

3.9 Punto de funcionamiento de un sistema de ventilación.

Aplicando Bernoulli a un sistema de ventilación, la altura del ventilador es igual a la altura o energía específica de pérdidas por fricción hf_{1-2} . Por lo tanto,

$$H_V = hf_{1-2} \quad (3.37)$$

$$\Delta P_V = \gamma_{aire} hf_{1-2} \quad (3.38)$$

La altura de fricción siempre está presente en el sistema de ventilación y su magnitud puede controlarse por medio de la sección transversal de la ductería.

De la ecuación 3.37, se puede observar que la parte fija de H_V no existe en sistemas de ventilación. La parte variable hf_{1-2} si existe y es una función cuadrática de Q , según la ecuación de Darcy - Weisbach para la altura de pérdidas. El punto de funcionamiento se obtiene al interceptar la curva ΔP_V requerida por el sistema, con la curva ΔP_V proporcionada por el ventilador, tal como se ilustra en la Fig. 3.16.

El objetivo del Ingeniero consiste entonces en diseñar el sistema para que el punto de funcionamiento coincida lo mejor posible con el punto de diseño o de máxima eficiencia del ventilador que se escoga para ejecutar el trabajo.

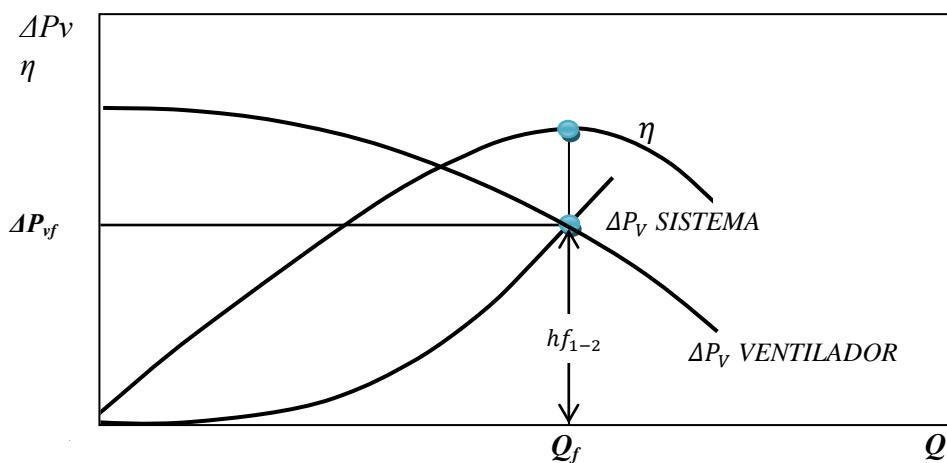


Figura 3.16. Punto de funcionamiento de un sistema de ventilación.

3.10 Curvas de funcionamiento para turbinas.

Las curvas de funcionamiento para turbinas se obtienen experimentalmente en un banco de pruebas como el que se muestra esquemáticamente en la figura 3.17. Usualmente se experimenta sobre el modelo debido al gran tamaño del prototipo. Los fabricantes publican dos tipos de curvas para presentar al usuario el rango de funcionamiento de sus productos: curvas elementales dimensionales (figura 3.18) y curvas completas dimensionales o diagramas de concha (figura 3.19).

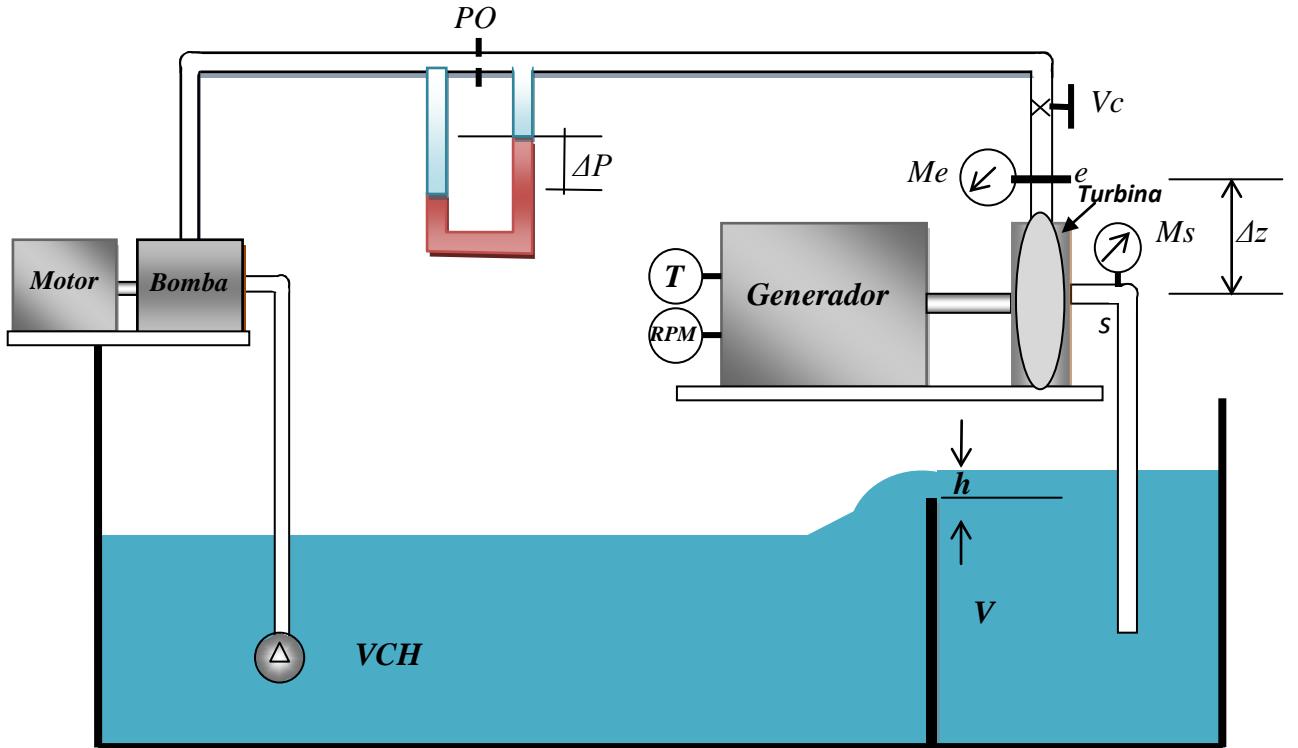


Figura 3.17. Esquema de un banco de prueba para Turbinas Hidráulicas.

Accesorios de control de flujo:

VCH = Válvula Check.

Instrumentación:

Me = Manómetro de entrada.

PO = Placa orificio.

V = Vertedero.

Equipo:

Motor = motor de corriente directa,

Bomba.

Vc = Válvula de compuerta,

Ms = Manómetro de salida.

T = Torquímetro.

RPM = Tacómetro.

Turbina

Generador

Ecuaciones de Cálculo:

$$H = \frac{P_e - P_s}{\gamma} + \frac{V_e^2 - V_s^2}{2g} + (Z_e - Z_s) \quad (3.39)$$

$Q = f(\Delta P \text{ en } PO \text{ ó } 'h' \text{ en el Vertedero según curvas de calibracion})$

$$P_m = \frac{T \pi N}{30} \quad (3.40)$$

$$\eta = \frac{P_m}{P_{hid}} = \frac{P_m}{\gamma Q H} \quad (3.41)$$

a) Curvas elementales dimensionales.

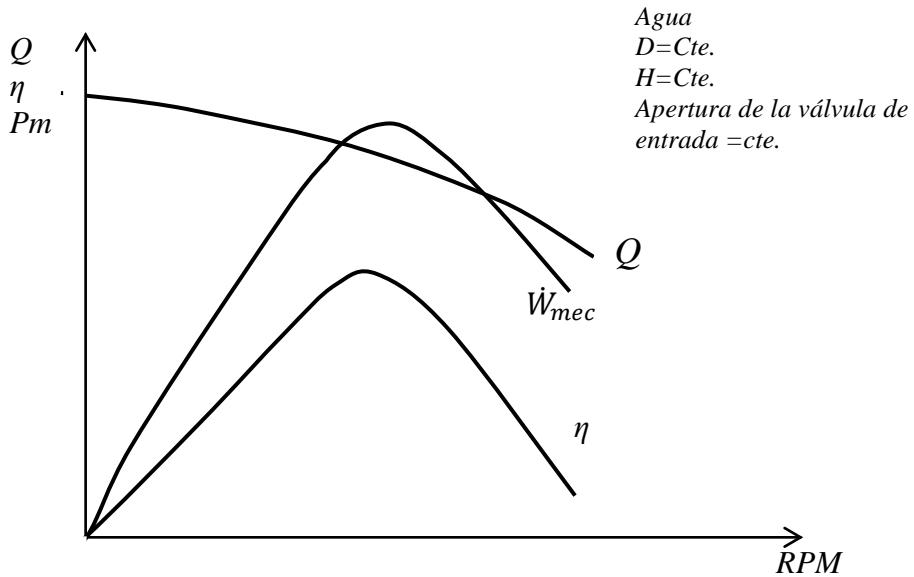


Figura 3.18. Curvas elementales dimensionales para turbinas

b) Curvas completas dimensionales

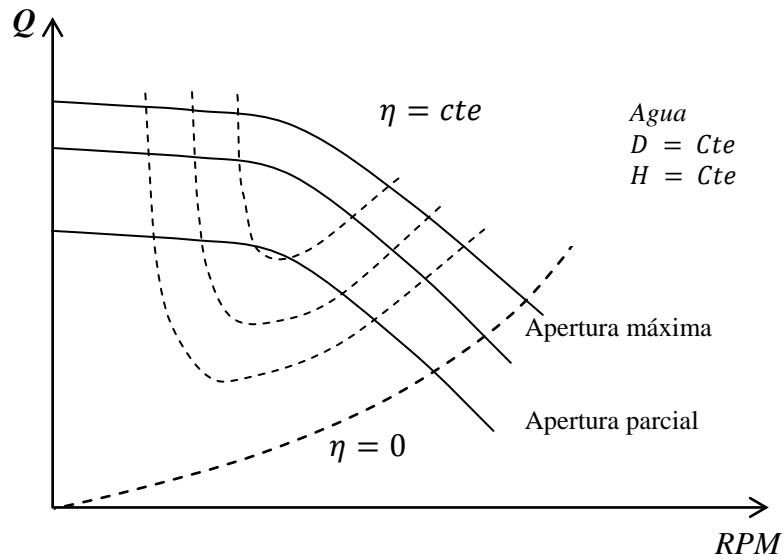


Figura 3.19. Curvas completas dimensionales para turbinas

3.11 Velocidad específica ns, Ns .

Es un parámetro adimensional de gran importancia que se obtiene al combinar el coeficiente de caudal y el coeficiente de altura para eliminar el diámetro del rotor.

$$Ns = \frac{\phi^{1/2}}{\psi^{3/4}} = \frac{NQ^{1/2}}{(gH)^{3/4}} \quad (3.42)$$

La velocidad específica se puede escribir en términos estrictamente adimensionales, transformando N a velocidad angular ω .

$$ns = \frac{\omega Q^{1/2}}{(gH)^{3/4}} = \frac{Ns \pi}{30} \quad (3.43)$$

Los Valores de N, Q, H se toman en el punto de máxima eficiencia de la característica $H - Q$. Por lo tanto, Ns es un parámetro de gran importancia para escoger la TH más eficiente para realizar ciertas condiciones de trabajo. Además, Ns define el tipo de diseño de una TH , ya que cada clase de TH tiene su máxima eficiencia dentro de un pequeño rango de Ns y este rango es diferente para cada clase.

Las bombas centrifugas radiales se diseñan para proporcionar gran altura, pero para manejar bajo caudal; por lo tanto, se puede deducir de la ecuación 3.42., que el valor de Ns para este tipo de bombas es bajo. Por el contrario, las bombas axiales se diseñan para manejar caudales elevados contra baja altura; por lo tanto, este tipo de bomba tiene un valor elevado de Ns .

Las turbinas Pelton se diseñan para trabajar bajo gran altura, turbinando bajo caudal; por lo tanto, se puede deducir de la ecuación 3.42 que el valor de Ns para este tipo de turbinas es bajo. Por el contrario, las turbinas axiales o Kaplan se diseñan para turbinar caudales elevados bajo pequeñas alturas; por lo tanto, este tipo de turbina tiene un valor elevado de Ns .

En la práctica, se elimina por conveniencia la gravedad 'g' de la ecuación 3.42, por lo que Ns pierde su carácter adimensional. Los Factores de conversión se dan en la tabla 3.12.

Tabla 3.12 Factores de conversión para ns y ds

	(1)	(2)	(3)
Adimensional	ft^3/s ft rpm	m^3/s m rpm	gpm ft rpm
ns	Ns	Ns	Ns
1	128.8	52.9	2730
ds	Ds	Ds	Ds
1	0.42	0.565	0.0198

Calculando un valor de ns (adimensional) se puede obtener a partir de éste, el valor respectivo en las unidades (1), (2) ó (3) para las ecuaciones de la velocidad específica Ns y del diámetro específico Ds (dimensionales) sin la gravedad. Por ejemplo para pasar de ns a Ns del sistema (1) se multiplica por 128.8. Al dividir por el valor respectivo desde un sistema (1), (2) ó (3), se obtendría un valor adimensional ns, ds .

Práctica inglesa:

$$H = [ft]; \quad Q = [gpm]; \quad N = [rpm]$$

Práctica europea: se modifica la ecuación (3.42) de la siguiente forma:

$$Ns = \frac{NQ^{1/2}}{(gH)^{3/4}} \left(\frac{\gamma}{75} \right)^{1/2} \quad (3.44)$$

$$H = [m]; \quad Q = \left[\frac{m^3}{s} \right]; \quad N = [rpm]; \quad \gamma = [Kgf/m^3]$$

Obteniéndose:

$$Ns_{\text{ingles}} = 14.15 Ns_{\text{euro}} \quad (3.45)$$

La Fig. 3.20 ilustra la geometría del rotor de una TH en función del valor de la velocidad específica europea.

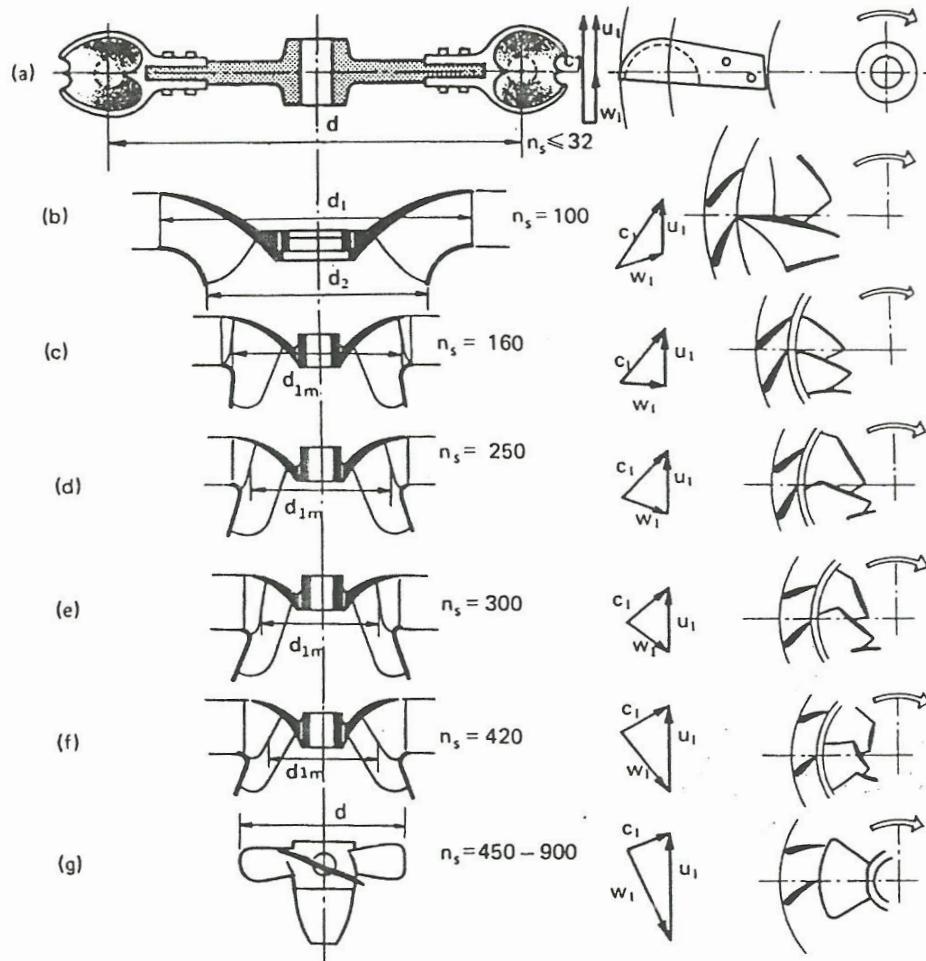


Figura 3.20 Forma del rodete y del triángulo de velocidades de turbinas en función de N_s

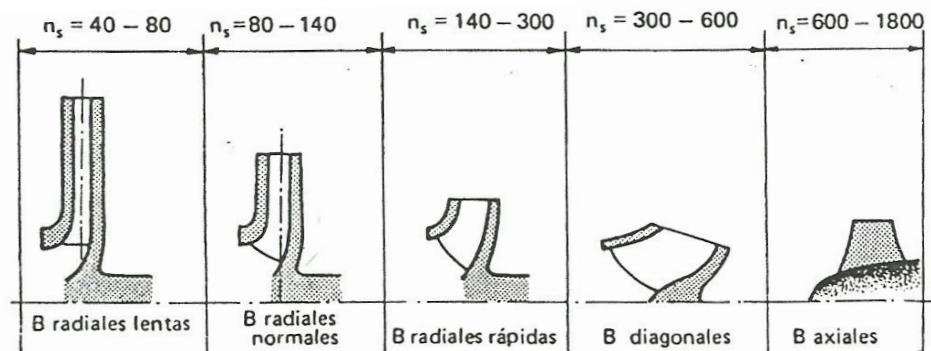


Figura 3.21. Geometría del rotor en función del valor de la velocidad específica

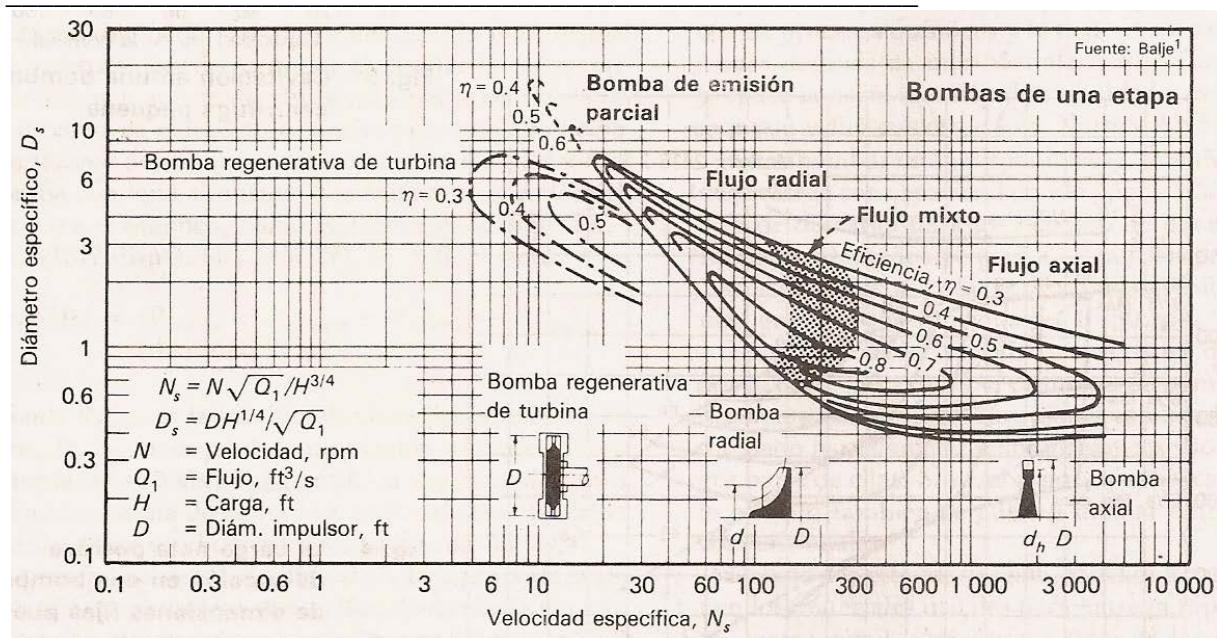


Figura 3.22. Grafica D_s vs N_s para selección o diseño preliminar de bombas o compresores de una etapa, para $Re \geq 1 \times 10^8$ en bombas y $Re \geq 2 \times 10^6$ en compresores. La eficiencia para los compresores es total-a-total

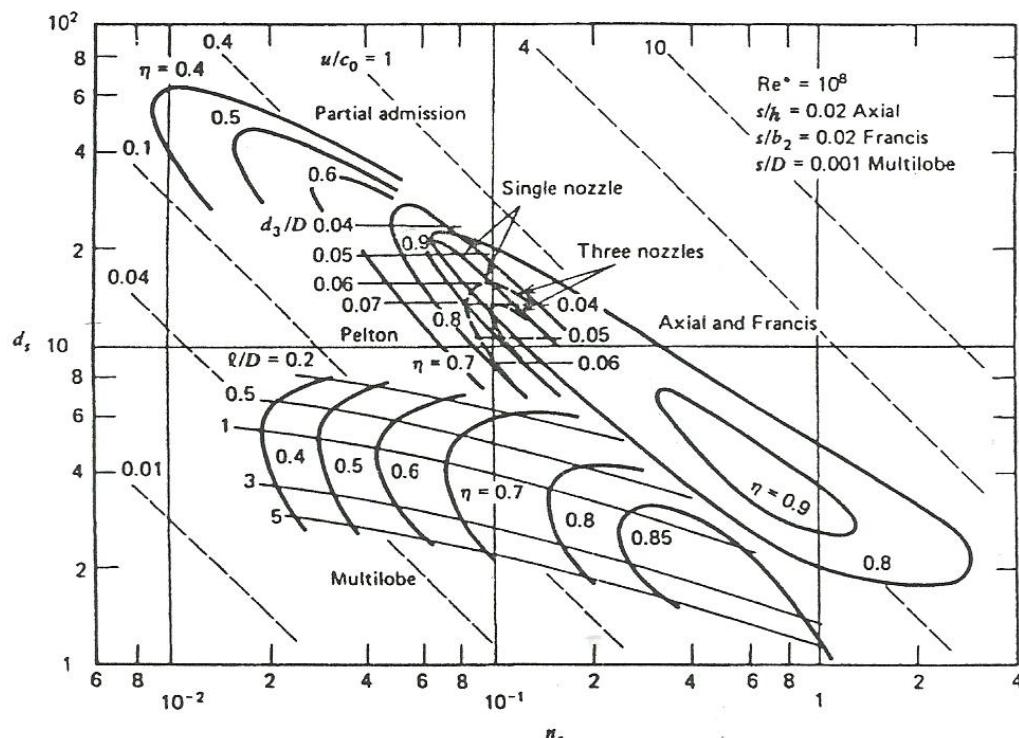


Figura 3.23. Grafica ds vs ns para selección o diseño preliminar de turbinas hidráulicas, para $Re \geq 1 \times 10^8$

3.12 Diámetro Específico ds, D_s .

El diámetro específico es un parámetro adimensional importante que se obtiene al combinar el coeficiente de caudal y el coeficiente de altura para eliminar las *RPM* de la maquina:

$$ds = \frac{\psi^{1/4}}{\phi^{1/2}} = \frac{D(gH)^{1/4}}{Q^{1/2}} \quad (3.46)$$

En la práctica, se elimina por conveniencia la gravedad '*g*' de la ecuación 3.46, por lo que '*ds*' pierde su carácter adimensional y se transforma en *Ds* dimensional. Los factores de conversión se dan en la Tabla 3.12.

El diámetro específico relaciona el diámetro del rotor con los valores de *Q* y *H* en el punto de máxima eficiencia de la característica *H* – *Q*; por lo tanto, *Ds*, al igual que *Ns*, permite escoger la *TH* más eficiente para realizar ciertas condiciones de trabajo.

En conclusión, si se grafica *Ds* en función de *Ns*, se obtiene una mejor idea de la configuración del impulsor y de la eficiencia aproximada de la turbomáquina. La figura 3.22 permite predecir el tipo de bomba que mejor se adapta a una aplicación determinada y estimar al mismo tiempo la eficiencia que podría esperarse y el tamaño aproximado del rotor. La figura 3.23 se aplica a turbinas hidráulicas. Ambas gráficas están basadas en la experiencia con maquinas diseñadas y fabricadas con las últimas tecnologías disponibles.

Ejemplo 3.8

Se desea escoger una bomba para manejar 357 *l/s* y vencer una altura de 75 *m* rotando a 1750 *RPM*. Determinar el tipo de bomba, la eficiencia que podría esperarse y el diámetro aproximado de la misma.

Para entrar en la Fig. 3.22 se debe calcular *Ns* en unidades inglesas, tal como se indica en la parte inferior izquierda de la figura 3.22. También se puede calcular el *ns* adimensional y luego se aplica el factor de conversión de la tabla 3.12.

Calculando la velocidad específica adimensional se tiene:

$$ns = \frac{1750 \pi (0.357)^{1/2}}{30(9.81 \times 75)^{3/4}} = 0.775;$$

Usando el factor de conversión de la tabla 3.12, se debe multiplicar el *ns* por el factor de conversión 128.8 para llevar el valor a las unidades del sistema (1), sistema de unidades requerido por la figura 3.22.

$$Ns = 0.775 \times 128.8 = 99.82$$

Con *Ns* = 99.82 se puede observar en la Fig. 3.22 que la bomba es del tipo centrifuga radial y que se puede esperar una eficiencia de 80% con un diámetro específico *Ds* = 1.1. Por lo tanto, el diámetro específico adimensional es:

$$ds = \frac{1.1}{0.42} = 2.62$$

$$D = \frac{2.62 (0.357)^{1/2}}{(9.81 \times 75)^{1/4}} = 29.85 \text{ cm}$$

El rotor de la bomba tiene un diámetro aproximado de 29.85 cm.

Ejemplo 3.9

La planta hidroeléctrica General José Antonio Páez ubicada en Venezuela dispone de una altura de 990 *m* y de un caudal por maquina de 6.5 *m³/s*. De acuerdo a las características del generador, la turbina debe rotar a 380 *RPM*. Se desea conocer el tipo de turbina y el diámetro aproximado de la misma.

Para entrar en la Fig. 3.23 se debe calcular *ns* adimensional:

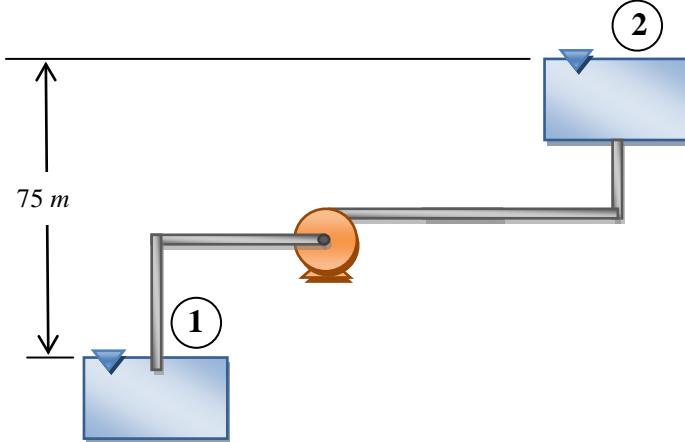
$$ns = \frac{380 \pi (6.5)^{1/2}}{30 (9.81 \times 990)^{3/4}} = 0.1037$$

Con *ns* = 0.1037 se puede observar e la Fig. 3.23 que la turbina es del tipo Pelton con tres toberas y que se puede esperar una eficiencia de 90% con un diámetro específico *ds* = 14. Por lo tanto, el diámetro del rotor es:

$$D = \frac{14(6.5)^{1/2}}{(9.81 \times 990)^{1/4}} = 3.6 \text{ m}$$

Ejemplo 3.10

Se necesita comprar una bomba para la estación de bombeo El Anís, la cota geodésica es de 75 m, asuma que las pérdidas de carga son del 10% de la longitud de la tubería. Entre la estación y el tanque de llenado hay 200 m. Se requiere un caudal de 30 l/s. Si se desea utilizar una bomba que gira a 3600 RPM, estime la potencia que consume dicha bomba y el tipo de bomba que se puede utilizar.



$$h_{f_{1-2}} = 200 \times 0.1 = 20 \text{ m}$$

$$Q = 30 \frac{\text{L}}{\text{s}} \times \frac{1\text{m}^3}{1000} = 0.03 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

Aplicando Bernoulli

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 - h_{f_{1-2}} = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2$$

$$H_B = \Delta z + h_{f_{1-2}}$$

Por lo que:

$$H_B = 75 + 20 = 95 \text{ m}$$

Se calcula el ns y se usa la figura 3.22 para el diseño preliminar de bombas, de donde se extrae el tipo de bomba y la eficiencia aproximada η_B

$$ns = \frac{\omega Q^{1/2}}{(g H)^{3/4}} = \frac{(3600) \pi}{30} \frac{(0.03)^{1/2}}{((9.81)(95))^{3/4}} = 0.3871$$

$$Ns = (128.8)(0.3871) = 49.86 \quad \text{Bomba radial}$$

La eficiencia aproximada es $\eta_B = 0.70$

La potencia mecánica será:

$$\dot{W}_{mec} = \frac{\gamma Q H_B}{\eta_B}$$

$$\dot{W}_{mec} = \frac{(998 \times 9.81)(0.03)(95)}{0.70} = 39860 \text{ W} = 39.86 \text{ KW} = 53.45 \text{ HP}$$

3.13 Velocidad específica de succión, S .

Se usa para prevenir cavitación en la maquinaria. Este es un fenómeno particular a Bombas y Turbinas Hidráulicas, que ocurre cuando la presión estática local del líquido cae hasta igualar la presión de vapor o presión de saturación del líquido a la temperatura de trabajo, formándose burbujas de vapor. Las burbujas son arrastradas a zonas de mayor presión donde se condensan bruscamente causando grandes incrementos puntuales en la presión local. Como resultado, habría ruido y vibraciones en la bomba, ocurre una erosión rápida o deterioro en las

paredes de la carcasa y rotor por picaduras y una caída brusca en la altura manométrica y el caudal de la bomba y el rendimiento disminuye.

El criterio de control de la cavitación es la *NPSH* (Net Positive Suction Head) que es la carga disponible a la entrada de la bomba para evitar la cavitación o evaporación del líquido. La entrada de la bomba, o zona de succión, es la región donde la presión es más baja y donde puede aparecer antes la cavitación. La *NPSH* se define como:

$$NPSH = H_s = H + Ha - Hv \quad (3.47)$$

donde:

H = altura de líquido en la brida de succión de una bomba o en la descarga de una turbina y entrada al tubo de desfogue.

$$H = \frac{P_s}{\gamma} + \frac{V_s^2}{2g} \quad (3.48)$$

Donde P_s y V_s son la presión y velocidad a la entrada o succión de la bomba. La presión estática P_s debe expresarse en unidades manométricas y se ha tomado como datum el punto donde se calcula la *NPSH*; por lo tanto, $z=0$.

$$Ha = \text{presión atmosférica local transformada a altura de líquido} = \frac{P_{atm}}{\gamma}$$

$$Hv = \text{presión de vapor o de saturación del líquido correspondiente a la temperatura de trabajo y transformada a altura de líquido} = \frac{P_{sat}}{\gamma}$$

Si la entrada de la bomba está situada a una altura h por encima de un depósito cuya superficie libre está abierta a la atmósfera, podemos usar la ecuación de Bernoulli para calcular H y la *NPSH* como:

$$-h - h_{f1-s} = \frac{P_s}{\gamma} - \frac{V_s^2}{2g} \quad (3.49)$$

$$NPSH = -h - h_{f1-s} + \frac{P_{atm}}{\gamma} - \frac{P_v}{\gamma} \quad (3.50)$$

Donde h_{f1-s} es la pérdida de carga entre el depósito y la entrada de la bomba.

Algunos diagramas de concha presentan la curva de *NPSH*, este valor representa la mínima magnitud **requerida** para evitar la cavitación. De esta manera, conocido la *NPSH* que se toma del gráfico, se debe asegurar que el segundo miembro de la ecuación (2.47) sea mayor o igual que el primero para evitar la cavitación. Para el cálculo se tiene que utilizar un valor de *NPSH_d* que se obtiene al multiplicar el *NPSH* requerido (*NPSH_r*) que se lee del gráfico, por un factor de seguridad mayor que la unidad tal como se muestra en la siguiente ecuación:

$$NPSH_d = (NPSH_r) \times FS \quad (3.51)$$

La velocidad específica de succión se define como:

$$S = \frac{\omega Q^{1/2}}{(g H_s)^{3/4}} = \frac{\pi N Q^{1/2}}{30 (g H_s)^{3/4}} \quad (3.52)$$

$$H_s = [m]; \quad Q = \left[\frac{m^3}{s} \right]; \quad \omega = \left[\frac{rad}{s} \right]; \quad N = [rpm]; \quad g = 9.81 \left[\frac{m}{s^2} \right]$$

Empíricamente se ha demostrado que la cavitación ocurre cuando:

$S \geq 2.95$ para bombas y $S \geq 3.96$ para turbinas.

Cuando **no se tiene la curva de *NPSH*** de la bomba, se puede usar el valor empírico de $S=2.95$ para calcular un valor mínimo de *NPSH*. Este valor se puede usar para estimar la máxima altura h según la cual se puede posicionar la bomba por arriba de la superficie libre del tanque de aspiración, (bomba en aspiración) la cual se deberá reducir según un factor de seguridad para asegurar un valor de velocidad específica inferior a 2.95 y evitar la cavitación. El caso de una bomba en carga (tanque por arriba de la bomba), el factor de seguridad se usa para aumentar la longitud h obtenida con $S=2.95$, y así evitar cavitación al aumentar la *NPSH*, lo cual reduce el valor de S hasta un valor inferior a 2.95.

Ejemplo 3.11

Estimar las velocidades máximas de rotación para dos bombas diferentes cuyos pasajes de entrada al rolete son geométricamente similares a los de una bomba experimental más pequeña. La bomba experimental trabaja libre de cavitación bajo una H_s no menor de 12 pies cuando bombea 5 pie^3/s contra una altura de 85 pies a una

velocidad de 1200 RPM. Las dos bombas grandes van a ser diseñadas para 200 pie³/s y 300 pie³/s contra una altura de 300 y 440 pies respectivamente. Los rodetes de las bombas van a ser colocados 12 pies por debajo del nivel del depósito de agua de succión. Las bombas manejan Agua a 80 °F y presión normal.

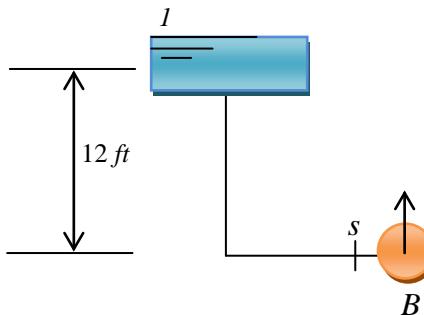
Se tienen como datos:

	Modelo	Prototipo 1	Prototipo 2
<i>NPSH</i>	12 pies		
<i>Q</i>	5 pie ³ /s	200 pie ³ /s	300 pie ³ /s
<i>H_B</i>	85 pies	300 pies	440 pies
<i>N</i>	1200 RPM		
<i>h</i>		12 pies	12 pies

$$H_s = H + H_a - H_v$$

(*H_{a – *H_v*) = 32.8 pies (para agua a 80°F y presión atmosférica normal).}*

$$H = \frac{P_s}{\gamma} + \frac{V_s^2}{2g}$$



$$h - h_{f1-s} = \frac{P_s}{\gamma} + \frac{V_s^2}{2g}$$

Despreciando las pérdidas en la tubería de succión se tiene:

$$H = \frac{P_s}{\gamma} + \frac{V_s^2}{2g} = h$$

Para las bombas prototipo se tiene:

$$H_s = 12 + 32.8 = 44.8 \text{ pies}$$

Haciendo similitud entre el modelo y cada uno de los prototipos, usando la ecuación para la velocidad específica de succión, se tiene:

$$S = \frac{\pi N Q^{1/2}}{30 (g H_s)^{3/4}} \Rightarrow \frac{\pi N_m Q_m^{1/2}}{30 (g H_{sm})^{3/4}} = \frac{\pi N_{p1} Q_{p1}^{1/2}}{30 (g H_{sp1})^{3/4}}$$

$$N_{p1} = N_m \left(\frac{Q_m}{Q_{p1}} \right)^{1/2} \left(\frac{H_{sp1}}{H_{sm}} \right)^{3/4} = 1200 \left(\frac{5}{200} \right)^{1/2} \left(\frac{44.8}{12} \right)^{3/4}$$

$$N_{p1} = 510 \text{ RPM}$$

$$N_{p2} = N_m \left(\frac{Q_m}{Q_{p2}} \right)^{1/2} \left(\frac{H_{sp2}}{H_{sm}} \right)^{3/4} = 1200 \left(\frac{5}{300} \right)^{1/2} \left(\frac{44.8}{12} \right)^{3/4}$$

$$N_{p2} = 416 \text{ RPM}$$

Resolver el mismo problema si las bombas van a ser colocadas 12 ft por encima del nivel del depósito de agua de succión.

Ejemplo 3.12

Una bomba centrifuga para alimentación de calderas desarrolla una altura de bombeo de 80 m, maneja 40 l/s de agua a 35°C y rota a 3550 RPM. La pérdida de carga en la tubería de succión del sistema (que está a 200 metros sobre el nivel del mar) es de 0.5 m. Calcular la altura geodésica de colocación de la bomba sobre el pozo de succión, el cual está abierto a la atmósfera.

Datos:

Agua a 35°C

$$H_B = 80 \text{ m}$$

$$Q = 0.04 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$N=3550 \text{ RPM}$$

$$h_{f1-s} = 0.5 \text{ m}$$

$$P_{atm} \text{ a } 200 \text{ msnm}$$

Como no se tiene la curva de **NPSH** de la bomba, se puede usar el valor empírico de $S=2.95$ para calcular un valor de **NPSH** con el que comienza la cavitación. Este valor se puede usar para estimar la máxima altura h según la cual se puede posicionar la bomba por arriba de la superficie libre del tanque de aspiración, la cual se deberá reducir según un factor de seguridad para asegurar un valor de velocidad específica inferior a 2.95 y evitar la cavitación.

$$H_s = \frac{1}{g} \left(\frac{\pi N Q^{1/2}}{30S} \right)^{4/3} = \frac{1}{9.81} \left(\frac{\pi 3550 (0.04)^{1/2}}{30 \times 2.95} \right)^{4/3} = 7.53 \text{ m}$$

$$P_{atm} = \frac{101350}{9810} = 10.33 \text{ m de agua} \rightarrow \text{Presión atmosférica normal en altura equivalente de agua.}$$

A 200 msnm la presión atmosférica se puede calcular de manera aproximada con la siguiente ecuación:

$$Ha = 10.33 - \frac{1.2}{1000} \times 200 = 10.09 \text{ m}$$

$$Hv = 0.58 \text{ m a } 35^\circ\text{C}$$

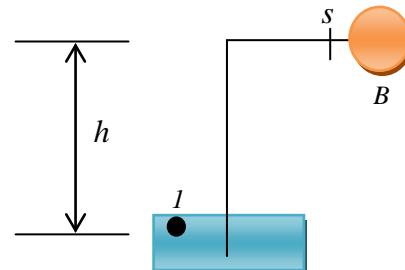
$$H = H_s - Ha + Hv = 7.53 \text{ m} - 10.09 \text{ m} + 0.58 \text{ m} = -1.98 \text{ m}$$

$$-h - h_{f1-s} = \frac{P_s}{\gamma} + \frac{V_s^2}{2g} = H$$

$$h = -H - h_{f1-s} = 1.98 \text{ m} -$$

$$0.5 \text{ m} = 1.48 \text{ m}$$

La bomba puede colocarse a una altura menor que 1.48 m por encima del tanque de succión.



Ejemplo 3.13

Estimar la altura máxima del tubo troncocónico de descarga de una turbina Francis para evitar la ocurrencia de cavitación a la salida de la turbina. La ns de la turbina es igual a 1 y trabaja bajo una altura de 40 m. La presión atmosférica del lugar es de 9.8 m.c.a. y la temperatura ambiente es de 21°C. Las perdidas en el tubo troncocónico se estiman en un 5% de la longitud del tubo.

Datos:

$$ns = 1$$

$$H_t = 40 \text{ m}$$

$$P_{atm} = 9.8 \text{ m. c. a}$$

Agua a 21°C

$$h_{f1-0} = 0.05h$$

$$ns = \frac{\pi N (Q)^{1/2}}{30(g H_t)^{3/4}} \quad S = \frac{\pi N Q^{1/2}}{30 (g H_s)^{3/4}} \quad \frac{ns}{S} = \left(\frac{H_s}{H_t} \right)^{3/4}$$

Se puede usar el valor empírico de $S=3.96$ para calcular un valor mínimo de **NPSH**. Este valor se puede usar para estimar la máxima altura h del tubo troncocónico o tubo de desfogue de la descarga de la turbina, la cual se deberá reducir según un factor de seguridad para asegurar un valor de velocidad específica inferior a 3.96 y evitar la cavitación.

$$H_s = H_t \left(\frac{ns}{S} \right)^{4/3} = 40 \left(\frac{1}{3.96} \right)^{4/3} = 6.38 \text{ m}$$

$$Ha = 9.8 \text{ m}; \quad Hv = 0.26 \text{ m}$$

$$H = H_s - Ha + Hv$$

$$H = 6.38 - 9.8 + 0.26 = -3.16$$

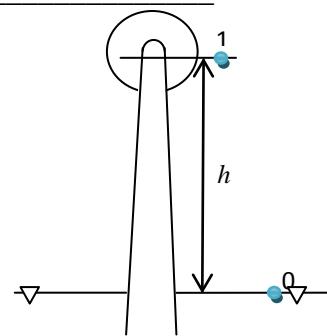
$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} - h_{f1-0} = \frac{P_0}{\gamma} + \frac{V_0^2}{2g} - h$$

$$\frac{P_0}{\gamma} = 0; \quad \frac{V_0^2}{2g} = 0$$

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = H$$

$$h = -H + h_{f1-0} = -H + 0.05h$$

$$h = \frac{3.16}{0.95} = 3.33 \text{ m}$$



La altura del tubo troncocónico de descarga debe ser menor que 3.33 m para evitar la ocurrencia de cavitación.

Si tomamos $h = 3 \text{ m}$

$$H = -3 + 0.05 \times 3 = -2.85 \text{ m}$$

$$H_s = H + Ha - Hv = -2.85 + 9.8 - 0.26$$

$$H_s = 6.69 \text{ m}$$

$$\frac{ns}{S} = \left(\frac{H_s}{H_T} \right)^{3/4} \rightarrow S = ns \left(\frac{H_T}{H_s} \right)^{3/4}$$

$$S = 1 \left(\frac{40}{6.69} \right)^{3/4} = 3.82$$

Como $S < 3.96$ no ocurre cavitación

Ejemplo 3.14.

Estimar la máxima velocidad de rotación de una bomba cuyo eje se encuentra 2 m por debajo del nivel del líquido en el tanque de succión y se encuentra instalada en la estación más elevada del teleférico a unos 4600 msnm y se utiliza para bombear el agua de la calefacción de un refugio, dicha agua se encuentra a 40°C. Se necesitan 100 litros por minuto de caudal.

Si se compra una bomba cuya velocidad es 3600 RPM, estimar la máxima diferencia de cota entre el eje de dicha bomba y el nivel de succión.

Datos:

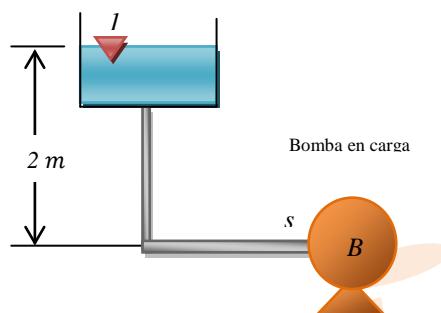
$$h = 2 \text{ m}$$

$$Q = 100 \frac{\text{L}}{\text{min}} = 1.6667 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$$

$$P_{atm} \text{ a } z = 4600 \text{ msnm}$$

$$\text{Agua a } 40^\circ\text{C} \rho = 992.2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$\text{Si } N=3600 \text{ RPM } h = ?$$



A una altura $z = 4600 \text{ msnm}$, la presión atmosférica se puede calcular con mayor precisión con la siguiente ecuación:

$$P_{atm} = P_a \left(1 - \frac{B z}{T_0} \right)^{5.26}$$

Donde: z = altura respecto al nivel del mar, $B = 0.0065 \text{ Km}$, $T_0 = 288.16 \text{ K}$, $P_a = 101.35 \text{ KPa}$ Presión estándar. Esta ecuación permite calcular la presión atmosférica considerando la variación de la densidad del aire atmosférico usando la ecuación de estado y la variación de temperatura que ocurre aproximadamente en forma lineal hasta una altura de 11000 m (parte inferior de la atmósfera denominada troposfera).

$$P_{atm} = 101.35 \left(1 - \frac{(0.0065)(4600)}{288.16}\right)^{5.26} = 54.87 \text{ KPa}$$

Aplicando Bernoulli de 0 a 1

$$h - h_{f1-s} = \frac{P_s}{\gamma} + \frac{V_s^2}{2g}$$

Despreciando las pérdidas en la tubería de succión:

$$h = \frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = 2 \text{ m} = H$$

$$NPSH = H + Ha - Hv$$

$$Ha = \frac{54.87 \times 10^3 \text{ Pa}}{(992.2)(9.81)} = 5.6372 \text{ m}$$

$$Hv = \frac{Psat}{\gamma} \Rightarrow Psat|_{40^\circ C} = 7.384 \text{ KPa}$$

$$Hv = \frac{7.384 \text{ KPa}}{(992.2)(9.81)} = 0.7586 \text{ m}$$

$$NPSH = 2 \text{ m} + 5.6372 \text{ m} - 0.7586 \text{ m} = 6.8786 \text{ m}$$

Aplicando el Criterio Empírico para la velocidad específica de succión $S = 2.95$ obtengo N

$$S = \frac{N \pi}{30} \frac{Q^{1/2}}{(g NPSH)^{3/4}}$$

$$N = \frac{30S(g NPSH)^{3/4}}{\pi Q^{1/2}} = \frac{30(2.95)(9.81 \times 6.8786)^{3/4}}{\pi(1.6667 \times 10^{-3})^{1/2}} = 16245.81 \text{ RPM}$$

Con un régimen de revoluciones menor que 16245.81 RPM no ocurre cavitación según las condiciones dadas.

Con una bomba cuya velocidad es 3600 rpm, se puede usar el criterio empírico $S = 2.95$ para obtener inicialmente el $NPSH$ y luego el valor de h :

$$S = \frac{\pi N Q^{1/2}}{30 (g NPSH)^{3/4}}$$

Despejando se tiene:

$$NPSH = \frac{1}{g} \left(\frac{\pi N Q^{1/2}}{30 S} \right)^{4/3}$$

$$NPSH = \frac{1}{9.81} \left(\frac{\pi 3600 (1.6667 \times 10^{-3})^{1/2}}{30 \times 2.95} \right)^{4/3}$$

$$NPSH = 0.9224$$

$$NPSH = H + Ha - Hv$$

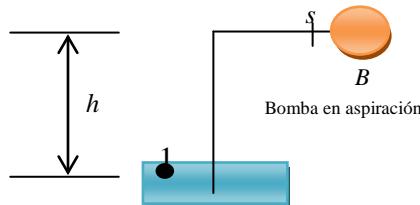
$$H = NPSH - Ha + Hv$$

$$H = 0.9224 - 5.6372 + 0.7586$$

$$H = -3.9562 \text{ m}$$

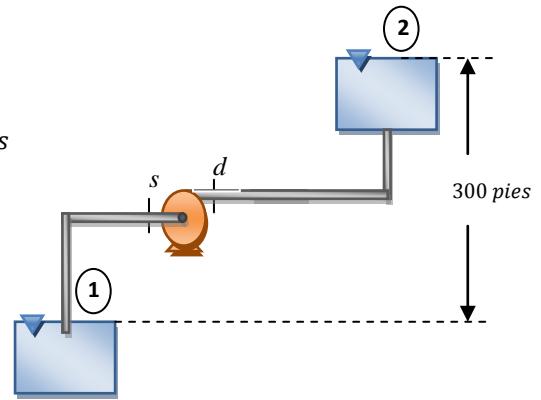
Despreciando las pérdidas en la tubería de succión, con H negativo, se puede colocar la bomba en aspiración a una altura menor que 3.9562 m.

$$-h = \frac{P_s}{\gamma} + \frac{V_s^2}{2g} = H$$



Ejemplo 3.15

Se requiere manejar un caudal de 2000 L/min de agua a 20°C, venciendo una diferencia de altura de 300 pies, las longitudes de la tubería de succión y de descarga 60 y 300 pies respectivamente, se estima una longitud equivalente de pérdidas por accesorios igual a 60 pies en la succión y 150 pies en la descarga, las tuberías tienen rugosidad de 0.00015 pies. Los tanques de succión y de descarga están abiertos a la atmósfera. Seleccione una bomba del diagrama de concha que se muestra.



Datos:

$$Q = 2000 \frac{L}{\text{min}} \times \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \times \frac{0.002228 \text{ pie}^3/\text{s}}{0.06309 L/\text{s}} = 1.1772 \text{ pie}^3/\text{s}$$

Aqua a $T = 20^\circ\text{C} = 68^\circ\text{F}$

$\Delta z = 300 \text{ pies}$

Succión:

$L_s = 60 \text{ pies}$

$L_{equis} = 60 \text{ pies}$

Descarga

$L_d = 300 \text{ pies}$

Aplicando Bernoulli de 1 a 2:

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 + H_B - h_{f1-s} - h_{fd-2} = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2$$

Quedando:

$$H_B = h_{f1-s} + h_{fd-2} + \Delta z$$

Diámetro de la succión:

$$\text{Usando la velocidad económica recomendada por Richter } V_s = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 3.28 \frac{\text{pies}}{\text{s}}$$

$$D = \sqrt{\frac{4Q}{\pi V_s}} = \sqrt{\frac{4(1.1772)}{\pi (3.28)}} = 0.6760 \text{ pies} \cong 8.110 \text{ in}$$

Se toma el diámetro comercial y se usa el diámetro interno:

$$D = 10 \text{ in} \Rightarrow D_s = D_{in} = 10.020 \text{ pulg} \cong 0.8350 \text{ pies}$$

Velocidad en la succión:

$$V_s = \frac{4Q}{\pi D_s^2} = \frac{4(1.1772)}{\pi (0.8350)^2} = 2.15 \frac{\text{pies}}{\text{s}}$$

$$V_s = 0.66 \frac{\text{m}}{\text{s}} \text{ esta en el rango recomendado}$$

Reynolds:

$$Re_s = \frac{V_s D_s}{\nu} = \frac{2.15(0.8350)}{1.06 \times 10^{-5}} = 169363$$

Con:

$$\frac{\epsilon}{D_s} = \frac{0.00015}{0.8350} = 1.7964 \times 10^{-4}$$

$$f_s = 0.024$$

Por Darcy:

$$h_{f1-s} = \frac{8 f_s (L_s + L_{equis})}{g \pi^2 D_s^5} Q^2 = \frac{8(0.024)(60+60)(1.1772)^2}{(32.2)\pi^2 (0.8350)^5} = 0.25 \text{ pies}$$

Diámetro de la descarga:

$$\text{Usando la velocidad económica recomendada por Richter } V_d = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 6.56 \frac{\text{pies}}{\text{s}}$$

$$D = \sqrt{\frac{4Q}{\pi V_d}} = \sqrt{\frac{4(1.1772)}{\pi (6.56)}} = 0.4780 \text{ pies} \cong 5.74 \text{ in}$$

Se toma el diámetro comercial y se usa el diámetro interno:

$$D = 6 \text{ in} \Rightarrow D_d = D_{in} = 6.065 \text{ pulg} \cong 0.5054 \text{ pies}$$

Velocidad en la succión:

$$V_d = \frac{4Q}{\pi D_d^2} = \frac{4(1.1772)}{\pi (0.5054)^2} = 5.87 \frac{\text{pies}}{\text{s}}$$

$$V_d = 1.78 \frac{\text{m}}{\text{s}} \text{ esta en el rango recomendado}$$

Reynolds:

$$Re_d = \frac{V_d D_d}{\nu} = \frac{5.87(0.5054)}{1.06 \times 10^{-5}} = 279877$$

Con:

$$\frac{\varepsilon}{D_d} = \frac{0.00015}{0.5054} = 2.97 \times 10^{-4}$$

$$f_d = 0.017$$

Por Darcy:

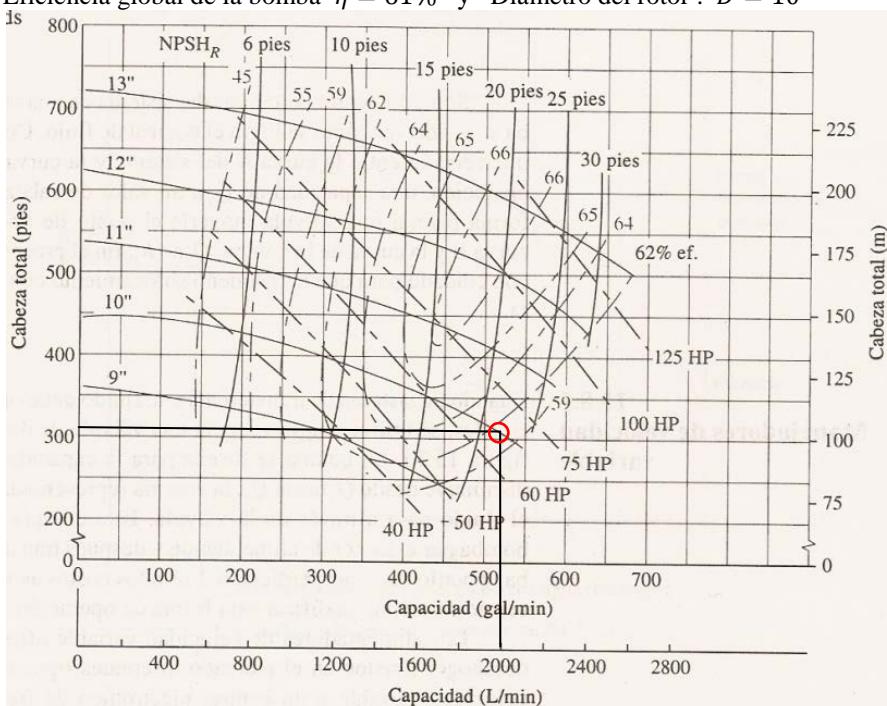
$$h_f d_{-2} = \frac{8 f_d (L_d + L_{equi_d})}{g \pi^2 D_d^5} Q^2 = \frac{8(0.017)(300 + 150)(1.1772)^2}{(32.2)\pi^2 (0.5054)^5} = 8.09 \text{ pies}$$

Por lo tanto:

$$H_B = 0.25 + 8.09 + 300 = 308.34 \text{ pies}$$

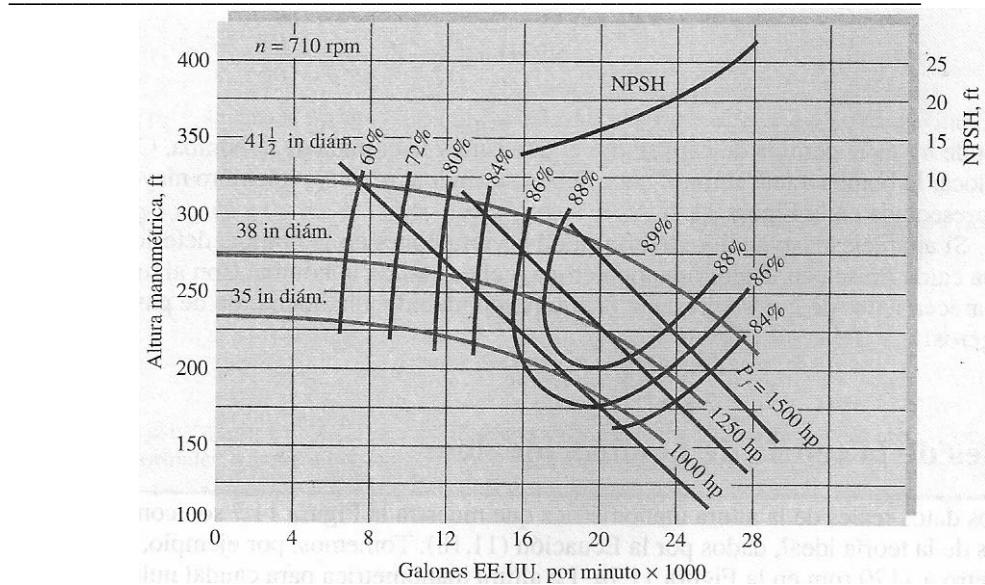
Con la tabla y los valores de $H_B = 308.34 \text{ pies}$ y $Q = 2000 \text{ L/min}$ se obtienen los valores de:

Eficiencia global de la bomba $\eta = 61\%$ y Diámetro del rotor : $D = 10"$



Ejemplo 3.16

Usando el diagrama de concha anexo, se va a trabajar con la bomba de mayor diámetro. Esta bomba debe proporcionar una altura de bombeo de 300 pies según los requerimientos de potencia hidráulica. En este sistema de bombeo el tanque de succión está abierto a la atmósfera estándar y el de descarga esta a 1 atm por encima de la presión atmosférica local estándar. Las tuberías de succión y descarga tienen una longitud mínima de 20 y 330 pies respectivamente, incluyendo las longitudes equivalentes de pérdidas secundarias, ambas tuberías son de acero comercial con una rugosidad igual a 0.00015 pies. Calcule la máxima diferencia de cota entre los tanques de aspiración y descarga y la potencia mecánica de la bomba. Calcule la posición o altura de la bomba respecto a la superficie libre del tanque de aspiración (¿en carga o aspiración?) para evitar cavitación. Si ésta bomba se toma como modelo ¿Qué altura de bombeo, caudal y potencia mecánica se obtiene de un prototipo más grande con $\lambda = 2$ cuando tiene un régimen de revoluciones de 1250 RPM? Si se modifican las RPM de la bomba modelo para bombear 20000 gpm ¿Qué rpm, altura y potencia mecánica manejaría la bomba?



Datos:

Aqua a 68°F

Diámetro del rotor de la bomba $D = 41.5 \text{ pulg}$

$H_B = 300 \text{ pies}$

$P_2 = 1 \text{ atm} = 2116.8 \frac{\text{lbf}}{\text{pie}^2}$ Presión relativa

Succión:

$$L_s + \sum L_{equis} = 20 \text{ pies}$$

Descarga

$$L_d + \sum L_{equid} = 330 \text{ pies}$$

Tuberías de acero comercial $\varepsilon = 0.00015 \text{ pies}$

$\Delta z = ?$ y $h = ?$ Carga o aspiración?

Similitud:

Modelo	Prototipo
$\lambda = 2$	
$H_{Bm} = 300 \text{ pies}$	$H_{Bp} = ?$
Q_m	$Q_p = ?$
\dot{W}_{mecm}	$\dot{W}_{mecp} = ?$
N_m	$N_p = 1250 \text{ RPM}$

Parámetros simplificados:

Parámetros de funcionamiento (1)	Parámetros de funcionamiento (2)
Q_1	$Q_2 = 20000 \text{ gpm}$
N_1	$N_2 = ?$
$H_{B1} = 300 \text{ pies}$	$H_{B2} = ?$
\dot{W}_{mec1}	$\dot{W}_{mec2} = ?$

Del diagrama de concha se obtienen datos adicionales de la bomba:

$$\eta = 86\%$$

$$Q = 16000 \text{ gpm} \times \frac{0.002228 \frac{\text{pie}^3}{\text{s}}}{1 \text{ gpm}} = 35.65 \frac{\text{pie}^3}{\text{s}}$$

$$NPSH_r = 13 \text{ pies}$$

Aplicando Bernoulli desde la superficie libre del tanque de aspiración, hasta la superficie libre del tanque de descarga se tiene:

$$z_1 + H_B - h_{f1-2} = \frac{P_2}{\gamma} + z_2$$

$$\Delta z = H_B - h_{f1-2} - \frac{P_2}{\gamma}$$

Pérdidas de 1 a 2:

$$h_{f1-2} = h_{f1-s} + h_{fd-2}$$

$$h_{f1-s} = \frac{8f_s(L_s + \sum L_{equis})}{g\pi^2 D_s^5} Q^2$$

$$h_{fd-2} = \frac{8f_d(L_d + \sum L_{equid})}{g\pi^2 D_d^5} Q^2$$

Los diámetros de las tuberías se pueden obtener usando las velocidades económicas de Richter:
Diámetro de la succión:

Usando la velocidad económica recomendada por Richter $V_s = 1 \frac{m}{s} = 3.28 \frac{\text{pies}}{s}$

$$D = \sqrt{\frac{4Q}{\pi V_s}} = \sqrt{\frac{4(35.65)}{\pi (3.28)}} = 3.72 \text{ pies} \cong 44.64 \text{ pulg}$$

Se toma el diámetro comercial y se usa el diámetro interno:

$D = 48 \text{ pulg. Se supone diámetro nominal igual al diámetro interior}$

$$D_s = DN = Din = 4 \text{ pies}$$

Velocidad en la succión:

$$V_s = \frac{4Q}{\pi D_s^2} = \frac{4(35.65)}{\pi (4)^2} = 2.83 \frac{\text{pies}}{s}$$

$$V_s = 0.86 \frac{m}{s} \text{ esta en el rango recomendado}$$

Reynolds:

$$Re_s = \frac{V_s D_s}{v} = \frac{2.83 \times 4}{1.61 \times 10^{-4}} = 70311$$

Con:

$$\frac{\epsilon}{D_s} = \frac{0.00015}{4} = 3.75 \times 10^{-5}$$

$$f_s = 0.019$$

Por Darcy:

$$h_{f1-s} = \frac{8f_s(L_s + L_{equis})}{g\pi^2 D_s^5} Q^2 = \frac{8(0.02)(20)(35.65)^2}{(32.2)\pi^2 (4)^5} = 0.01 \text{ pies}$$

Diámetro de la descarga:

Usando la velocidad económica recomendada por Richter $V_d = 2 \frac{m}{s} = 6.56 \frac{\text{pies}}{s}$

$$D = \sqrt{\frac{4Q}{\pi V_d}} = \sqrt{\frac{4(35.65)}{\pi (6.56)}} = 2.63 \text{ pies} \cong 31.57 \text{ pulg.}$$

Se toma el diámetro comercial:

$D = 32 \text{ pulg. Se supone diámetro nominal igual al diámetro interior}$

$$D_s = DN = Din = 2.67 \text{ pies}$$

Velocidad en la succión:

$$V_d = \frac{4Q}{\pi D_d^2} = \frac{4(35.65)}{\pi (2.67)^2} = 6.36 \frac{\text{pies}}{s}$$

$$V_d = 1.94 \frac{m}{s} \text{ esta en el rango recomendado}$$

Reynolds:

$$Re_d = \frac{V_d D_d}{v} = \frac{6.36(2.67)}{1.61 \times 10^{-4}} = 105473$$

Con:

$$\frac{\epsilon}{D_d} = \frac{0.00015}{2.67} = 5.62 \times 10^{-5}$$

$$f_d = 0.018$$

Por Darcy:

$$h_{fd-2} = \frac{8f_d(L_d + L_{equid})}{g\pi^2 D_d^5} Q^2 = \frac{8(0.018)(330)(35.65)^2}{(32.2)\pi^2 (2.67)^5} = 1.40 \text{ pies}$$

Diferencia de cota:

$$\Delta z = 300 - (0.01 + 1.40) - \frac{2116.8}{62.4} = 264.67 \text{ pies}$$

Potencia Mecánica:

$$\dot{W}_{mec} = \gamma Q H_B = \frac{62.4 \times 35.65 \times 300}{0.86} = 776009.3 \frac{\text{lbf x pie}}{\text{s}} = 1411 \text{ HP}$$

$$h = ?$$

$$NPSH_d = 1.2 NPSH_r = 1.2 \times 13 = 15.6 \text{ pies}$$

$$NPSH_d = H + Ha - Hv$$

$$H = NPSH_d - Ha + Hv$$

$$Pv = 48.9 \frac{\text{lbf}}{\text{pie}^2}$$

$$H = 15.6 - \frac{2116.8}{62.4} + \frac{48.9}{62.4} = -17.54 \text{ pies}$$

Suponiendo que la bomba esta en aspiración:

Aplicando Bernoulli entre 1-s

$$-h - h_{f1-s} = H$$

$$h = -H - h_{f1-s} = -(-17.54) - 0.01$$

$$h = 17.53 \text{ pies}$$

La bomba se puede colocar en aspiración a una altura de 17.53 pies por arriba de la superficie libre del tanque de succión.

Solución del problema con similitud:

Se puede completar la tabla de datos del modelo según lo anterior:

Similitud:

Modelo	Prototipo
$\lambda = 2$	
$H_{Bm} = 300 \text{ pies}$	$H_{Bp} = ?$
$Q_m = 35.65 \frac{\text{pie}^3}{\text{s}}$	$Q_p = ?$
$\dot{W}_{mecm} = 776009.3 \frac{\text{lbf x pie}}{\text{s}}$	$\dot{W}_{mecp} = ?$
$N_m = 710 \text{ RPM}$	$N_p = 1250 \text{ RPM}$

Para la altura del prototipo se igualan los coeficientes de altura del modelo y prototipo:

$$\psi_p = \psi_m$$

$$\frac{H_{Bp}}{N_p^2 D_p^2} = \frac{H_{Bm}}{N_m^2 D_m^2}$$

$$H_{Bp} = H_{Bm} \left(\frac{N_p}{N_m} \right)^2 \lambda^2 = 300 \left(\frac{1250}{710} \right)^2 2^2$$

$$H_{Bp} = 3719.5 \text{ pies}$$

Igualando los coeficientes de caudal:

$$\phi_p = \phi_m$$

$$\frac{Q_p}{N_p D_p^3} = \frac{Q_m}{N_m D_m^3}$$

$$Q_p = Q_m \frac{N_p}{N_m} \lambda^3 = 35.65 \frac{1250}{710} 3^3$$

$$Q_p = 1694.63 \frac{\text{pie}^3}{\text{s}}$$

Igualando los coeficientes de potencia:

$$\dot{W}_{mecp} = \dot{W}_{mecm} \left(\frac{N_p}{N_m} \right)^3 \lambda^5 = 776009.3 \left(\frac{1250}{710} \right)^3 2^5$$

$$\dot{W}_{mecp} = 135510172.2 \frac{\text{lbf x pie}}{\text{s}} = 246382 \text{ HP}$$

Solución del problema con Parámetros simplificados:

Se completa la tabla con los parámetros de funcionamiento 1 conocidos:

Parámetros de Funcionamiento (1)	Parámetros de Funcionamiento (2)
$Q_1 = 16000 \text{ gpm}$	$Q_2 = 20000 \text{ gpm}$
$N_1 = 710 \text{ RPM}$	$N_2 = ?$
$H_{B1} = 300 \text{ pies}$	$H_{B2} = ?$
$\dot{W}_{mec1} = 776009.3 \frac{\text{lbf x pie}}{\text{s}}$	$\dot{W}_{mec2} = ?$

Igualando los coeficientes de caudal:

$$\frac{Q_2}{N_2} = \frac{Q_1}{N_1}$$

$$N_2 = N_1 \frac{Q_2}{Q_1} = 710 \frac{20000}{16000}$$

$$N_2 = 888 \text{ RPM}$$

Igualando los coeficientes de altura:

$$\frac{H_{B2}}{N_2^2} = \frac{H_{B1}}{N_1^2}$$

$$H_{B2} = H_{B1} \left(\frac{N_2}{N_1} \right)^2 = 300 \left(\frac{888}{710} \right)^2$$

$$H_{B2} = 469.30 \text{ pies}$$

Igualando los coeficientes de potencia:

$$\dot{W}_{mec2} = \dot{W}_{mec1} \left(\frac{N_2}{N_1} \right)^3 = 776009.3 \left(\frac{888}{710} \right)^3$$

$$\dot{W}_{mec2} = 1518206.3 \frac{\text{lbf x pie}}{\text{s}} = 2761 \text{ HP}$$

3.14 Efecto de escala en Turbomáquinas Hidráulicas.

La similitud geométrica no se obtiene exactamente entre modelo y prototipo debido a que es imposible copiar la rugosidad del material y los juegos entre rodete y carcasa.

Además, la similitud dinámica es muy difícil de satisfacer a través del número de Reynolds. En consecuencia, se ha demostrado que el rendimiento de la máquina aumenta con tamaño y altura. Si el prototipo es dos a tres veces mayor que el modelo, no es preciso corregir el rendimiento.

Para turbinas:

$$H < 150 \text{ m.}$$

$$\eta_P = 1 - (1 - \eta_m) \left(\frac{D_m}{D_P} \right)^{1/5} \quad (2.43)$$

$$H > 150 \text{ m.}$$

$$\eta_P = 1 - (1 - \eta_m) \left(\frac{D_m}{D_P} \right)^{1/5} \left(\frac{H_m}{H_P} \right)^{1/20} \quad (2.44)$$

Para cualquier tipo de turbomáquina hidráulica.

$$\eta_P = \eta_{mec} [1 - (1 - \eta_m / \eta_{mec}) 1 / \lambda^{0.314}] \quad (2.45)$$

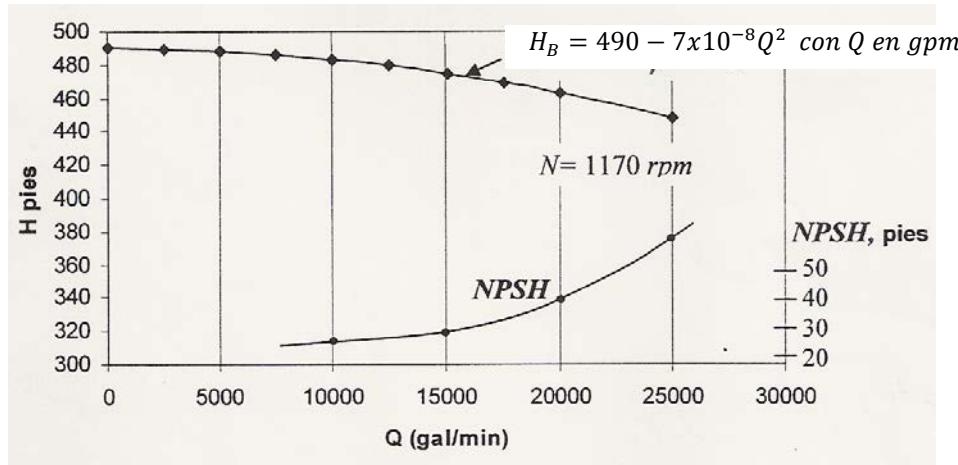
donde:

η_{mec} = Rendimiento mecánico que se supone igual para el modelo y prototipo y se puede usar $\eta_{mec} = 0.98$

λ = Razón de escala = D_P / D_m .

3.15 Problemas

3.1 Se tiene la curva experimental H_B vs Q de una bomba girando a 1170 RPM, se quiere obtener 3 puntos (H_B, Q) de la curva de funcionamiento de dicha bomba girando a 1750 RPM.



Si se construye una bomba dos veces más grande que la bomba de la figura cuando trabaja con 15000 gpm, ¿Qué caudal podría bombear esta bomba más grande cuando el régimen de revoluciones permanece constante?

Si la bomba de la figura se utiliza para bombear 20000 gpm de agua desde un depósito cuya superficie está a una presión de 14.7 psia y la tubería de succión es de acero comercial ($\varepsilon=0.00015$ pies) tiene 25 pies de longitud y 5 pies de longitud equivalente de accesorios. ¿A qué altura debe estar situada la entrada de la bomba respecto a la superficie libre del tanque de aspiración para evitar cavitación en agua a 60 °F? $P_v=0.26$ lbf/pulg², $DR=1$, $v = 1.08 \times 10^{-5} \frac{\text{pie}^2}{\text{s}}$.

3.2 Se tiene que escoger una bomba para impulsar $0.5 \text{ m}^3/\text{s}$ de agua a 20°C contra una altura de 80 m rotando a 1750 RPM.

- Determinar el tipo de bomba, la máxima eficiencia que podría esperarse y el diámetro aproximado de la misma.
- El sistema de bombeo en el que funcionará la bomba deberá vencer en el tanque de descarga una presión de 50 KPa medida con un manómetro. La tubería de succión tendrá una longitud total de 50 m y la tubería de descarga 500 m, ambas de acero comercial ($e=0.046$ mm). Las pérdidas secundarias se calculan con el método de longitud equivalente. La longitud equivalente para las pérdidas locales de la succión se estiman en un 20% de la longitud total de tubería principal y en la descarga en un 50% de la longitud total de tubería de descarga. Calcular la máxima diferencia de cota que puede vencer la bomba.
- Calcular la altura h donde debe ubicarse la bomba respecto a la superficie libre del tanque de aspiración para evitar. Suponga un factor de seguridad del 20%.
- Si se quiere que la bomba maneje una altura igual a 100 m, calcule el régimen de revoluciones y el caudal que podría bombearse en estas condiciones.

3.3 Un manómetro colocado a 1.5 m por encima del eje de una bomba marca una presión de vacío de 12 pulgadas de mercurio. Si la bomba maneja 4000 gpm de agua, el diámetro de la tubería de succión es de 10 pulg y la longitud de tubería entre el manómetro y la brida de succión es de 3 m. Calcular: a) El NPSH en la brida de succión, considere que las pérdidas por accesorios son del 20% de las pérdidas de carga de la tubería recta, que el coeficiente de fricción es de 0.025, que la presión atmosférica del lugar es de 90 KPa y que la presión de vapor del agua en las condiciones de trabajo es de 4 KPa. b) Si la bomba gira a 3600 RPM, ¿cree Ud. que la bomba Cavite?, justifique su respuesta. c) Si a esta bomba se le están suministrando 200 KW de potencia y tiene una eficiencia global de 0.75, que presión marcará un manómetro colocado en la brida de descarga.

3.4 Una bomba mueve benceno a 25°C ($DR=0.876$) de un tanque cuyo nivel está a 2.6 m arriba de la entrada de la bomba. La línea de succión tiene una pérdida de carga de 0.8 N.m/N. La presión atmosférica que se mide es de

98.5 KPa (abs). La presión de vapor del benceno es de **13.3 KPa**. Encuentre la NPSH disponible. Si esta bomba impulsa un caudal de 150 l/s contra una altura de 26 m a una velocidad de 1200 RPM. ¿Cavitará la bomba?

Si la bomba se hace girar a 3250 RPM ocurrirá Cavitación?

¿Qué caudal debe manejar la bomba si gira a 3250 RPM para evitar problemas?

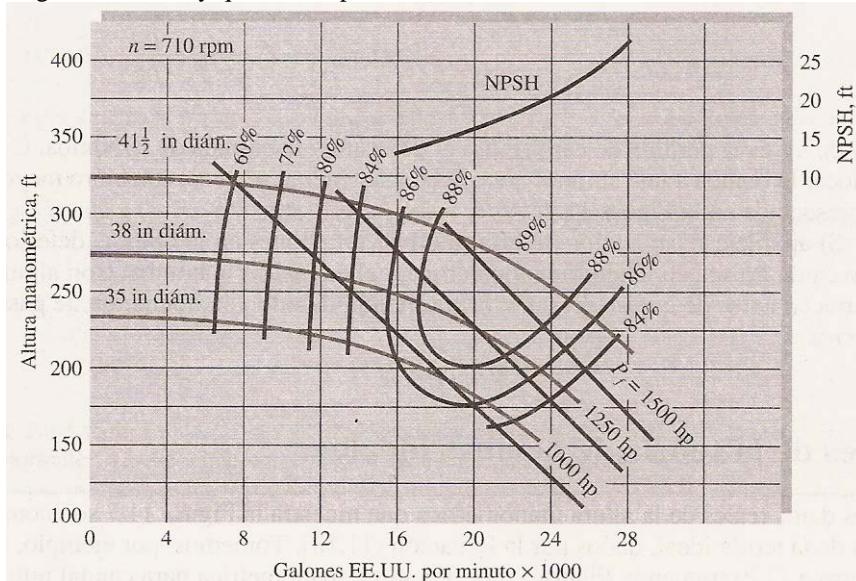
La bomba anterior girando a 1200 RPM se toma como modelo para diseñar una bomba más grande geométricamente similar y que impulse 1.5 m³/s de **agua de mar** a 25°C (**DR=1.030, Pv=2.40 KPa**) en un lugar a **presión normal de 100 KPa** y contra una altura de 100 m. El rodete de esta bomba más grande va a ser colocado 3 m abajo del nivel del tanque de succión. **Estime la velocidad máxima de rotación.** Las pérdidas de carga en la tubería de succión se pueden suponer iguales a un 20% de la diferencia de altura entre el rodete y el nivel de líquido en el tanque de aspiración.

Estime el diámetro del rotor, la potencia mecánica y la velocidad en la tubería de descarga de la bomba modelo girando a 1200 RPM?

3.5 Estimar la máxima la máxima velocidad de rotación de una bomba cuyo eje se encuentra 2 metros por debajo del nivel del líquido en el tanque de succión y se encuentra instalada en la estación más elevada del teleférico a una presión de 57.75 KPa y se utiliza para bombeo agua de calefacción a 40°C y un caudal de 0.125 m³/s.

Si se compra una bomba cuya velocidad de rotación es 3600 RPM., estimar la máxima diferencia de cota entre el eje de dicha bomba y el nivel de succión.

3.6 Se tiene que bombeo agua que tiene una viscosidad cinemática 1.0872×10^{-5} pie²/s y presión de vapor $P_v = 48.87 \text{ lbf/pie}^2$. Se quiere utilizar la bomba que se muestra en la figura anexa, utilizando específicamente la bomba de 38 pulgadas de diámetro de rotor en el punto de máxima eficiencia. Si en este sistema de bombeo ambos tanques (succión y descarga) están abiertos a la atmósfera estándar y las tuberías de succión y descarga tienen una longitud máxima de 25 y 200 pies respectivamente, ambas de acero comercial con una rugosidad igual a 0.00015 pies. Calcule la máxima diferencia de cota que puede vencer el sistema así como la posición o altura de la bomba respecto a la superficie libre del tanque de aspiración (¿en carga o aspiración?) para evitar cavitación. Desprecie las perdidas secundarias. ¿Qué altura de bombeo y caudal se podrían obtener de ésta bomba si se hace girar a 1750 RPM? En el caso de que se necesite bombeo venciendo una diferencia de cota de 300 pies, ¿A qué RPM se debe hacer girar la bomba y qué caudal podría bombear?



Curva característica, carcasa básica con tres tamaños de rotor, Cortesía de Ingersoll-Rand Corporation, Cameron Pump Division.

3.7 Se quiere trabajar con la bomba de 32 pulg de diámetro girando a 1170 RPM en las condiciones de diseño. El sistema de bombeo en el que va a trabajar esta bomba, tendrá las siguientes características:

Succión:

Longitud total de tramos recto: 80 pies

Un codo estándar ($Leq/D=30$)

Descarga:

Longitud total de tramo recto: 300 pies

Dos codos estándar ($Leq/D=30$ c/u)

Una válvula de compuerta ($Leq/D=8$)

Tanto la succión como la descarga tienen tuberías de acero comercial $e=0.00015$ pies.

Propiedades del Fluido:

Agua de mar

$\rho=2 \text{ slug/pie}^3$.

$v=1.08 \times 10^{-5} \text{ pie}^2/\text{s}$

-Calcule la máxima diferencia de cota que podría vencer el sistema $\Delta Z=?$

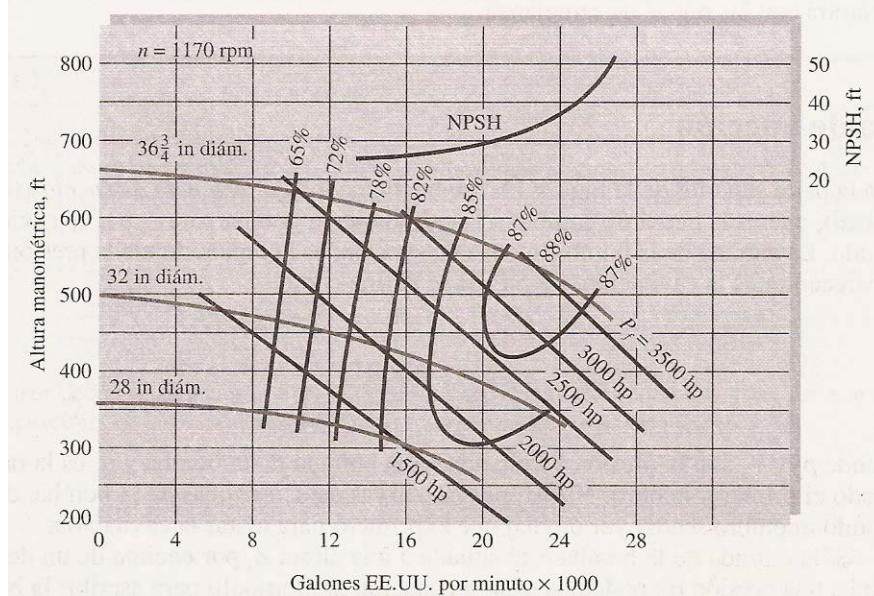
-Calcule la diferencia de altura que podría utilizarse para colocar la bomba respecto a la superficie libre del tanque de aspiración $h=?$ para que no ocurra cavitación.

-Calcule la potencia mecánica de la bomba.

-Obtenga 3 puntos (H .vs. Q) de la curva de esta bomba cuando se hace girar a 1750 RPM. ¿Qué caudal y altura nos daría en condiciones equivalentes a las de diseño a esta nueva RPM?

-Si se construye una bomba exactamente igual a la bomba considerada de 32 pulg, en el punto de diseño, pero con un diámetro mayor igual a 45 pulg. Y se hace girar a la misma RPM (1170 RPM). ¿Qué caudal, altura y potencia mecánica nos daría esta bomba más grande?

FC: $1\text{pie}^3=7.48 \text{ gal}$



3.8 Se muestran curvas de funcionamiento típicas para una bomba centrífuga girando a 1775 RPM, probada con tres diferentes diámetros de impulsor en una sola carcasa.

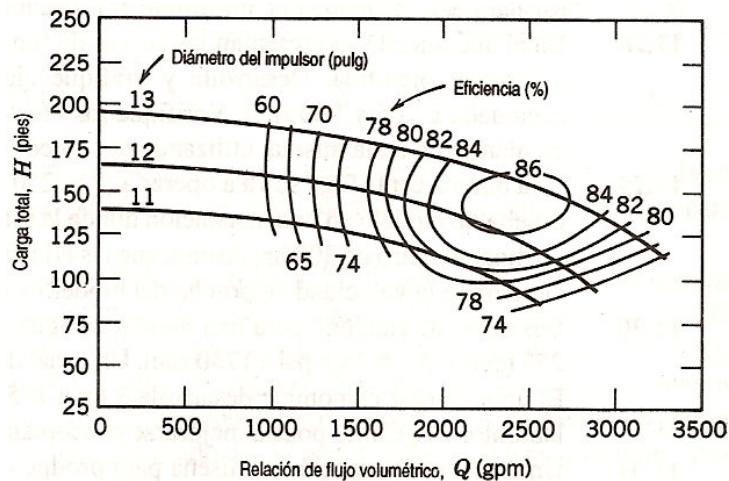
Especifique el caudal y la altura producida por la bomba en su punto de máxima eficiencia con un impulsor de 12 pulg de diámetro. Escale estos datos para predecir el funcionamiento de esta bomba cuando se prueba con un impulsor de tamaño 35% menor, girando a la misma RPM.

Si la bomba de 12 pulg se hace funcionar a 3250 RPM, qué caudal y altura proporcionaría si se quiere que trabaje con la mayor eficiencia.

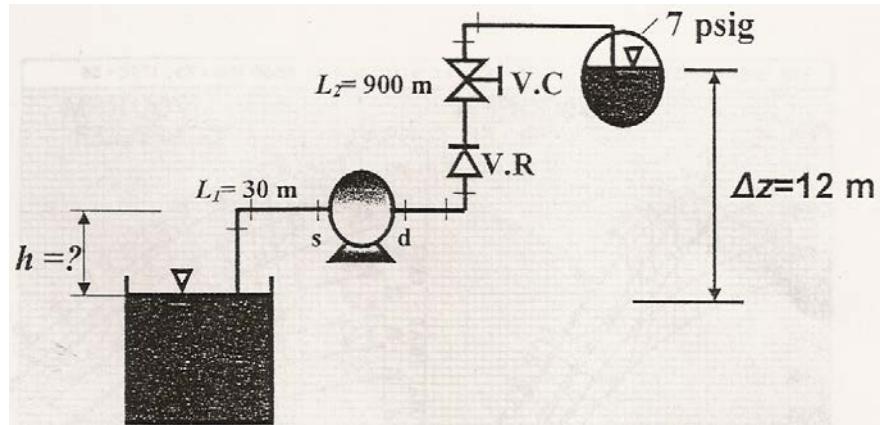
Si la bomba de 12 pulg se instala en un sistema de bombeo que tiene una tubería de succión con longitud total de 25 m, incluyendo la longitud equivalente de pérdidas localizadas, estimar diferencia de altura (h) entre la superficie libre del tanque de aspiración y el eje de la bomba para que se inicie la cavitación. Considere un factor de seguridad del 30% y estime el valor de h con el cual se evitaría la cavitación. ¿Se debe poner la bomba en carga o aspiración?

Calcule la potencia mecánica de la bomba.

Considere agua a $68^{\circ}F$ $\rho=1.94 \text{ slug/pie}^3$, $\mu=2.09 \times 10^{-5} \text{ slug.pie/s}$, $P_v=48.80 \text{ lbf/pie}^2$.(presión absoluta) $P_{atm}=14.7 \text{ psia}$.



3.9 Se debe seleccionar una bomba de los diagramas de concha que se muestran, para trabajar en el sistema de bombeo que se muestra a continuación:



Donde:

L_1 = longitud de la tubería de succión

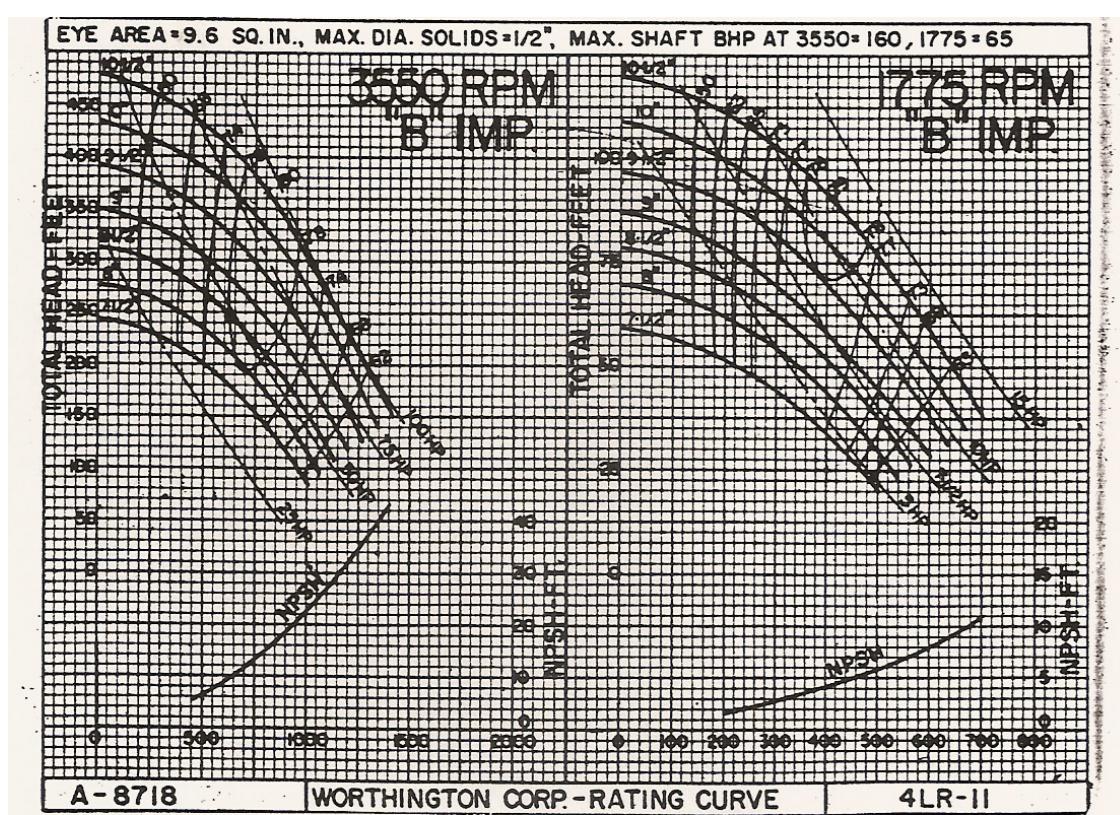
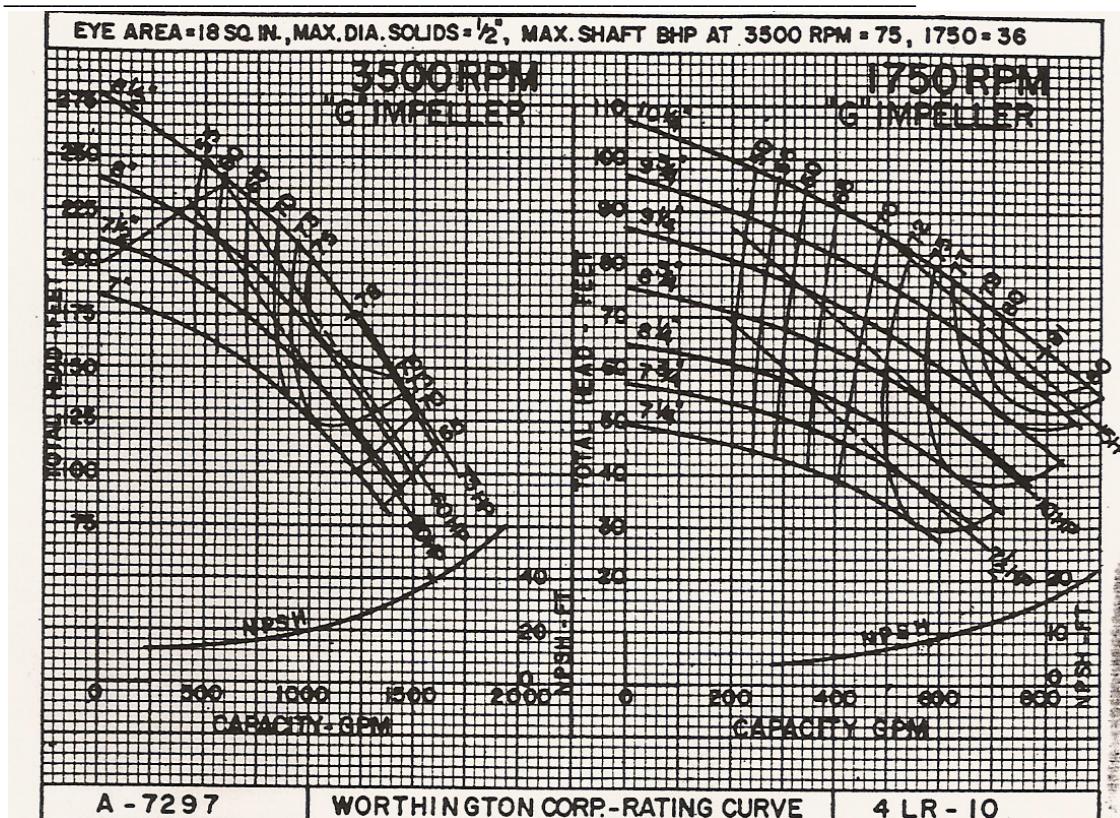
L_2 = longitud de la tubería de descarga

V.C= válvula de compuerta $\frac{L_{eq}}{D} = 8$

V.R= válvula de retención de disco $\frac{L_{eq}}{D} = 55$

Codo estándar $\frac{L_{eq}}{D} = 30$

El sistema debe manejar 360 gpm de agua a una temperatura promedio de 20°C . Las tuberías son de acero comercial ($e=0.05 \text{ mm}$). El sistema de bombeo debe ser diseñado para las pérdidas en la tubería de descarga no sobrepasen los 10 m de columna de agua. Calcule la altura h de la succión si el sistema va a funcionar a una altura de 1000 msnm . La potencia de accionamiento y la velocidad de rotación también son datos necesarios para la selección del motor.



3.10 Se necesita comprar una bomba para la estación de bombeo de El Anís, la cota geodésica es de 75 m, asuma que las pérdidas de carga son del 10% de la longitud de la tubería. Entre la estación y el tanque de llenado hay 200 m. Se requiere un caudal de 30 lts/s. Si se utiliza una bomba que gira a 3600 RPM, estime la potencia que consume dicha bomba y el tipo de bomba que se puede utilizar.

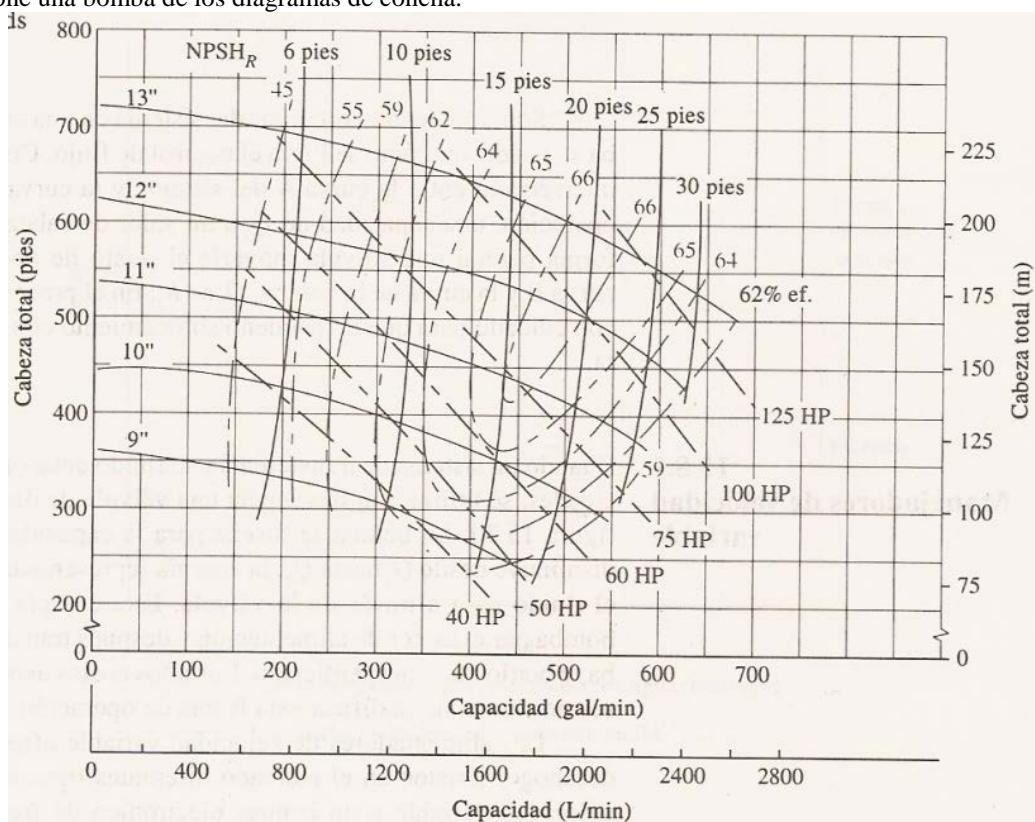
3.11 Se requiere una bomba de la que se conocen los siguientes parámetros:

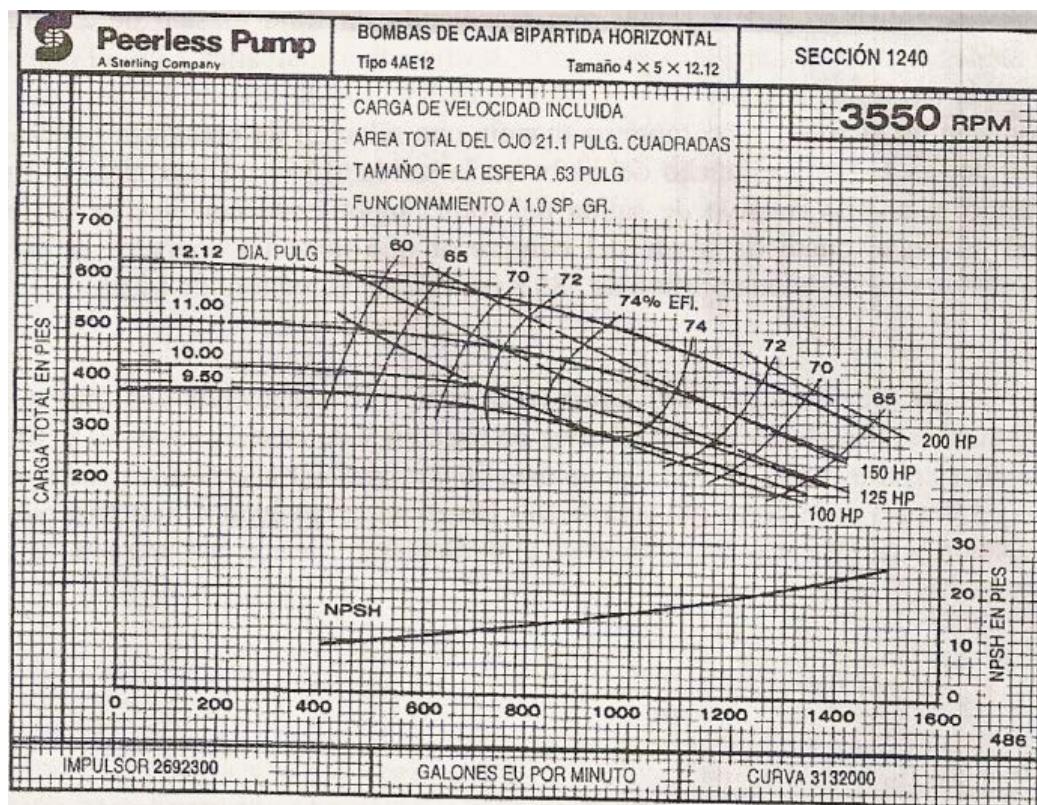
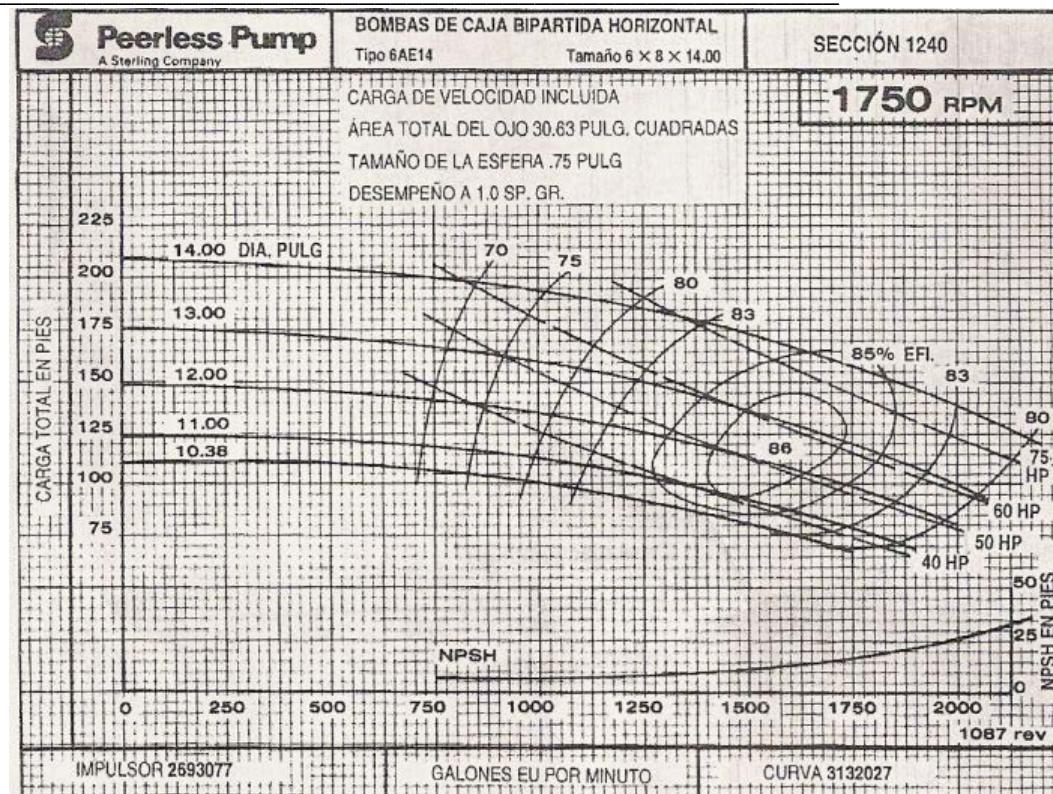
$$Q = 3.5 \frac{\text{pie}^3}{\text{s}}, H_B = 300 \text{ pies}, N = 1750 \text{ RPM}, v = 10^{-6} \frac{\text{pie}^2}{\text{s}}, \rho = 1.9 \frac{\text{slug}}{\text{pie}^3}$$

Se necesita construir un modelo dinámicamente similar, para esto se dispone de un caudal de 1 pie³/s y un motor que da una potencia de 5500 lbf-pie/s (10 HP). El rendimiento mecánico tanto del modelo como del prototipo se puede estimar en 98 %. Se debe determinar:

- a) Tipo de bomba, b) RPM del modelo, c) Diámetro del rotor del modelo, d) Si se quiere que la bomba prototipo trabaje libre de cavitación en Mérida ($P_{atm}=85 \text{ KPa}$), calcule la altura h del eje de la bomba respecto a la superficie libre del tanque de aspiración y suponga un factor de seguridad del 20%. La tubería de succión es de acero comercial ($e=0.00015 \text{ pies}$), tiene una longitud total de 100 pies y un codo 90° ($L_{eq}=25 \text{ pies}$). La presión de saturación del fluido de trabajo es $P_v=73 \text{ lbf/pie}^2$.

3.12 Se necesita impulsar un caudal de 2000 l/min de agua a 20°C venciendo una diferencia de altura de 300 pies, longitudes de las tuberías de succión y descarga son 60 y 300 pies respectivamente, se estiman perdidas longitudinales equivalentes de pérdidas por accesorios de 60 pies en la succión y 150 pies en la descarga. Las tuberías tienen una rugosidad de 0.00015 pies. Los tanques de succión y descarga están abiertos a la atmósfera. Seleccione una bomba de los diagramas de concha.





Capítulo 4

Análisis Dimensional de Turbomáquinas Térmicas

- 4.1. Introducción.
- 4.2. Teorema PI o teorema de Buckingham.
- 4.3. Aplicación del Teorema PI a Turbomáquinas Hidráulicas Generadoras. (Bombas y Ventiladores).
- 4.4. Curvas de funcionamiento de compresores.
- 4.5. Uso de los parámetros adimensionales del compresor
 - 4.5.1. Similitud.
 - 4.5.2. Parámetros simplificados.
- 4.6. Diagramas de Equilibrio
 - 4.6.1 Parámetros simplificados.
 - 4.6.2 Similitud.
- 4.7. Velocidad específica ns, Ns .
- 4.8. Diámetro específico ds, Ds .
- 4.9 Aplicación del teorema PI a turbomáquinas térmicas motoras (turbinas)
 - 4.9.1 Curvas de funcionamiento para turbinas térmicas
- 4.10 Velocidad específica ns, Ns y diámetro específico ds, Ds .
- 4.11 Mapas de Equilibrio
- 4.12. Problemas.

Capítulo 4
Análisis Dimensional de Turbomáquinas Térmicas

4.1 Introducción

Como en el caso de la turbomáquinas hidráulicas, el análisis dimensional constituye uno de los métodos de análisis del flujo compresible de fluidos a través de dispositivos como las turbomáquinas térmicas. El estudio de este tipo de turbomáquinas ha dependido de métodos analíticos y la información experimental. El análisis dimensional permitirá obtener la mayor información posible de los experimentos así como ayuda en la correlación de datos y presentación de resultados. La prueba de modelos en el laboratorio es una manera factible para predecir el comportamiento del prototipo de tamaño natural, a partir de las mediciones en el modelo. Obviamente el modelo y el prototipo deben correlacionarse mediante las leyes de escalamiento establecidas. Se estudiará las condiciones necesarias para obtener la similitud entre modelos y prototipos de turbomáquinas térmicas así como en el caso de la determinación de nuevas condiciones de operación aplicables a una misma máquina.

4.2 Teorema PI o teorema de Buckingham.

Este teorema constituye el procedimiento formal para desarrollar los parámetros adimensionales, los pasos descritos en el capítulo 3 describen el procedimiento recomendado.

4.3 Aplicación del Teorema PI a Turbomáquinas Térmicas Generadoras (Compresores).

a) Variables relativas a la máquina

\dot{m} = Flujo mísico de gas a través del compresor (sustituye a Q).

Δh_{os} = Incremento isentrópico de entalpia total o de estancamiento que sufre el gas a través del compresor (Sustituye a gH).

D = Diámetro del rodete del compresor.

N = RPM.

\dot{W}_{mec} = Potencia mecánica en el eje.

η = Eficiencia total del compresor.

a) Variables relativas al fluido.

ρ_{01} = Densidad del gas evaluada con las condiciones totales o de estancamiento a la entrada del compresor.

μ = Viscosidad Absoluta del gas.

a_{01} = Velocidad del sonido evaluada con las condiciones totales o de estancamiento a la entrada del compresor.

k = Relación de calores específicos del gas.

$$f(\dot{m}, \Delta h_{os}, N, D, \dot{W}_{mec}, \eta, \rho_{01}, \mu, a_{01}, k) = 0, \quad n = 10$$

Variables dependientes:

$\Delta h_{os}, \eta, \dot{W}_{mec}$

Variables independientes: $\dot{m}, N, D, \rho_{01}, \mu, a_{01}, k$

Relación funcional dimensional:

$$\Delta h_{os}, \eta, \dot{W}_{mec} = f(\dot{m}, N, D, \rho_{01}, \mu, a_{01}, k)$$

Números adimensionales resultantes:

Coeficiente de gasto o de flujo:

$$\phi = \frac{\dot{m}}{\rho_{01} N D^3} \quad (4.1)$$

Coeficiente de altura:

$$\psi = \frac{\Delta h_{os}}{N^2 D^2} \quad (4.2)$$

Coeficiente de potencia:

$$\hat{P} = \left[\frac{\dot{W}_{mec}}{\rho_{01} N^3 D^5} \right] \quad (4.3)$$

Número de Reynolds:

$$Re = \frac{\rho_{01} D^2 N}{\mu} \quad (4.4)$$

Eficiencia total del compresor,

$$\eta$$

Número de Mach de los álabes:

$$M = \frac{ND}{a_{01}} \quad (4.5)$$

Relación de calores específicos del gas:

$$k = \frac{C_p}{C_v} \quad (4.6)$$

Relación funcional adimensional:

$$\psi, \eta, \hat{P} = f(\phi, Re, M, k)$$

Alternativamente, el coeficiente de altura se puede escribir como:

$$\psi = \frac{\Delta h_{os}}{a_{01}^2} \quad (4.7)$$

Y el coeficiente de flujo como:

$$\phi = \frac{\dot{m}}{\rho_{01} a_{01} D^2} \quad (4.8)$$

Donde se ha usado el hecho que $\frac{ND}{a_{01}}$ es otro grupo adimensional.

Si el fluido de trabajo es un gas perfecto, se puede obtener un conjunto diferente de grupos adimensionales, los cuales son de más utilidad y fácilmente medibles en la experimentación.

El coeficiente de altura se puede modificar recordando que para un gas perfecto se tiene que:

$$\Delta h_{os} = C_P(T_{02s} - T_{01}) \quad (4.9)$$

donde el proceso de compresión se esquematiza en un diagrama $T-s$ en la figura 4.1.

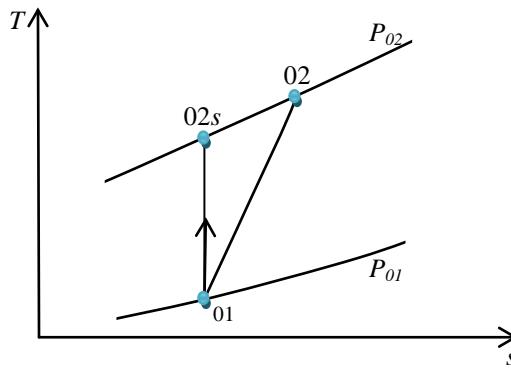


Figura 4.1. Diagrama $T-s$ de un proceso de compresión

Además, la relación isentrópica entre presiones y temperaturas para un gas es:

$$\frac{T_{02S}}{T_{01}} = \left(\frac{P_{02}}{P_{01}} \right)^{\frac{k-1}{k}} \quad (4.10)$$

Por lo tanto:

$$\Delta h_{os} = C_p T_{01} \left[\left(\frac{P_{02}}{P_{01}} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right] \quad (4.11)$$

También, $C_p = \frac{kR}{(k-1)}$ y $a_{01}^2 = kRT_{01}$. Entonces:

$$\frac{\Delta h_{os}}{a_{01}^2} = \left[\frac{\left(\frac{P_{02}}{P_{01}} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1}{k-1} \right] \quad (4.12)$$

Por lo tanto, $\frac{\Delta h_{os}}{a_{01}^2}$ es proporcional a $\left(\frac{P_{02}}{P_{01}} \right)$ y esta relación adimensional se puede usar como coeficiente de altura ya que es más fácil de medir.

El coeficiente de flujo se modifica sustituyendo la densidad por medio de la ecuación de los gases perfectos.

$$\frac{\dot{m}}{\rho_{01} a_{01} D^2} = \frac{\dot{m}}{\frac{P_{01}}{R T_{01}} \sqrt{kRT_{01}} D^2} = \frac{\dot{m} \sqrt{RT_{01}}}{P_{01} D^2 \sqrt{k}} \quad (4.13)$$

Si se elimina k no se afecta la adimensionalidad del grupo. Por lo tanto, el coeficiente de flujo modificado para un gas perfecto resulta en:

$$\frac{\dot{m} \sqrt{RT_{01}}}{P_{01} D^2} \quad (4.14)$$

El coeficiente de potencia se modifica al multiplicarlo por el inverso del coeficiente de flujo.

$$\left[\frac{\dot{W}_{mec}}{\rho_{01} N^3 D^5} \right] \frac{\rho_{01} N D^3}{\dot{m}} = \frac{\dot{W}_{mec}}{\dot{m} N^2 D^2} \quad (4.15)$$

Además, la eficiencia total del compresor se define como:

$$\eta_c = \frac{\dot{W}_{1-2s}}{\dot{W}_{mec}} \quad (4.16)$$

La potencia realmente requerida para comprimir entre P_{01} y P_{02} , en caso que no existan fugas de recirculación es:

$\dot{W}_{1-2} = \dot{m} C_p (T_{02} - T_{01}) = \dot{m} C_p (T_{02S} - T_{01}) / \eta_{0-0}$; Por lo que:

$$\dot{W}_{mec} = \frac{\dot{m} C_p (T_{02} - T_{01}) \eta_{0-0}}{\eta_c} = \frac{\dot{m} C_p (T_{02} - T_{01}) \eta_{0-0}}{\eta_{0-0} \eta_{mec}} \quad (4.17)$$

$$\hat{P} = \left[\frac{C_p \Delta T_0}{\eta_{mec} N^2 D^2} \right] \quad (4.18)$$

Además, $N^2 D^2 = M^2 a_{01}^2$ y usando las relaciones para C_p y a_{01} se tiene:

$$\hat{P} = \left[\frac{\frac{kR}{k-1} \Delta T_0}{\eta_{mec} M^2 k R T_{01}} \right] = \left[\frac{\Delta T_0}{\eta_{mec} M^2 (k-1) T_{01}} \right] \quad (4.19)$$

Si eliminan k , η_m y M no se altera la adimensionalidad del grupo. Por lo que:

$$\hat{P} = \left[\frac{\Delta T_0}{T_{01}} \right] \quad (4.20)$$

La relación funcional adimensional para un gas perfecto es entonces:

$$\frac{P_{02}}{P_{01}}, \eta, \left[\frac{\Delta T_0}{T_{01}} \right] = f \left(\frac{\dot{m} \sqrt{RT_{01}}}{P_{01} D^2}, \frac{ND}{\sqrt{RT_{01}}}, Re, k \right) \quad (4.21)$$

Para un compresor de un tamaño dado y manejando un solo tipo de gas, se puede eliminar K, R y D de la relación (4.21). El número de Reynolds también se puede eliminar si el compresor opera a un número Reynolds elevado, como generalmente es el caso, obteniéndose la siguiente relación funcional de parámetros simplificados:

$$\frac{P_{02}}{P_{01}}, \eta, \left[\frac{\Delta T_0}{T_{01}} \right] = f \left(\frac{\dot{m} \sqrt{T_{01}}}{P_{01}}, \frac{N}{\sqrt{T_{01}}} \right) \quad (4.22)$$

4.4 Curvas de funcionamiento para compresores.

Las curvas de funcionamiento para compresores se obtienen experimentalmente en un banco de pruebas como el que se muestra esquemáticamente en la Fig. 4.2. A menudo se experimenta sobre modelos debido al gran tamaño de los prototipos.

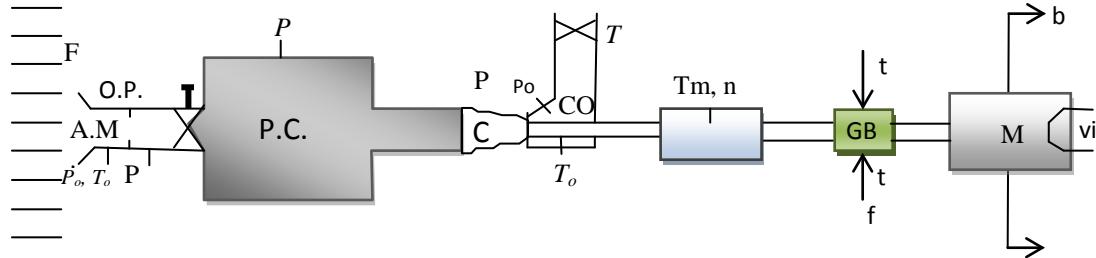


Figura 4.2 Esquema de un banco de pruebas para compresores

Accesorios de control de flujo.

F	= Filtros
O.P.	= Placa Orificio
C.O.	= Colector
T	= Válvula de estrangulamiento
G.B.	= Tren de engranajes

A.M.	= Medidor de flujo de aire
P.C.	= Plenum
C.	= Compresor
M.	= Motor

Instrumentación.

P	= Presión estática
T	= Temperatura estática
Tm	= Torquímetro
Tn	= Tacómetro
b	= Balanceador de Torque

P_o	= Presión total
T_o	= Temperatura total
vi	=Medidor de Potencia Eléctrica
f	= Medidor de aceite

La Fig. 4.3 representa un mapa de funcionamiento típico de un compresor. La relación de presión a través de la maquina se grafica en función del parámetro de flujo $\frac{\dot{m}\sqrt{T_{01}}}{P_{01}}$ para valores fijos del parámetro de velocidad de los álabes $\frac{N}{\sqrt{T_{01}}}$.

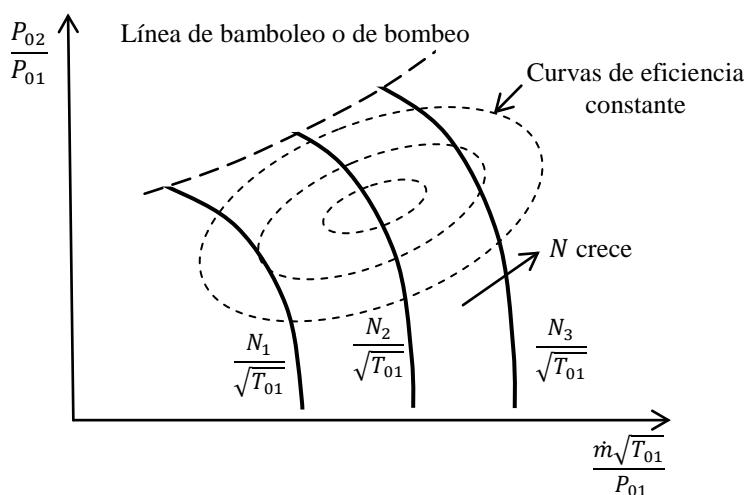


Figura 4.3. Mapa típico de funcionamiento de un compresor

El estrangulamiento del flujo másico, para valores fijos de N y T_{01} , causa que el punto de funcionamiento del compresor se mueva hacia la izquierda hasta alcanzar la línea de bamboleo o bombeo (SURGE). Bajo estas condiciones el compresor entra en una oscilación violenta de gran amplitud y baja frecuencia que puede causar daños severos a la máquina.

Por otra parte, si se aumenta el flujo másico a través de la máquina, el punto de funcionamiento se mueve hacia la derecha. Eventualmente, la curva característica se hace vertical, lo cual significa que el compresor está bloqueado (CHOQUE) y esto ocurre porque el número de Mach alcanza un valor igual a la unidad en los canales de flujo de la máquina.

En resumen, el campo de operación del compresor, en cuanto a flujo másico se refiere, se ve limitado por la izquierda con el fenómeno de bamboleo o bombeo (SURGE) y por la derecha con el fenómeno de bloqueo (CHOQUE).

4.5 Uso de los parámetros adimensionales del compresor

4.5.1 Similitud

Las ecuaciones 4.21:

$$\left[\frac{\dot{W}_{mec}}{\rho_{01} N^3 D^5} \right] \frac{\rho_{01} N D^3}{\dot{m}} = \frac{\dot{W}_{mec}}{\dot{m} N^2 D^2}$$

$$\frac{P_{02}}{P_{01}}, \eta, \left[\frac{\Delta T_0}{T_{01}} \right] = f \left(\frac{\dot{m} \sqrt{R T_{01}}}{P_{01} D^2}, \frac{N D}{\sqrt{R T_{01}}} \right), Re, k$$

Son los parámetros adimensionales de un compresor para establecer similitud entre modelos y prototipos, es decir, cuando la relación de escala es diferente de la unidad. Para lograr la similitud dinámica, los coeficientes de flujo, altura, velocidad y potencia del modelo y del prototipo deben tener la misma magnitud.

$$\frac{\dot{m}_m \sqrt{R_m T_{01m}}}{P_{01m} D_m^2} = \frac{\dot{m}_p \sqrt{R_p T_{01p}}}{P_{01p} D_p^2} \quad (4.23)$$

$$\frac{P_{02m}}{P_{01m}} = \frac{P_{02p}}{P_{01p}} \quad (4.24)$$

$$\frac{N_m D_m}{\sqrt{R_m T_{01m}}} = \frac{N_p D_p}{\sqrt{R_p T_{01p}}} \quad (4.25)$$

$$\frac{\dot{W}_{mecm}}{\dot{m}_m N_m^2 D_m^2} = \frac{\dot{W}_{mecp}}{\dot{m}_p N_p^2 D_p^2} \quad (4.26)$$

Cuando el modelo y el prototipo impulsan el mismo gas, entonces, $R_m = R_p$, pudiéndose simplificar las constantes del gas.

4.5.2 Parámetros simplificados:

Cuando los parámetros del compresor se aplican a la misma máquina ($\lambda = 1$), se puede simplificar los diámetros del rotor. De la misma forma, si el compresor mantiene su funcionamiento con el mismo gas, se pueden simplificar las propiedades del mismo. Esto implica una máquina que funciona con determinadas condiciones de funcionamiento (1) y se modifica o modifican ciertos parámetros, obteniéndose condiciones de funcionamiento (2). De esta forma, para obtener características de funcionamiento similares, se tiene:

$$\frac{\dot{m}_1 \sqrt{T_{011}}}{P_{011}} = \frac{\dot{m}_2 \sqrt{T_{012}}}{P_{012}} \quad (4.27)$$

$$\frac{P_{021}}{P_{011}} = \frac{P_{022}}{P_{012}} \quad (4.28)$$

$$\frac{N_1}{\sqrt{T_{011}}} = \frac{N_2}{\sqrt{T_{012}}} \quad (4.29)$$

$$\frac{\dot{W}_{mec1}}{\dot{m}_1 N_1^2} = \frac{\dot{W}_{mec2}}{\dot{m}_2 N_2^2} \quad (4.30)$$

Ejemplo 4.1.

Un compresor ha sido diseñado para condiciones atmosféricas normales (101.3 KPa y 15°C). Para economizar potencia, el compresor se prueba con una válvula estranguladora en el ducto de entrada que reduce la presión de entrada. La curva característica para la velocidad de diseño de 4000 RPM se está midiendo en un día cuando la temperatura ambiente es 20°C.

a) A qué velocidad de rotación debería ser probado el compresor?

b) En el punto de la curva característica al cual el flujo de masa de diseño es 58 Kg/s, la presión de entrada en el banco de pruebas es 55 KPa. Calcular el flujo de masa durante la prueba.

c) Se economiza potencia en la prueba ?

En este problema se deben utilizar los parámetros simplificados, ya que se requiere conocer las características de funcionamiento de un compresor (condiciones de funcionamiento 2), del cual se conocen parámetros de diseño (condiciones de funcionamiento 1).

a) $N_2 = ?$

Condiciones de funcionamiento (1) (Condiciones de diseño)	Condiciones de funcionamiento (2)
$P_{011} = 101.3 \text{ KPa}$	
$T_{011} = 15^\circ\text{C}$	$T_{012} = 20^\circ\text{C}$
$N_1 = 4000 \text{ RPM}$	$N_2 = ?$

$$\frac{N_1}{\sqrt{T_{011}}} = \frac{N_2}{\sqrt{T_{012}}}$$

$$N_2 = N_1 \sqrt{\frac{T_{012}}{T_{011}}} = 4000 \text{ rpm} \sqrt{\frac{(20 + 273)^\circ\text{K}}{(15 + 273)^\circ\text{K}}} = 4035 \text{ RPM}$$

b) $\dot{m}_2 = ?$

Condiciones de funcionamiento (1) Condiciones de funcionamiento (2)
(Condiciones de diseño)

$$\begin{array}{ll} P_{011} = 101.3 \text{ KPa} & P_{012} = 55 \text{ KPa} \\ T_{011} = 15^\circ\text{C} & T_{012} = 20^\circ\text{C} \\ N_1 = 4000 \text{ RPM} & N_2 = 4035 \text{ RPM} \\ \dot{m}_1 = 58 \text{ Kg/s} & \dot{m}_2 = ? \end{array}$$

$$\frac{\dot{m}_1 \sqrt{T_{011}}}{P_{011}} = \frac{\dot{m}_2 \sqrt{T_{012}}}{P_{012}}$$

$$\dot{m}_2 = \dot{m}_1 \sqrt{\frac{T_{011}}{T_{012}} \frac{P_{012}}{P_{011}}} = 58 \sqrt{\frac{288}{293} \frac{55}{101.3}} = 31.22 \text{ Kgm/s}$$

c) Se economiza potencia?

$$\frac{\dot{W}_{mec1}}{\dot{m}_1 N_1^2} = \frac{\dot{W}_{mec2}}{\dot{m}_2 N_2^2}$$

$$\dot{W}_{mec2} = \dot{W}_{mec1} \frac{\dot{m}_2}{\dot{m}_1} \left(\frac{N_2}{N_1} \right)^2 = \dot{W}_{mec1} \frac{31.22}{58.0} \left(\frac{4035}{4000} \right)^2 = \dot{W}_{mec1} 0.548$$

Si se economiza potencia

4.6 Mapas de Equilibrio.

Son mapas de funcionamiento referidos a las condiciones estándar de presión y temperatura. La Fig. 2.21 muestra un mapa de equilibrio para un compresor centrífugo. Los siguientes subíndices se usan en la preparación de estos mapas:

1 = Valores reales a la entrada

2 = Valores reales a la descarga.

s = Valores estándar

r = Valores reducidos o corregidos.

Cuando un compresor tiene condiciones estándar de presión y temperatura en la entrada, entonces $T_{01} = T_s$ y $P_{01} = P_s$. Con estas condiciones la presión de descarga, la velocidad de giro del compresor y el flujo másico impulsado por el mismo, son parámetros reducidos: P_r , N_r , \dot{m}_r .

Cuando un compresor tiene condiciones de presión y/o temperatura en la entrada, diferentes de las condiciones estándar, T_{01} y P_{01} , con estas condiciones la presión de descarga, la velocidad de giro del compresor y el flujo másico impulsado por el mismo, serían los parámetros reales de la descarga: P_{02} , N , \dot{m} .

4.6.1 Parámetros simplificados:

Usando los grupos adimensionales simplificados aplicados a un compresor trabajando con condiciones estándar en la entrada, según el mapa de equilibrio, se obtienen condiciones de funcionamiento similares al igualar los grupos adimensionales para obtener los valores los parámetros de funcionamiento reales del compresor, cuando éste funciona un día en el que se tienen condiciones diferentes de las estándar en la entrada:

$$\frac{P_{r1}}{P_{s1}} = \frac{P_{022}}{P_{012}} \Rightarrow P_{022} = P_{012} \frac{P_{r1}}{P_{s1}} \quad (4.31)$$

$$\frac{\dot{m}_{r1}\sqrt{T_{s1}}}{P_{s1}} = \frac{\dot{m}_2\sqrt{T_{012}}}{P_{012}} \Rightarrow \dot{m}_2 = \dot{m}_{r1} \sqrt{\frac{T_{s1}}{T_{012}}} \frac{P_{012}}{P_{s1}} \quad (4.32)$$

$$\frac{N_{r1}}{\sqrt{T_{s1}}} = \frac{N_2}{\sqrt{T_{012}}} \Rightarrow N_2 = N_{r1} \sqrt{\frac{T_{012}}{T_{s1}}} \quad (4.33)$$

Definiendo:

$$\theta = \frac{T_{01}}{T_s} \quad \text{y} \quad \delta = \frac{P_{01}}{P_s}; \quad \text{se tiene:}$$

$$P_{022} = P_{r1} \delta \quad (4.34)$$

$$\dot{m}_2 = \dot{m}_{r1} \frac{\delta}{\theta^{1/2}} \quad (4.35)$$

$$N_2 = N_{r1} \theta^{1/2} \quad (4.36)$$

Las condiciones estándar o condiciones de referencia son $P_s=14.7 \text{ psia}$ y $T_s=520^\circ\text{R}$. Las condiciones normales de la NASA son $P_s=2116 \text{ lbf/pie}^2$ y $T_s=518.7^\circ\text{R}$.

4.6.2 Similitud:

Usando los grupos adimensionales en el caso de un compresor (Modelo) trabajando con condiciones estándar en la entrada según el mapa de equilibrio, se obtienen condiciones de similitud al igualar los grupos adimensionales para obtener los valores de los parámetros de funcionamiento reales de un prototipo, cuando éste tiene condiciones diferentes de las estándar en la entrada. En este caso el modelo maneja parámetros reducidos y el prototipo parámetros reales.

$$\frac{P_{02p}}{P_{01p}} = \frac{P_{rm}}{P_{sm}} \Rightarrow P_{02p} = P_{rm} \frac{P_{01p}}{P_{sm}} \quad (4.37)$$

$$\frac{\dot{m}_p \sqrt{R_p T_{01p}}}{P_{01p} D_p^2} = \frac{\dot{m}_{rm} \sqrt{R_m T_{sm}}}{P_{sm} D_m^2} \Rightarrow \dot{m}_p = \dot{m}_{rm} \sqrt{\frac{R_m T_{sm}}{R_p T_{01p}}} \frac{P_{01p}}{P_{sm}} \lambda^2 \quad (4.38)$$

$$\frac{N_p D_p}{\sqrt{R_p T_{01p}}} = \frac{N_{rm} D_m}{\sqrt{R_m T_{sm}}} \Rightarrow N_p = N_{rm} \sqrt{\frac{R_p T_{01p}}{R_m T_{sm}}} \frac{1}{\lambda} \quad (4.39)$$

Usando las definiciones θ y δ :

$$P_{02p} = P_{rm} \delta \quad (4.40)$$

$$\dot{m}_p = \dot{m}_{rm} \sqrt{\frac{R_m}{R_p}} \frac{\delta}{\sqrt{\theta}} \lambda^2 \quad (4.41)$$

$$N_p = N_{rm} \sqrt{\frac{R_p}{R_m}} \sqrt{\theta} \frac{1}{\lambda} \quad (4.42)$$

En el caso de que el modelo y el prototipo trabajen con el mismo gas, las constantes del gas R , se pueden simplificar. Si tanto el modelo como el prototipo tienen condiciones estándar en la entrada, en este caso $\delta = 1$ y $\theta = 1$, pudiéndose simplificar aun más las ecuaciones. Así, se tiene:

$$P_{rp} = P_{rm} \quad (4.43)$$

$$\dot{m}_{rp} = \dot{m}_{rm} \lambda^2 \quad (4.44)$$

$$N_{rp} = N_{rm} \frac{1}{\lambda} \quad (4.45)$$

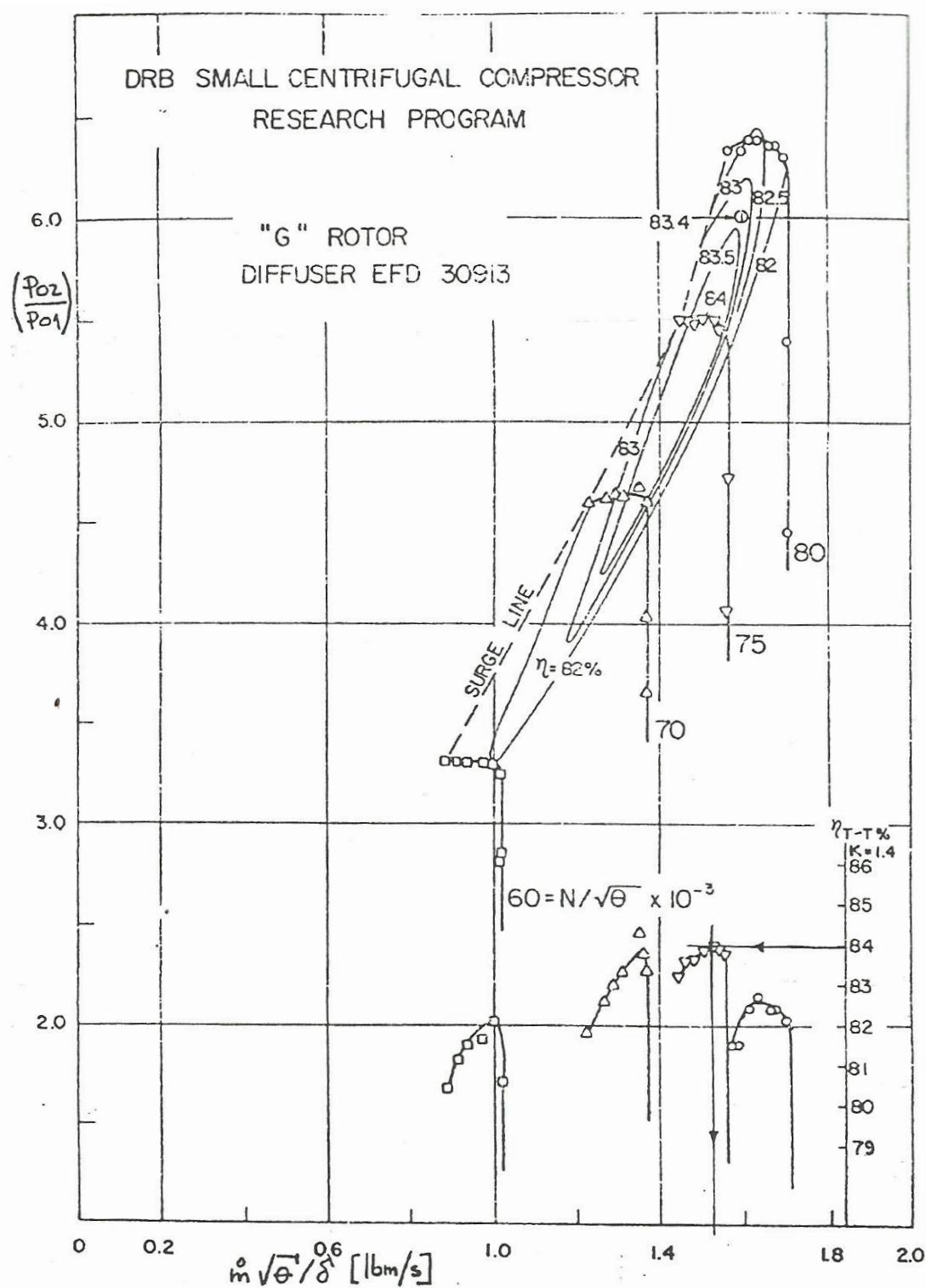


Figura 4.4. Ejemplo de un mapa de equilibrio para un compresor

Ejemplo 4.2.

La Fig. 4.4 es el mapa de funcionamiento de un compresor centrífugo pequeño (diámetro de salida del impulsor = 5 pulg) el cual trabaja en una turbina de gas existente. Se propone construir una turbina de gas nueva que utiliza un compresor geométricamente similar al de la Fig. 4.4. Cálculos preliminares indican que el compresor nuevo debe manejar una rata de flujo másico equivalente (condiciones estándar) de 3.0 lbm/s. Qué diámetro de salida del impulsor debe recomendarse para el compresor nuevo?. Cuál será la velocidad real de rotación del compresor nuevo, si la temperatura de entrada del gas será típicamente 100°F?

El punto de diseño del modelo de 5 pulg. de diámetro se corresponde con la máxima eficiencia de 84%; por lo tanto, $N_r = \frac{N}{\theta^{1/2}} = 75 \times 10^3$ y $\dot{m}_r = \dot{m} \frac{\theta^{1/2}}{\delta} = 1.53$, según el mapa de la Fig. 4.4. Segundo los datos el compresor nuevo, se tiene el flujo másico reducido.

Datos:

Modelo	Prototipo
$D_m = 5 \text{ pulg.}$	$D_p = ?$
$\dot{m}_{rm} = 1.53 \text{ lbm/s}$	$\dot{m}_{rp} = 3 \text{ lbm/s}$
$T_{sm} = 520 R$	$T_{01p} = 100 + 460 = 560 R$
$N_{rm} = 75 \times 10^3 \text{ RPM}$	$N_p = ?$

Usando los números adimensionales para un gas perfecto, se tiene:

$$\frac{\dot{m}_{rm}\sqrt{T_{sm}}}{P_{sm}D_m^2} = \frac{\dot{m}_{rp}\sqrt{T_{sp}}}{P_{sp}D_p^2}$$

$$\frac{\dot{m}_{rm}}{D_m^2} = \frac{\dot{m}_{rp}}{D_p^2} \Rightarrow D_p = D_m \sqrt{\frac{\dot{m}_{rp}}{\dot{m}_{rm}}}$$

$$D_p = 5.0 \sqrt{\frac{3.0}{1.53}} \Rightarrow D_p = 7.0 \text{ pulg.}$$

$$\frac{N_{rm}D_m}{\sqrt{T_{sm}}} = \frac{N_{rp}D_p}{\sqrt{T_{sp}}}$$

$$N_{rp} = \frac{N_{rm}}{\lambda}$$

$$N_{rp} = 75 \times 10^3 \times \frac{5.0}{7.0} = 53.571 \times 10^3 \text{ RPM}$$

Usando los parámetros simplificados, aplicados al prototipo, con condiciones de funcionamiento (1), las condiciones estándar en la entrada, y condiciones de funcionamiento (2), los valores reales en un día con temperatura en la entrada diferente de la estándar, se tiene:

Prototipo	Prototipo
Condiciones de funcionamiento (1)	Condiciones de funcionamiento (2)
$T_{s1} = 520 R$	$T_{012} = 560 R$
$N_{r1} = 53.571 \times 10^3 \text{ RPM}$	$N_2 = ?$

$$N_p = N_2 = N_{r1}\theta^{1/2} = 53.571 \times 10^3 \sqrt{\frac{560}{520}} = 55.593 \times 10^3 \text{ RPM}$$

Este cálculo se pudo haber realizado en forma más directa usando la siguiente ecuación con similitud:

$$\frac{N_{rm}D_m}{\sqrt{T_{sm}}} = \frac{N_pD_p}{\sqrt{T_{01p}}}$$

$$N_p = \frac{N_{rm}\sqrt{\theta}}{\lambda}$$

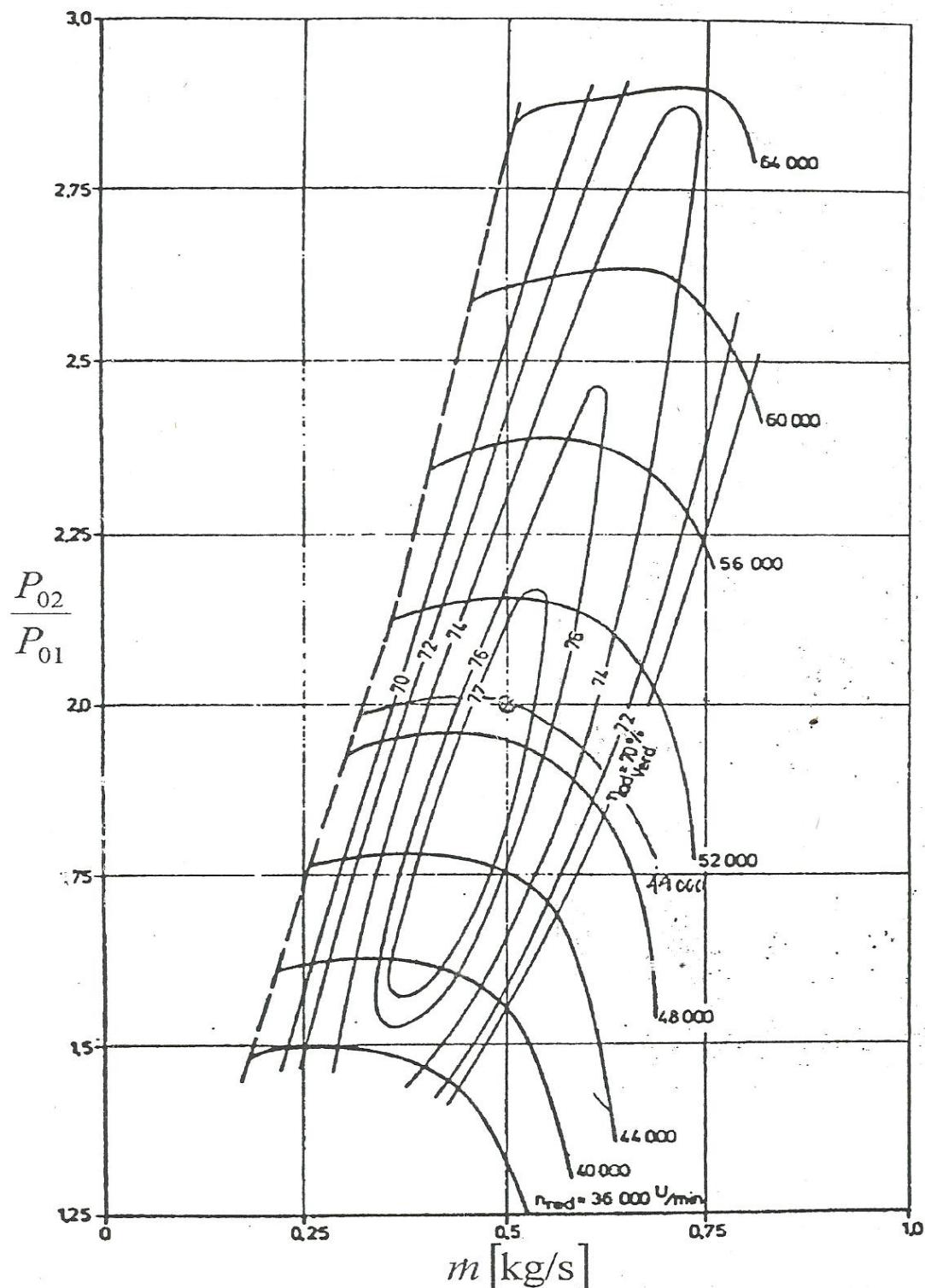


Figura 4.5. Mapa de funcionamiento de un compresor centrifugo industrial

Ejemplo 4.3.

Se tiene un compresor cuyo mapa de equilibrio se muestra en la figura 4.5. Este compresor va a trabajar en Mérida en donde la presión atmosférica es 85 KPa y la temperatura en un día soleado se puede considerar igual a 25°C.

- Calcule la presión de descarga, el flujo másico y las RPM para trabajar en Mérida en condiciones equivalentes a máxima eficiencia.
- Si este compresor se hace trabajar en Mérida en un día en el que la temperatura es 15°C con las siguientes condiciones: $\dot{m} = 0.425 \text{ Kg/s}$, $N = 49000 \text{ RPM}$, estime la eficiencia y la relación de presiones que manejaría el compresor.
- Un compresor geométricamente similar más grande se hará girar a 23000 RPM en condiciones estándar, calcule el flujo másico de este compresor en condiciones equivalentes de máxima eficiencia.
- Si el compresor más grande se hace trabajar en Mérida, calcule la presión de descarga, el flujo másico y las RPM para que funcione en condiciones equivalentes a máxima eficiencia.

Se puede considerar como condiciones estándar $P_{atm} = 100 \text{ KPa}$ y $T_s = 288 \text{ K}$

Para la parte a, utilizando el mapa de la figura 4.5, se puede usar como punto de diseño de manera aproximada: $N_r = 46000 \text{ RPM}$ con una eficiencia máxima $\eta_{ad} = 80\%$, manejando un flujo másico reducido de $\dot{m}_r = 0.45 \text{ Kg/s}$ y $\frac{P_{r1}}{P_{s1}} = \frac{P_{022}}{P_{012}} = 1.87$. Si tomamos los datos del mapa de equilibrio como condiciones de funcionamiento (1), se usan los parámetros simplificados para calcular las condiciones de funcionamiento (2), que serían las condiciones reales del mismo compresor, pero funcionando en Mérida con condiciones en la entrada distintas de las estándar.

Datos:

Condiciones de Funcionamiento (1)	Condiciones de Funcionamiento (2)
$\eta_{ad} = 80\%$,	$\frac{P_{r1}}{P_{s1}} = \frac{P_{022}}{P_{012}} = 1.87$
	$P_{022} = ?$
$\dot{m}_{r1} = 0.45 \text{ Kg/s}$	$\dot{m}_2 = ?$
$N_{r1} = 46000 \text{ RPM}$	$N_2 = ?$

Con: $P_{01} = 85 \text{ KPa}$ y $T_{01} = 25 + 273 = 298 \text{ K}$

$$\delta = \frac{85 \text{ KPa}}{100} = 0.85 ; \quad \sqrt{\theta} = \sqrt{\frac{298}{288}} = 1.0172$$

$$\dot{m}_2 = \dot{m}_{r1} \frac{\delta}{\sqrt{\theta}} = \frac{(0.45)(0.85)}{1.0172} = 0.376 \text{ Kg/s}$$

$$P_{022} = P_{012} \times 1.87 = 85 \times 1.875 = 159.38 \text{ KPa}$$

$$N_2 = N_{r1} \sqrt{\theta} = 46000 (1.0172) = 46791 \text{ RPM}$$

Para la parte b, se debe recalcular θ y se deben calcular los parámetros reducidos para entrar al mapa de equilibrio y ubicar el punto de funcionamiento en el que se encuentra funcionando el compresor. Si tomamos los datos de la parte b, como condiciones de funcionamiento 2, tenemos:

Condiciones de Funcionamiento (1)	Condiciones de Funcionamiento (2)
$\eta_{ad} = ?$,	$\frac{P_{r1}}{P_{s1}} = \frac{P_{022}}{P_{012}} = ?$
	$\dot{m}_2 = 0.425 \text{ Kg/s}$
	$N_2 = 49000 \text{ RPM}$

$$T_{012} = 15 + 273 = 288 \text{ K}$$

$$\dot{m}_2 = 0.425 \frac{\text{Kg}}{\text{s}} \quad N_2 = 49000$$

$$\delta = \frac{85 \text{ KPa}}{100} = 0.85 ; \quad \sqrt{\theta} = \sqrt{\frac{288}{288}} = 1$$

$$\dot{m}_{r1} = \dot{m} \frac{\sqrt{\theta}}{\delta} = \frac{(0.425)(1)}{0.85} = 0.50 \frac{Kg}{s}$$

$$N_{r1} = \frac{N}{\sqrt{\theta}} = 49000 RPM$$

Con $\dot{m}_{r1} = 0.50 \frac{Kg}{s}$ trazamos una línea vertical en el diagrama de equilibrio hasta donde corta la curva de $N_{r1} = 49000 RPM$. De esta forma encontramos la eficiencia aproximada y la relación de presiones del compresor.

$$\eta_{ad} = 79\%; \quad rp = \frac{P_{r1}}{P_{s1}} = \frac{P_{022}}{P_{012}} = 2$$

En la parte c, se tiene un compresor más grande (Prototipo), que trabaja en condiciones estándar y se debe calcular el flujo másico reducido para que trabaje en condiciones equivalentes a las de máxima eficiencia que se leen del modelo cuyo mapa de equilibrio es conocido: $\eta_{ad} = 80\%$, $\frac{P_{rm}}{P_{sm}} = \frac{P_{rp}}{P_{sp}} = 1.87$

Modelo	Prototipo
$\eta_{ad} = 80\%$,	$\frac{P_{rm}}{P_{sm}} = \frac{P_{rp}}{P_{sp}} = 1.87$
$N_{rm} = 46000 RPM$	$N_{rp} = 23000 RPM$
$\dot{m}_{rm} = 0.45 Kg/s$	$\dot{m}_{rp} = ?$

Usando la ecuación 4.45 se tiene:

$$N_{rp} = N_{rm} \frac{1}{\lambda}$$

$$\lambda = \frac{N_{rm}}{N_{rp}} = \frac{46000}{23000} = 2$$

Usando la ecuación (4.44) se tiene:

$$\dot{m}_{rp} = \dot{m}_{rm} \lambda^2$$

$$\dot{m}_{rp} = 0.45 \times 4 = 1.8 Kg/s$$

Para la parte d, se tiene:

Modelo	Prototipo
$\eta_{ad} = 80\%$,	$\frac{P_{rm}}{P_{sm}} = \frac{P_{02p}}{P_{01p}} = 1.87$
	$P_{02p} = ?$
$\dot{m}_{rm} = 0.45 Kg/s$	$\dot{m}_{rp} = ?$
$N_{rm} = 46000 RPM$	$N_p = ?$

De la relación de presiones se tiene:

$$P_{02p} = P_{01p} \times 1.87 = 85 \times 1.87 = 158.95 KPa$$

Usando las ecuaciones 4.41 y 4.42, considerando que tanto el modelo como el prototipo trabajan con el mismo gas, se tiene:

$$\dot{m}_p = 0.45 \frac{0.85}{1.0172} 2^2 = 1.50 Kg/s$$

$$N_p = 46000 \times 1.0172 \frac{1}{2} = 23396 RPM$$

Ejemplo 4.4

La Fig. 4.5 es el mapa de funcionamiento de un compresor centrífugo industrial de aire y está referido a unas condiciones estándar de $288 K$ y $1.033 Kgf/cm^2$. Las condiciones en el punto de diseño que se pueden leer del mapa son:

$$\dot{m}_r = \dot{m} \frac{\theta^{1/2}}{\delta} = 0.5 \frac{Kgm}{s}; \quad \frac{P_{02}}{P_{01}} = 2; \quad N_r = \frac{N}{\theta^{1/2}} = 49 \times 10^3 RPM$$

$$\eta_{ad} = 79\% \quad \eta_{mec} = 98\%$$

Se quiere usar este compresor en un proceso industrial donde las condiciones de entrada son $T_{01} = 27^\circ C$ y $P_{01} = 0.95 Kgf/cm^2$.

Calcular:

- Flujo másico operado en el proceso industrial en el punto de diseño.
- Flujo másico de bamboleo en el proceso industrial.
- RPM del compresor en el proceso industrial en el punto de diseño.

- d) Potencia del motor en el proceso industrial en el punto de diseño.
- e) El diámetro comercial de la tubería de descarga del compresor si el Número de Mach en esta tubería debe limitarse a 0.2 cuando se opera el flujo másico de diseño en el proceso industrial.
- f) Presión total de descarga y potencia del motor en el proceso industrial en un punto de operación donde el flujo másico es $0.54 \frac{Kgm}{s}$.

Cálculos en el punto de diseño

Datos:

Condiciones de funcionamiento (1)	Condiciones de funcionamiento (2)
$\eta_{ad} = 79\%$, $\frac{P_{r1}}{P_{s1}} = \frac{P_{022}}{P_{012}} = 2$	
$T_{s1} = 288 K$	$T_{012} = 300 K$
$P_{s1} = 1.033 Kgf/cm^2$	$P_{012} = 0.95 Kgf/cm^2$
$\dot{m}_{r1} = 0.5 \frac{Kg}{s}$	$\dot{m}_2 = ?$
$\dot{m}_{rb1} = 0.32 Kg/s$	$\dot{m}_{b2} = ?$
$N_{r1} = 49 \times 10^3 RPM$	$N_2 = ?$
	$\dot{W}_{mec2} = ?$
	$D_2 = ?$ Diametro de la tubería de descarga con $M_2 \leq 2$
$\theta = \frac{300}{288} = 1.042$	

$$\delta = \frac{0.95}{1.033} = 0.92$$

- a) Flujo másico operado en el proceso industrial en el punto de diseño.

$$\dot{m}_2 = \dot{m}_{r1} \frac{\delta}{\theta^{1/2}} = 0.5 \frac{0.92}{1.042^{1/2}} = 0.45 Kg/s$$

- b) Flujo másico reducido que se lee en el mapa para entrada en bamboleo es:
 $0.32 Kgm/s$; por lo tanto

$$\dot{m}_{b2} = \dot{m}_{rb1} \frac{\delta}{\theta^{1/2}} = 0.32 \frac{0.92}{1.042^{1/2}} = 0.29 Kg/s$$

- c) *RPM* del compresor en el proceso industrial en el punto de diseño
 $N_2 = N_{r1} \theta^{1/2} = 49 \times 10^3 \times 1.042^{1/2} = 50 \times 10^3 RPM$

- d) Potencia del motor en el proceso industrial en el punto de diseño.

$$\omega_{rotor} = C_p(T_{02} - T_{01}); \quad \frac{P_{02}}{P_{01}} = 2; \quad \frac{T_{02S}}{T_{01}} = \left(\frac{P_{02}}{P_{01}}\right)^{\frac{k-1}{k}}$$

$$T_{02S} = 300(2)^{\frac{1.4-1}{1.4}} = 365.7 K$$

$$\eta_i = \eta_{ad} = \frac{T_{02S} - T_{01}}{T_{02} - T_{01}} \Rightarrow T_{02} = 300 + \frac{365.7 - 300}{0.79} = 383.2 K$$

Por lo tanto:

$$\omega_{rotor} = 1005 \frac{J}{Kg K} (383.2 - 300) K = 83583 \frac{J}{Kg}$$

$$\dot{W}_{rotor} = \omega_{rotor} \dot{m}_2 = 83583 \frac{J}{Kg} 0.45 \frac{Kg}{s} = 37.6 KW$$

$$\dot{W}_{mec2} = \frac{37.6 KW}{0.98} = 38.4 KW$$

- e) El diámetro comercial de la tubería de descarga del compresor si el Número de Mach en esta tubería debe limitarse a 0.2 cuando se opera el flujo másico de diseño en el proceso industrial.

$$M_2 = V_2/a_2 = \frac{V_2}{\sqrt{k R T_2}} \Rightarrow T_{02} = T_2 + \frac{V_2^2}{2 C_p}$$

$$\Rightarrow T_{02} = T_2 + \frac{M_2^2 k R T_2}{2 C_p}$$

$$\Rightarrow T_{02} = T_2 \left(1 + \frac{M_2^2 k R}{2 C_p} \right)$$

$$\Rightarrow T_2 = \frac{T_{02}}{\left(1 + \frac{M_2^2 k R}{2 C_p} \right)} = \frac{383.2 \text{ K}}{\left(1 + \frac{0.2^2 \times 1.4 \times 287}{2 \times 1005} \frac{\text{J}}{\text{Kg K}} \right)}$$

$$\Rightarrow T_2 = 380.16 \text{ K}$$

$$P_{022} = P_{012} \times 2 = \frac{0.95 \text{ Kgf}}{\text{cm}^2} \times 2 = 1.9 \frac{\text{Kgf}}{\text{cm}^2}$$

$$P_2 = P_{022} \left(\frac{T_2}{T_{02}} \right)^{\frac{k}{k-1}} = 1.9 \frac{\text{Kgf}}{\text{cm}^2} \left(\frac{380.16}{383.2} \right)^{3.5} = 1.84778 \frac{\text{Kgf}}{\text{cm}^2}$$

$$\rho_2 = \frac{P_2}{R T_2} = \frac{18.478 \times 9.81 \times 10^3}{287 \times 380.16} = 1.66 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$$

$$a_2 = (k R T_2)^{1/2} = (1.4 \times 287 \times 380.16)^{1/2} = 390.83 \text{ m/s}$$

$$V_2 = M_2 \times a_2 = 78.17 \text{ m/s}$$

$$D = \sqrt{\frac{4 \dot{m}_2}{\pi \rho_2 V_2}} = \sqrt{\frac{4}{\pi} \frac{0.45}{1.66 \times 78.17}} = 0.066 \text{ m} = 2.6 \text{ pulg} \cong 3 \text{ pulg}$$

Recalculando la velocidad se tiene:

$$A = \pi D^2 / 4 = \pi \times \left(3 \times \frac{2.54}{100} \right)^2 / 4 = 45.6 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$V_2 = \frac{\dot{m}_2}{\rho_2 A_2} = \frac{0.45}{1.66 \times 45.6 \times 10^{-4}} \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} = 59.44 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$T_2 = T_{02} - \frac{V_2^2}{2 C_p} = 383.2 - \frac{59.44^2}{2 \times 1005} = 381.44 \text{ K}$$

$$P_2 = P_{02} \left(\frac{T_2}{T_{02}} \right)^{\frac{k}{k-1}} = 1.9 \frac{\text{Kgf}}{\text{cm}^2} \left(\frac{381.44}{383.2} \right)^{3.5} = 1.8696 \frac{\text{Kgf}}{\text{cm}^2}$$

$$\rho_2 = \frac{P_2}{R T_2} = \frac{18.696 \times 9.81 \times 10^3}{287 \times 381.44} \frac{\text{Kgm}}{\text{m}^3} = 1.675 \frac{\text{Kgm}}{\text{m}^3}$$

Vuelvo a V_2 de 58.9 m/s

$$V_2 = 58.9 \frac{m}{s}; \quad T_2 = 381.47 K; \quad P_2 = 1.8701 \frac{Kgf}{cm^2}; \quad \rho_2 = 1.675 \frac{Kgm}{m^3}$$

$$a_2 = (k R T_2)^{1/2} = (1.4 \times 287 \times 381.47)^{1/2} = 391.50 \text{ m/s}$$

$M_2 = V_2/a_2 = 0.15$ El cual no es definitivo porque se está realizando una iteración y se debe refinar.

- f) Presión total de descarga y potencia del motor en el proceso industrial en un punto de operación donde el flujo másico es $0.54 \frac{Kg}{s}$.

En este caso se hace trabajar el compresor fuera del punto de diseño considerado inicialmente, para conocer el punto de funcionamiento en el que está trabajando el compresor en estas condiciones, se calculan los parámetros reducidos para consultar en el diagrama de equilibrio.

$$\dot{m}_r = \dot{m} \frac{\theta^{1/2}}{\delta} = 0.54 \frac{1.042^{1/2}}{0.92} = 0.6 \text{ Kg/s}$$

Sobre la curva de $N_r = 49000 \text{ RPM}$, la relación de presión y eficiencia adiabática que se lee en el mapa para un flujo másico reducido de 0.6 Kg/s es 1.94 y 74% respectivamente. Si se toman los valores reducidos como condiciones de funcionamiento (1) y los valores reales del proceso industrial en el nuevo punto de funcionamiento como condiciones de funcionamiento (2), se tiene:

Condiciones de funcionamiento (1)	Condiciones de funcionamiento (2)
$\eta_{ad} = 74\%$, $\frac{P_{r1}}{P_{s1}} = \frac{P_{022}}{P_{012}} = 1.94$	
$T_{s1} = 288 K$	$T_{012} = 300 K$
$P_{s1} = 1.033 \text{ Kgf/cm}^2$	$P_{012} = 0.95 \text{ Kgf/cm}^2$
$\dot{m}_{r1} = 0.6 \frac{Kg}{s}$	$\dot{m}_2 = 0.54 \frac{Kg}{s}$
	$\dot{W}_{mec2} = ?$

$$P_{022} = P_{012} \times 1.94 = \frac{0.95 \text{ Kgf}}{cm^2} = 1.843 \frac{Kgf}{cm^2}$$

$$T_{02s} = 300(1.94)^{\frac{1.4-1}{1.4}} = 362.5 K \quad \Rightarrow \quad T_{02} = 300 + \frac{362.5 - 300}{0.74} = 384.5 K$$

$$\omega_{rotor} = 1005 \frac{J}{Kg K} (384.5 - 300) K = 84882 \frac{J}{Kg}$$

$$\dot{W}_{rotor} = \omega_{rotor} \dot{m}_2 = 84882 \frac{J}{Kg} 0.54 \frac{Kg}{s} = 45.8 KW$$

$$\dot{W}_{mec} = \frac{\dot{W}_{rotor}}{\eta_{mec}} = \frac{45.8 KW}{0.98} = 46.8 KW$$

4.7 Velocidad específica ns, Ns

Al igual que en TH , Ns se obtiene al combinar el coeficiente de caudal y el coeficiente de altura para eliminar el diámetro del rotor.

$$Ns = \frac{\phi^{1/2}}{\psi^{3/4}} = \left(\frac{\dot{m}}{\rho_{01} N D^3} \right)^{1/2} \left(\frac{\Delta h_{os}}{N^2 D^2} \right)^{-3/4} \frac{N Q_{01}^{1/2}}{(\Delta h_{os})^{3/4}} \quad (4.46)$$

La velocidad específica se puede escribir en términos estrictamente adimensionales, transformando N a velocidad angular ω :

$$ns = \frac{\omega Q_{01}^{1/2}}{(\Delta h_{os})^{3/4}} = \frac{Ns \pi}{30} \quad (4.47)$$

Los valores de N , Q_{01} y Δh_{os} se toman en el punto de máxima eficiencia del mapa de funcionamiento del compresor. Por lo tanto, Ns es un parámetro de gran importancia para escoger el compresor más eficiente para realizar ciertas condiciones de trabajo. Además, Ns define el tipo de diseño de un compresor, ya que cada clase de compresor tiene su máxima eficiencia dentro de un pequeño rango de Ns y este rango es diferente para cada clase.

Los compresores centrífugos radiales se diseñan para proporcionar gran incremento de presión, pero para manejar bajo caudal; por lo tanto, se puede deducir de la ecuación (2.68) que el valor de Ns para este tipo de compresores es bajo. Por el contrario, los compresores axiales se diseñan para manejar caudales elevados y proporcionar un incremento de presión moderado; por lo tanto, este tipo de compresor tiene un valor elevado de Ns .

4.8 Diámetro específico ds, Ds .

El diámetro específico se obtiene al combinar el coeficiente de caudal y el coeficiente de altura para eliminar las RPM de la máquina:

$$ds = \frac{\psi^{1/4}}{\phi^{1/2}} = \left(\frac{\Delta h_{os}}{N^2 D^2} \right)^{1/4} \left(\frac{\dot{m}}{\rho_{01} N D^3} \right)^{-1/2} = \frac{D (\Delta h_{os})^{1/4}}{Q_{01}^{1/2}} \quad (4.48)$$

El diámetro específico relaciona el diámetro del rotor con los valores de Q_{01} y Δh_{os} , los cuales se toman en el punto de máxima eficiencia del mapa de funcionamiento del compresor. Por lo tanto, Ds , al igual que Ns , permite escoger el compresor más eficiente para realizar ciertas condiciones de trabajo. La Fig. 3.20 permite predecir el tipo de compresor que mejor se adapta a una aplicación determinada y estimar al mismo tiempo la eficiencia total - a- total que podría esperarse.

Ejemplo 4.5.

Se desea escoger un compresor para las siguientes condiciones:

$$\begin{array}{lll} T_{01} = 289 \text{ K} & P_{01} = 10335 \text{ Kgf/m}^2 & P_{02} = 14062 \text{ Kgf/m}^2 \\ N = 18000 \text{ RPM} & R = 29.3 \text{ m/K} & \dot{m} = 0.567 \text{ kg/s} \\ k = 1.4 & R = 287 \text{ J/Kg K} & Cp = 1.005 \text{ KJ/kg K} \end{array}$$

Determinar el tipo de compresor, la eficiencia total-a-total que podría esperarse y el diámetro aproximado del mismo.

Para entrar en la Fig. 3.20 se debe calcular Ns en unidades inglesas. Se calcula ns adimensional y luego se aplica el factor de conversión de la Tabla 3.12.

$$\Delta h_{os} = 1005 \text{ J/kg K} \times 289 \text{ K} \left[\left(\frac{14062}{10335} \right)^{\frac{1.4-1}{1.4}} - 1 \right] = 1005 \times 289 \times 0.092 = 26712 \text{ J/Kg}$$

$$\Delta h_{os} = 26712 \text{ J/Kg} = (\text{Kg} \times \text{m}^2)(\text{s}^2 \times \text{Kg}) = 26712 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

$$\rho_{01} = \frac{P_{01}}{R T_{01}} = \frac{10335 \times 9.81}{287 \frac{\text{J}}{\text{kg K}} \times 289 \text{ K}} = 1.22 \text{ Kg/m}^3$$

$$Q_{01} = \frac{\dot{m}}{\rho_{01}} = \frac{0.567}{1.22} = 0.465 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$ns = \frac{18000 \pi (0.465)^{1/2}}{30(26712)^{3/4}} = 0.615; \quad \Rightarrow \quad Ns = 128.8 \times 0.615 = 79.23$$

Con $Ns = 79.23$ se puede observar en la Fig. 3.20 que el compresor es del tipo centrifugo radial y que se puede esperar una eficiencia total-a-total de aproximadamente 85% con un $D_s=1.7$. Por lo tanto, el diámetro específico adimensional es:

$$Ds = \frac{1.7}{0.42} = 4.05$$

$$D = \frac{4.05(0.4695)^{\frac{1}{2}}}{(26721)^{\frac{1}{4}}} = 21.6 \text{ cm}$$

Chequeando el número de Reynolds de los álabes se tiene:

$$U_2 = \pi D N / 60 = 3.1416 \times 0.216 \times 18000 / 60 = 203.6 \text{ m/s}$$

$$Re = \frac{\rho_{01} D^2 N}{\mu} = \frac{\rho_{01} D U_2}{\mu} = \frac{1.22 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} 0.216 \text{ m} 203.6 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0.000016 \frac{\text{Kg}}{\text{ms}}} = 3.35 \times 10^6$$

Por lo tanto, la Fig. 2.16 es aplicable ya que $Re \geq 2 \times 10^6$.

4.9 Aplicación del Teorema PI a Turbomáquinas Térmicas Motoras (Turbinas).

a) Variables relativas a la máquina

\dot{m} = Flujo másico de fluido a través de la máquina (sustituye a Q).

Δh_{os} = Cambio isentrópico de entalpia total o de estancamiento que sufre el fluido a través del compresor (Sustituye a H).

D = Diámetro del rodete.

N = RPM

P_m = Potencia mecánica en el eje.

η = Eficiencia total de la máquina.

b) Variables relativas al fluido.

ρ_{01} = Densidad del fluido evaluada con las condiciones totales o de estancamiento a la entrada de la máquina.

μ = Viscosidad Absoluta del fluido.

a_{01} = Velocidad del sonido evaluada con las condiciones totales o de estancamiento a la entrada.

k = Relación de calores específicos del fluido.

$$f(\dot{m}, \Delta h_{os}, N, D, P_m, \eta, \rho_{01}, \mu, a_{01}, k) = 0, \quad n = 10$$

VARIABLES dependientes:

$\Delta h_{os}, \eta, \dot{m}$

VARIABLES independientes:

$P_m, N, D, \rho_{01}, \mu, a_{01}, k$

Relación funcional dimensional:

$$\Delta h_{os}, \eta, \dot{m} = f(P_m, N, D, \rho_{01}, \mu, a_{01}, k)$$

NÚMEROS adimensionales resultantes:

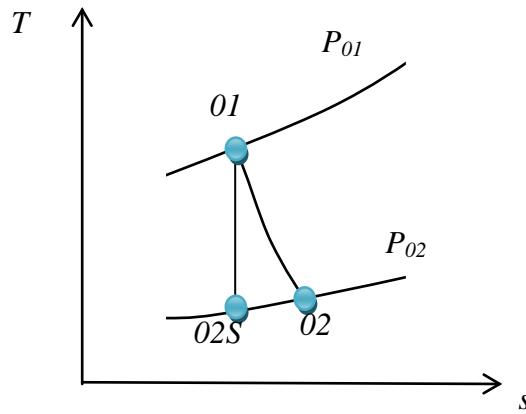
$$\phi, \psi, \hat{P}, Re, \eta, M, k$$

Relación funcional adimensional:

$$\psi, \eta, \phi = f(\hat{P}, Re, M, k)$$

Si se considera el fluido de trabajo como un gas perfecto, se puede obtener al igual que en compresores, un conjunto diferente de grupos adimensionales, los cuales son de más utilidad y fácilmente medibles.

El proceso de expansión en una turbina se esquematiza en la figura 4.6 y la relación funcional adimensional resultante para un gas perfecto se presenta en la ecuación (4.49).

Figura 4.6. Esquema T - s de un proceso de expansión en una turbina

$$\frac{P_{01}}{P_{02}}, \eta, \frac{\dot{m}\sqrt{RT_{01}}}{P_{01}D^2} = f\left(\left[\frac{\Delta T_0}{T_{01}}\right], \frac{ND}{\sqrt{RT_{01}}}, Re, k\right) \quad (4.49)$$

Para una turbina de un tamaño dado y manejando un solo tipo de gas, se puede eliminar k, R y D de la relación (4.49). Además, la influencia del número de Reynolds es despreciable cuando este adquiere valores elevados y se puede eliminar también. La relación funcional resultante de parámetros simplificados es:

$$\frac{P_{01}}{P_{02}}, \eta, \frac{\dot{m}\sqrt{RT_{01}}}{P_{01}} = f\left(\left[\frac{\Delta T_0}{T_{01}}\right], \frac{N}{\sqrt{T_{01}}}, k\right) \quad (4.50)$$

4.9.1 Curvas de funcionamiento para turbinas

Las curvas de funcionamiento para las turbinas se obtienen experimentalmente en un banco de pruebas. A menudo se experimenta sobre modelos debido al gran tamaño de los prototipos. El mapa de funcionamiento típico de una turbina se muestra en la figura 4.7.

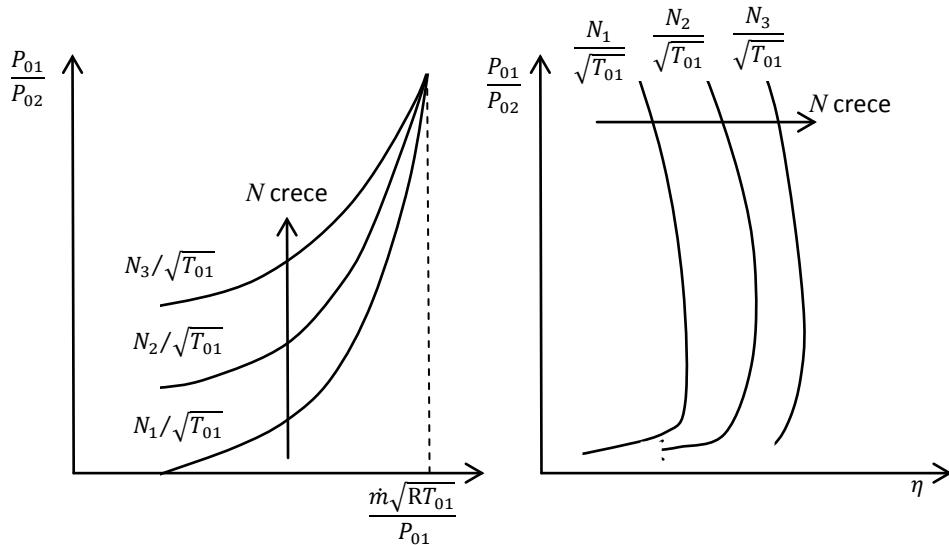


Figura 4.7. Mapa típico de funcionamiento de una turbina térmica

Es importante notar en el mapa de funcionamiento de la turbina térmica que la influencia de la relación de velocidad $\frac{N}{\sqrt{T_{01}}}$ sobre la relación $\frac{P_{01}}{P_{02}}$, es débil si se compara con los compresores. A elevados valores de \dot{m} , la turbina alcanza eventualmente la condición de bloqueo (CHOQUE) que ocurre cuando el número de Mach alcanza un valor igual a la unidad en los canales de flujo. El bloqueo se manifiesta en el mapa porque las curvas de funcionamiento se hacen verticales.

4.10 Velocidad específica ns , Ns y diámetro específico ds , Ds .

Al igual que en compresores, Ns se obtiene al combinar el coeficiente de caudal y el coeficiente de altura para eliminar el diámetro del rotor. En turbinas térmicas son más significativos el caudal y salto entálpico calculados con las condiciones estáticas de salida de la máquina.

$$Ns = \frac{\phi^{1/2}}{\psi^{3/4}} = \left(\frac{\dot{m}}{\rho_2 N D^3} \right)^{1/2} \left(\frac{\Delta h_s}{N^2 D^2} \right)^{-3/4} = \frac{N Q_2^{1/2}}{(\Delta h_s)^{3/4}} \quad (4.51)$$

La velocidad específica se puede escribir en términos estrictamente adimensionales, transformando N a velocidad angular ω :

$$ns = \frac{\omega Q_2^{1/2}}{(\Delta h_s)^{3/4}} = \frac{Ns \pi}{30} \quad (4.52)$$

Los valores de N , Q_2 y Δh_s se toman en el punto de máxima eficiencia del mapa de funcionamiento del compresor. Por lo tanto, Ns es un parámetro de gran importancia para escoger la turbina más eficiente para realizar ciertas condiciones de trabajo. Las turbinas radiales se diseñan para trabajar bajo una gran caída de presión, pero para manejar bajo caudal. Además, por lo tanto, se puede deducir de la ecuación (4.52) que el valor de Ns para este tipo de turbina es bajo. Por el contrario, las turbinas axiales se diseñan para manejar caudales elevados bajo una caída de presión moderada; por lo tanto, este tipo de turbina tiene un valor elevado de Ns .

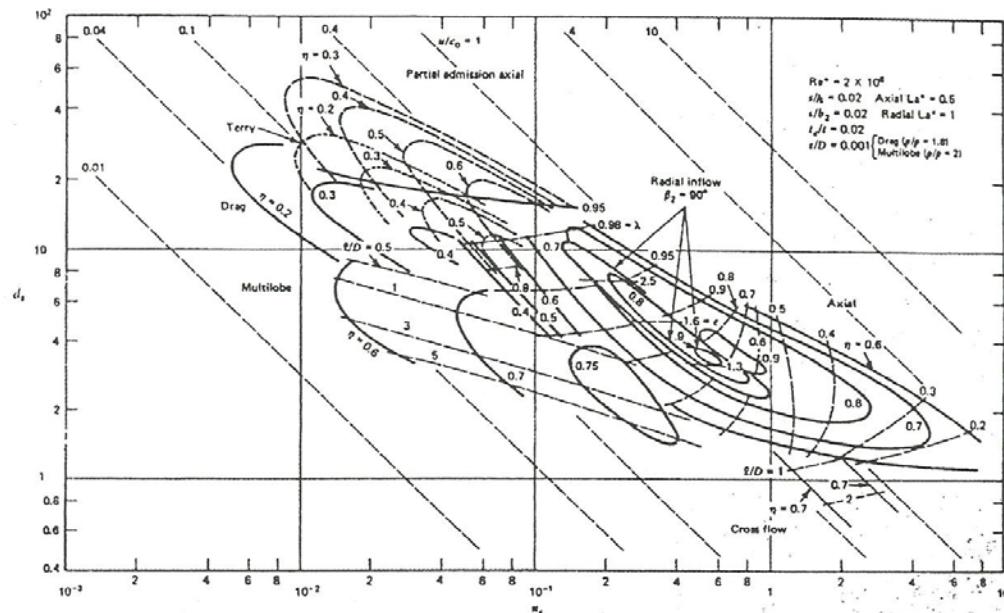


Figura 4.8 Grafica Ds vs Ns para selección o diseño preliminar de turbinas térmicas de una etapa, para $Re \geq 2 \times 10^6$. La eficiencia total-a-estática.

El diámetro específico se obtiene al combinar el coeficiente de caudal y el coeficiente de altura para eliminar las RPM de la máquina:

$$ds = \frac{\psi^{1/4}}{\phi^{1/2}} = \left(\frac{\Delta h_s}{N^2 D^2} \right)^{1/4} \left(\frac{\dot{m}}{\rho_2 N D^3} \right)^{-1/2} \frac{D (\Delta h_s)^{1/4}}{Q_2^{1/2}} \quad (4.53)$$

El diámetro específico relaciona el diámetro del rotor con los valores de Q_2 y Δh_s , los cuales se toman en el punto de máxima eficiencia del mapa de funcionamiento de la turbina. Por lo tanto, Ds , al igual que Ns , permite escoger la turbina más eficiente para

realizar ciertas condiciones de trabajo. La figura 4.8 permite predecir el tipo de turbina que mejor se adapta a una aplicación determinada y estimar al mismo tiempo la eficiencia total - a- total que podría esperarse y el diámetro aproximado de la misma.

Ejemplo 4.6

Se desea escoger una turbina de gas para las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} T_{01} &= 1500 \text{ K}; & \frac{P_{01}}{P_2} &= 5; & P_2 &= 10335 \frac{\text{kgf}}{\text{m}^2}; \\ N &= 70000 \text{ RPM} & \dot{m} &= 0.567 \frac{\text{Kg}}{\text{s}} & k &= 1.33 \\ R &= 287 \frac{\text{J}}{\text{Kg K}} & Cp &= 1.157 \frac{\text{KJ}}{\text{Kg K}} \end{aligned}$$

Determinar el tipo de turbine, la eficiencia total-a-estática que podría esperarse y el diámetro aproximado de la misma. Para entrar en la figura 4.8. se debe calcular ns adimensional.

$$\begin{aligned} \frac{T_{2S}}{T_{01}} &= \left(\frac{P_2}{P_{01}} \right)^{\frac{k-1}{k}} \Rightarrow T_{2S} = T_{01} \left(\frac{P_2}{P_{01}} \right)^{\frac{k-1}{k}} \Rightarrow T_{2S} = 1500(0.2)^{\frac{1.33-1}{1.33}} = 1006 \text{ K} \\ \Delta h_s &= Cp(T_{01} - T_{2S}) = 1157 \frac{\text{J}}{\text{Kg K}} (1500 - 1006) \text{ K} = 571558 \frac{\text{J}}{\text{Kg}} \\ \Delta h_s &= 571558 \text{ m}^2/\text{s}^2 \\ \eta_{0-s} &= \frac{T_{01} - T_2}{T_{01} - T_{2S}} \end{aligned}$$

Asumiendo una eficiencia total-a-estática de 85% se tiene:

$$T_2 = 1500 - 0.85(1500 - 1006) = 1080 \text{ K}$$

$$\begin{aligned} \rho_2 &= \frac{P_2}{R T_2} = \frac{10335 \times 9.81 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}}{287 \frac{\text{J}}{\text{Kg K}} \times 1080 \text{ K}} = 0.327 \text{ Kg/m}^3 \\ Q_2 &= \frac{\dot{m}}{\rho_2} = \frac{0.567}{0.327} = 1.733 \text{ m}^3/\text{s} \\ ns &= \frac{70000 \pi (1.733)^{1/2}}{30(571558)^{3/4}} = 0.464 \end{aligned}$$

Con $ns = 0.464$ se puede observar en la figura 4.8 que la eficiencia asumida se puede lograr con una turbina de entrada radial a 90°, con un $ds \approx 3.6$. Por lo tanto, el diámetro del rotor de la turbina es:

$$Ds = \frac{3.6(1.733)^{1/2}}{(571558)^{1/4}} = 17.24 \text{ cm}$$

4.11 Mapas de equilibrio.

Al igual que en compresores, los mapas de equilibrio de turbinas están referidos a las condiciones estándar de presión y temperatura. Sin embargo, en turbinas se sustituye la temperatura y presión total a la entrada por la temperatura y presión crítica correspondiente para calcular los valores reducidos. Además, la relación de calores específicos, k , no permanece constante entre las condiciones de entrada a la turbina y las condiciones de referencia, debido a la fuerte variación de presión y temperatura. Las figuras 4.9 y 4.10 muestran mapas de equilibrio para una turbina de gas de dos etapas.

La temperatura crítica correspondiente a la temperatura de entrada T_{01} se calcula con:

$$\frac{T_{01}}{T_1} = 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \quad (4.54)$$

Haciendo $M = 1$, entonces $T_1 = T_{1cr}$.

$$\frac{T_{1cr}}{T_{01}} = \frac{2}{k+1} \quad (4.55)$$

La presión crítica correspondiente a la presión de entrada P_{01} se calcula con:

$$\frac{P_{01}}{P_1} = \left(1 + \frac{k-1}{2}M^2\right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (4.56)$$

Haciendo $M = 1$, entonces $P_1 = P_{1cr}$.

$$\frac{P_{1cr}}{P_{01}} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (4.57)$$

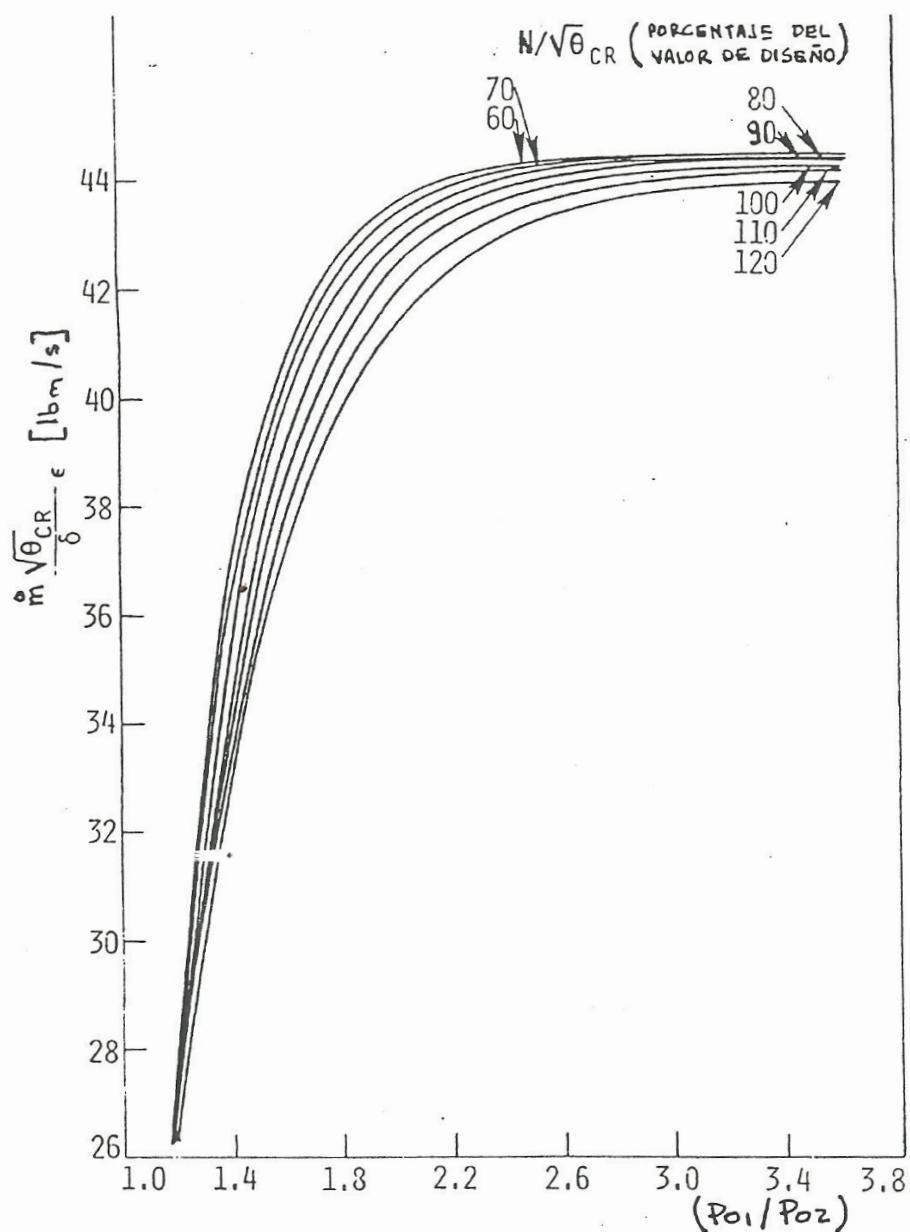


Figura 4.9. Mapa de equilibrio para una turbina de gas de dos etapas

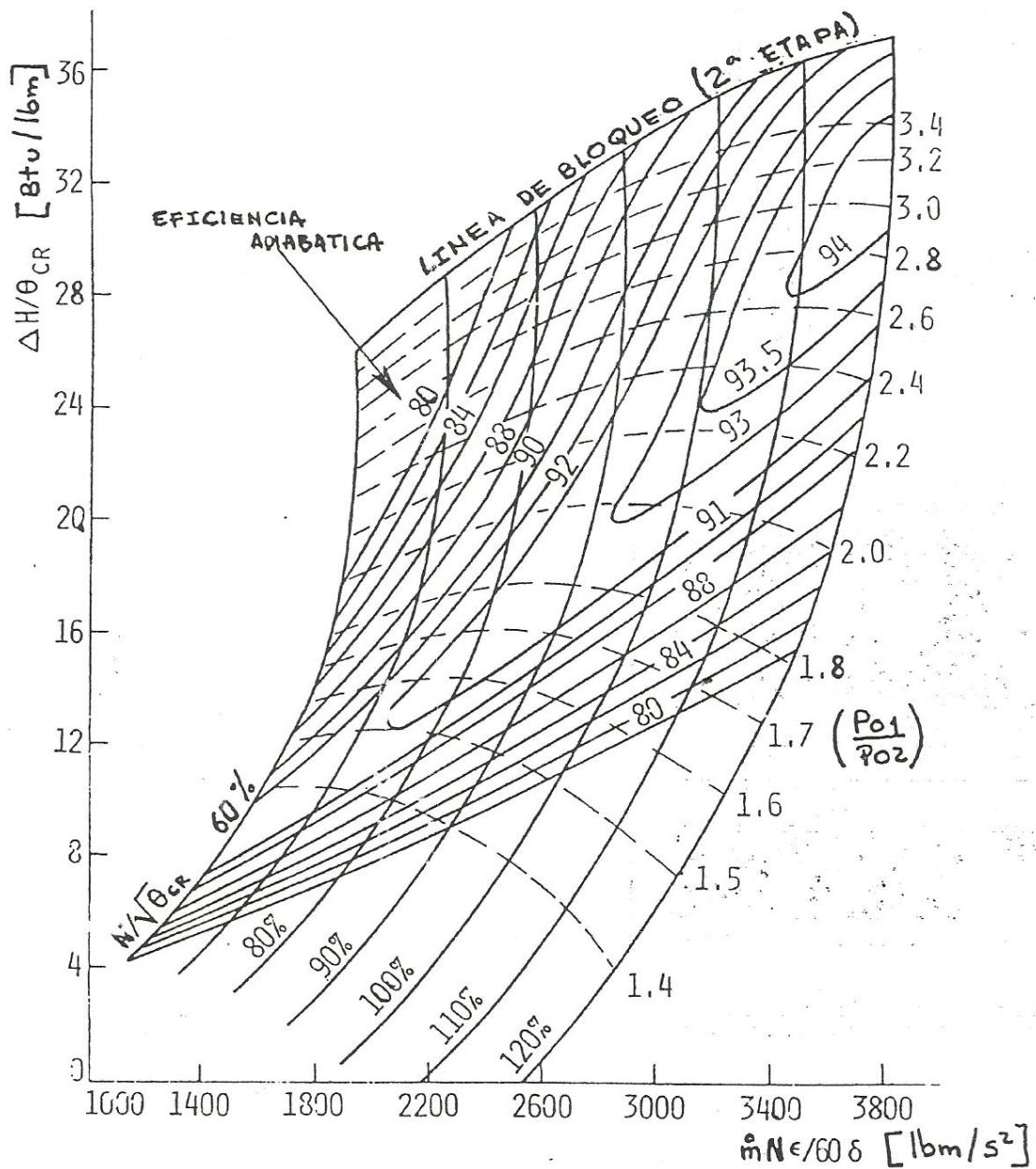


Figura 4.10. Ejemplo de un mapa de equilibrio para una turbina de dos etapas

De igual forma, la temperatura y presión crítica correspondiente a las condiciones estándar de referencia se calculan con:

$$\frac{T_{scr}}{T_s} = \frac{2}{k_s + 1} \quad (4.58)$$

$$\frac{P_{scr}}{P_s} = \left(\frac{2}{k_s + 1} \right)^{\frac{k_s}{k_s - 1}} \quad (4.59)$$

Las siguientes relaciones se definen para calcular los valores reducidos:

$$\gamma = \frac{P_{01}}{P_s} \quad (4.60)$$

$$\theta_{cr} = \frac{k}{k_s} \frac{T_{1cr}}{T_{scr}} \quad (4.61)$$

$$\varepsilon = \frac{k_s}{k} \frac{\left(\frac{P_{01}}{P_{1cr}}\right)}{\left(\frac{P_s}{P_{scr}}\right)} \quad (4.62)$$

Usando los grupos adimensionales se puede igualar el coeficiente de flujo.

$$\begin{aligned} \frac{\dot{m}_r \sqrt{RT_{1cr}}}{P_{1cr} \sqrt{k} D^2} &= \frac{\dot{m}_r \sqrt{R T_{scr}}}{P_{scr} \sqrt{k_s} D^2} \\ \dot{m}_r &= \frac{\dot{m}}{\frac{P_{01}}{P_s}} \sqrt{\frac{k}{k_s} \frac{T_{1cr}}{T_{scr}}} \left[\frac{k_s}{k} \frac{\left(\frac{P_{01}}{P_{1cr}}\right)}{\left(\frac{P_s}{P_{scr}}\right)} \right] \\ \dot{m}_r &= \frac{\dot{m} \sqrt{\theta_{cr}}}{\gamma} [\varepsilon] \end{aligned} \quad (4.63)$$

Igualado el número de Mach

$$\begin{aligned} \frac{N D}{\sqrt{k R T_{1cr}}} &= \frac{N_T D}{\sqrt{k_s R T_{scr}}} \\ N_r &= \frac{N}{\sqrt{\frac{k}{k_s} \frac{T_{1cr}}{T_{scr}}}} \\ N_r &= \frac{N}{\sqrt{\theta_{cr}}} \end{aligned} \quad (4.64)$$

Igualando el coeficiente de altura

$$\begin{aligned} \frac{\Delta h_{os}}{k R T_{1cr}} &= \frac{\Delta h_{osr}}{k_s R T_{scr}} \\ \Delta h_{osr} &= \frac{\Delta h_{os}}{\frac{k}{k_s} \frac{T_{1cr}}{T_{scr}}} \\ \Delta h_{osr} &= \frac{\Delta h_{os}}{\theta_{cr}} \end{aligned} \quad (4.65)$$

Calculando $\dot{m}_r N_r$ se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{m}_r N_r &= \frac{\dot{m} \sqrt{\theta_{cr}}}{\gamma} [\varepsilon] \frac{N}{\sqrt{\theta_{cr}}} \\ \dot{m}_r N_r &= \frac{\dot{m} N \varepsilon}{\gamma} \end{aligned} \quad (4.66)$$

Igualando el coeficiente de potencia multiplicado por el coeficiente de flujo

$$\frac{P_m}{\dot{m} N^2 D^2} = \frac{P_{mr}}{\dot{m}_r N_r^2 D^2}$$

$$\begin{aligned} T_r &= T \frac{\dot{m}_r N_r}{\dot{m} N} \\ T_r &= T \frac{\sqrt{\theta_{cr}}}{\gamma} [\varepsilon] \frac{1}{\sqrt{\theta_{cr}}} \\ T_r &= T \frac{\varepsilon}{\gamma} \end{aligned} \quad (4.67)$$

Ejemplo 4.7

En las Figuras 4.11 y 4.12 se dan mapas de equilibrio para una turbina de gas de una sola etapa.

- Las condiciones totales nominales de entrada para obtener los datos fueron:

$$P_{01} = 40 \text{ Pulgadas de } Hg \text{ abs.} \quad T_{01} = 540 R$$

- Las condiciones de diseño fueron:

Diámetro del tope del rotor $D_t = 16$ pulgadas.

Trabajo específico reducido, $\Delta h_0/\theta_{cr} = 12.22 \text{ Btu/lbm}$.

Flujo mísico reducido, $\frac{\dot{m}\sqrt{\theta_{cr}}}{\gamma} \varepsilon = 28.09 \text{ lbm/s.}$

Velocidad reducida del tope del alabe $V_t/\sqrt{\theta_{cr}} = 520 \text{ pie/s.}$

- Las condiciones estándar de referencia fueron:

$$P_s = 2116 \text{ lbf/pie}^2 \quad T_s = 518.7 R$$

- Se quiere calcular los H_p entregados por la turbina en el punto de diseño

Con los valores de diseño en la Fig. 4.11 se obtiene P_{01}/P_{02} :

$$\frac{P_{01}}{P_{02}} = 1.515$$

Entrando con los valores de diseño en la Fig. 4.12 se obtiene el torque reducido.

$$T \frac{\varepsilon}{\gamma} = 323.75 \text{ lbf} \times \text{pie}$$

$$\gamma = \frac{P_{01}}{P_s} = \frac{\frac{40}{12} \times 846 [\text{lbf/pie}^2]}{2116 [\text{lbf/pie}^2]} \Rightarrow \gamma = 1.3327$$

$$\varepsilon = \frac{k_s}{k} \frac{\left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{k}{k-1}}}{\left(\frac{k_s+1}{2}\right)^{\frac{k_s}{k_s-1}}}$$

En base a las tablas de aire se tiene:

$$k = f(P_{01}, T_{01}) = 1.4023$$

$$k_s = f(P_s, T_s) = 1.4021$$

$$\varepsilon = 0.9999$$

$$T = \frac{323.75 \times 1.3327}{0.9999} = 431.50 \text{ [lbf} \times \text{pie]}$$

$$\sqrt{\theta_{cr}} = \sqrt{\frac{k \left(\frac{2}{k+1}\right) T_{01}}{k_s \left(\frac{2}{k_s+1}\right) T_s}} = 1.020$$

$$V_t = \omega \frac{D_t}{2} \Rightarrow \omega = \frac{530.61 \times 2 \times 12}{16} = 759.9 \left[\frac{1}{s}\right]$$

$$H_p = \frac{T \times \omega}{550} = 624.4$$

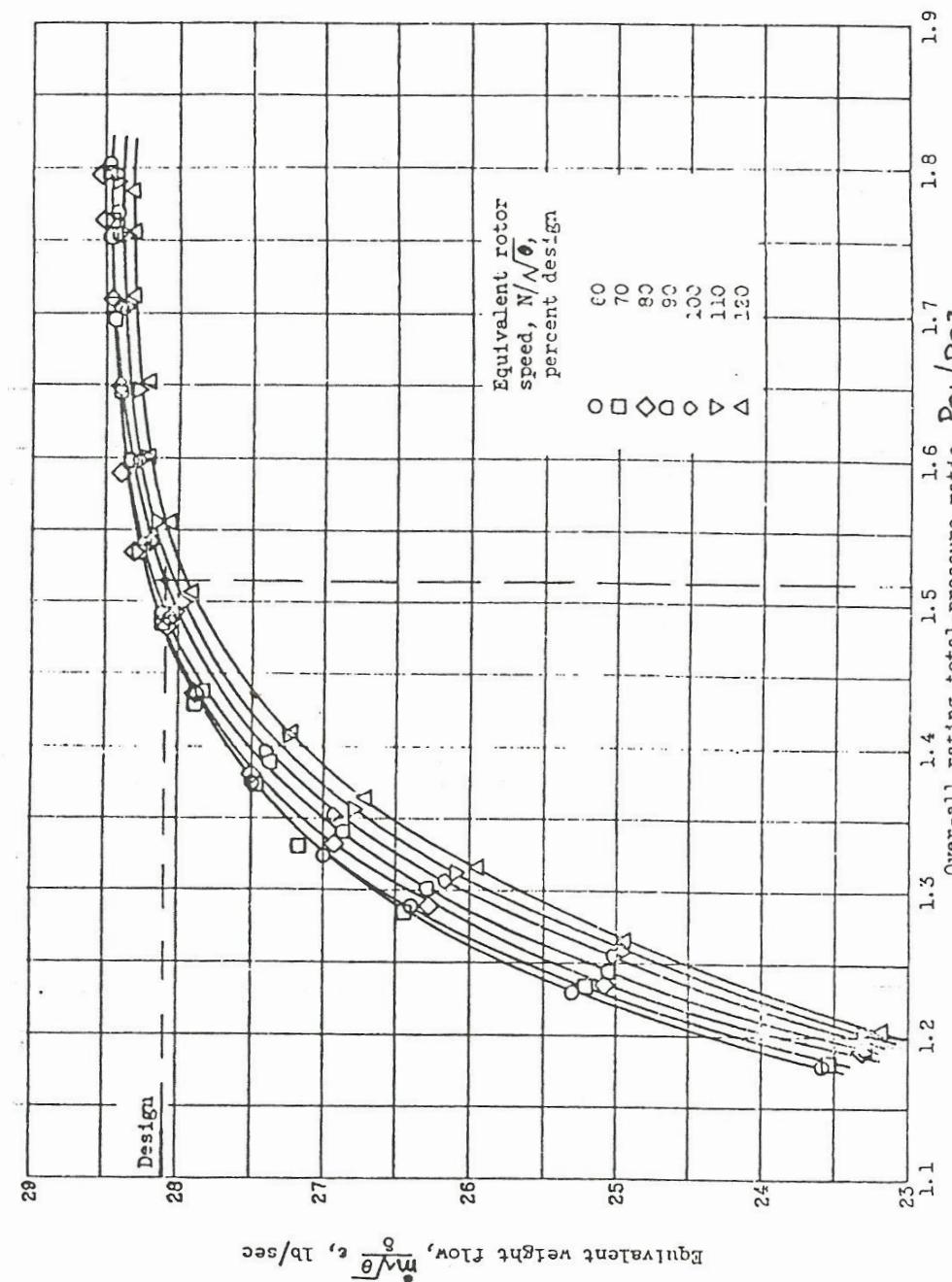


Figura 4.11. Flujo másico reducido en función de la relación de presión y rpm reducida

Figure 9. - Variation of equivalent weight flow with rating pressure ratio for values of constant equivalent rotor speed.

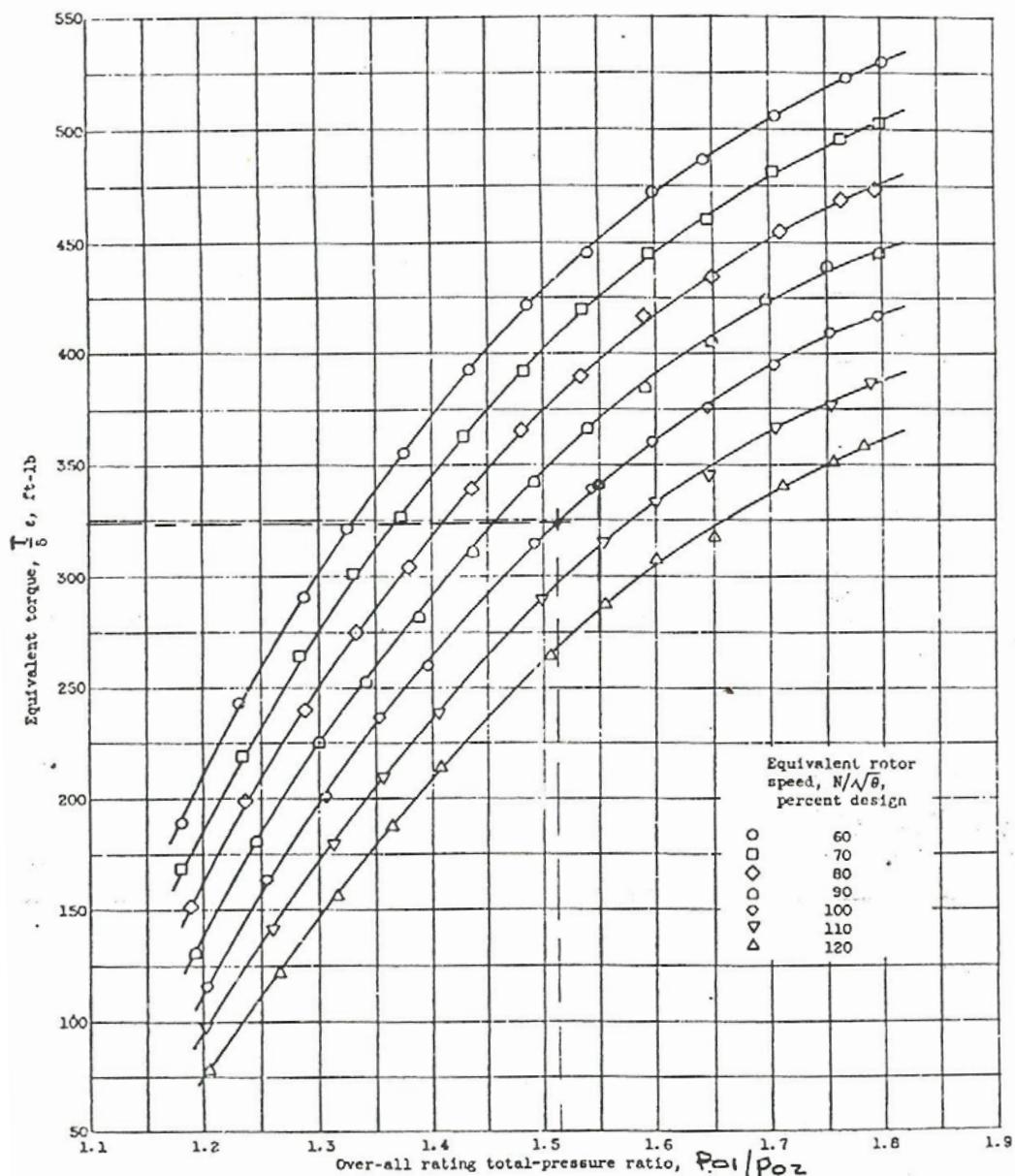


Figura 4.12. Torque reducido en función de la relación de presión y rpm reducida

4.12. Problemas

4.1 Se tiene un **mapa de equilibrio**. **Figura 4.4**.

Este compresor modelo funcionará en un sitio donde la presión atmosférica es 75 KPa y la temperatura promedio 10°C. **Determine: el flujo másico, la velocidad de giro y la presión de descarga del compresor en estas condiciones.**

Si se construye un compresor con un diámetro 25% más grande que el modelo para trabajar en el mismo sitio (presión atmosférica es 75 KPa y la temperatura promedio 10°C) **con que flujo másico se podrá trabajar este compresor y a qué velocidad se debe hacer girar para que trabaje en condiciones de similitud respecto a las de diseño.**

4.2 Se tiene un compresor cuyo **mapa de equilibrio** se muestra **Figura 4.5** y tiene eficiencia mecánica 98%. Tomando del mapa el punto de diseño para un régimen de revoluciones de 48000 RPM. **Calcule la presión total de descarga y la potencia del motor** para que el compresor trabaje en un proceso industrial con 98 KPa y 35°C de propiedades totales en la entrada. Si en el proceso industrial se hace trabajar con un flujo mísico de 0.5834 Kg/s, **calcule la presión total de descarga y la potencia del motor.**

$$P_s=101.35 \text{ KPa} \text{ y } T_s=288 \text{ K}$$

4.3 El compresor de la figura 4.5 se va a usar en un sitio con presión y temperatura local 75 KPa y 8 °C. El compresor tiene una eficiencia mecánica de 95%.

Para que el compresor trabaje en condiciones equivalentes a máxima eficiencia en el sitio de trabajo Calcular: el flujo mísico con el que debe trabajar el compresor; presión de descarga; el flujo mísico con el que entraría en bamboleo y potencia del motor en el proceso industrial.

Use las condiciones de diseño y Estime: Tipo, eficiencia y tamaño aproximado del compresor, compare la eficiencia con la obtenida en el mapa de equilibrio.

Si se construye un compresor igual al de la figura 4.5 pero más grande $\lambda=2.5$, Para que éste compresor trabaje en condiciones equivalentes a máxima eficiencia en el mismo sitio de trabajo Calcular: el flujo mísico con el que debe trabajar el compresor; presión de descarga, el flujo mísico con el que entraría en bamboleo y potencia del motor en el proceso industrial.

4.4 Tomando como referencia el diagrama de equilibrio del compresor Figura 4.5, condiciones estándar 288 K y 101.35 KPa, girando a 44000 RPM con una eficiencia adiabática de 76% (condiciones de diseño). Se quiere usar este compresor en un proceso industrial para un sistema de aire comprimido ubicado en un sitio donde $P_{atm}=81 \text{ KPa}$ y $T_{amb}=21^\circ\text{C}$.

Calcular:

Flujo mísico operado en el proceso industrial en el punto de diseño.

Flujo mísico para que el compresor entre en bamboleo en el proceso industrial.

RPM del compresor en el proceso industrial en el punto de diseño.

El diámetro comercial del tubo para que el número de Mach no exceda el valor 0.4 cuando se operan condiciones de diseño en el proceso industrial.

Presión Total de Descarga y Potencia del Motor en proceso industrial si se hace trabajar en un punto de operación donde el flujo mísico es 0.49 Kg/s

4.5 Se tiene un **mapa de equilibrio** de un compresor cuyo motor de accionamiento se hace girar a $80 \times 10^3 \text{ RPM}$ (Condición de diseño). Ver mapa de equilibrio **Figura 4.4**.

Este compresor funcionará en un sitio donde la presión atmosférica es 79 KPa y la temperatura promedio 8°C. **Determine: el flujo mísico, la velocidad de giro y la presión de descarga del compresor en estas condiciones.**

Si se construye un compresor con un diámetro 50% más grande que el modelo para trabajar en el mismo sitio (presión atmosférica es 79 KPa y la temperatura promedio 8°C) **con que flujo mísico se podrá trabajar este compresor y a qué velocidad se debe hacer girar para que trabaje en condiciones de similitud respecto a las de diseño.**

4.6 Se tiene un compresor cuyo **mapa de equilibrio** se muestra **Figura 4.5**. Este se hace girar a 44000 rpm manejando un flujo mísico igual a 0.5 Kg/s el cual se puede leer en la figura. La eficiencia mecánica de este compresor es 98%. **Calcule la presión total de descarga y la potencia del motor** cuando este compresor trabaja en un lugar a 95 KPa y 23°C. Si en este lugar se hace trabajar con un flujo mísico de 0.0913 kg/s, **calcule la presión total de descarga y la potencia del motor.**

4.7 Con referencia a la figura 4.5. Se tienen dos compresores C1 y C2, exactamente iguales. El compresor C1 se pone en funcionamiento en un proceso industrial en donde la temperatura de entrada es aproximadamente 42°C y la presión 95 KPa, manejando un flujo mísico de 0.67 Kg/s girando a 58569 RPM. El compresor C2 se encuentra trabajando en un proceso industrial con una presión de entrada de 70 KPa y una temperatura de 5°C y maneja un flujo mísico de 0.32 Kg/s girando a 45190 RPM. ¿Cuál de los dos compresores trabaja aproximadamente en las condiciones de diseño, es decir, en el punto de máxima eficiencia? Escriba la eficiencia a la que está trabajando cada compresor así como las presiones de descarga.

Qué flujo mísico y a qué régimen de revoluciones debería funcionar el compresor que en el proceso industrial trabaja con la menor eficiencia, para que su funcionamiento cambie a las condiciones de diseño, es decir, con máxima eficiencia.

4.8 Un compresor se experimenta en un día cuando el barómetro marca 28.73 in Hg y la temperatura ambiente es 56°F, midiéndose una presión de descarga de 47.4 psig y un flujo mísico de aire de 39.3 lbm/s. El compresor se modifica geométricamente para tratar de mejorar su funcionamiento. Posterior a las modificaciones se experimenta nuevamente en un día cuando el barómetro marca 29.88 in Hg y la temperatura ambiente es 29°F, midiéndose una presión de descarga de 49.6 psig y un

flujo másico de aire de 41.1 lbm/s . Las RPM para ambas pruebas se mantienen constantes. ¿Se logró alguna mejora con las modificaciones?

4.9 Un compresor de turbina de gas para aviación se diseña para trabajar a 10000 RPM , con 75 lbm/s y una relación de compresión de 4. Las condiciones de diseño asumen aire estándar a la entrada. Cuando el compresor trabaja a 35000 ft de altura se miden una presión de descarga de 10.37 psig y una velocidad de 8720 RPM . Estimar el flujo másico a través del compresor bajo éstas condiciones y justifique su respuesta.

4.10 La figura 4.5 es el mapa de equilibrio de un compresor que se utiliza para trabajar en un proceso industrial en donde las condiciones de entrada son: 27°C y 95 KPa . En condiciones normales equivalentes a las de diseño el compresor se hace funcionar en el proceso industrial con un flujo másico de 0.6888 Kg/s y se hace girar a 61236 RPM . Calcule la potencia mecánica requerida para un prototipo de mayor tamaño que se debe hacer trabajar en condiciones equivalentes a las de diseño del compresor cuyo mapa de equilibrio se muestra, para esto se sabe que el prototipo impulsa un flujo másico equivalente en condiciones estándar de diseño de 1.69 Kg/s . La eficiencia mecánica tanto del modelo como del prototipo se estima en un 97%.

Calcule la relación entre la potencia mecánica del prototipo y la potencia mecánica del modelo cuando ambos trabajan en las condiciones estándar de diseño.

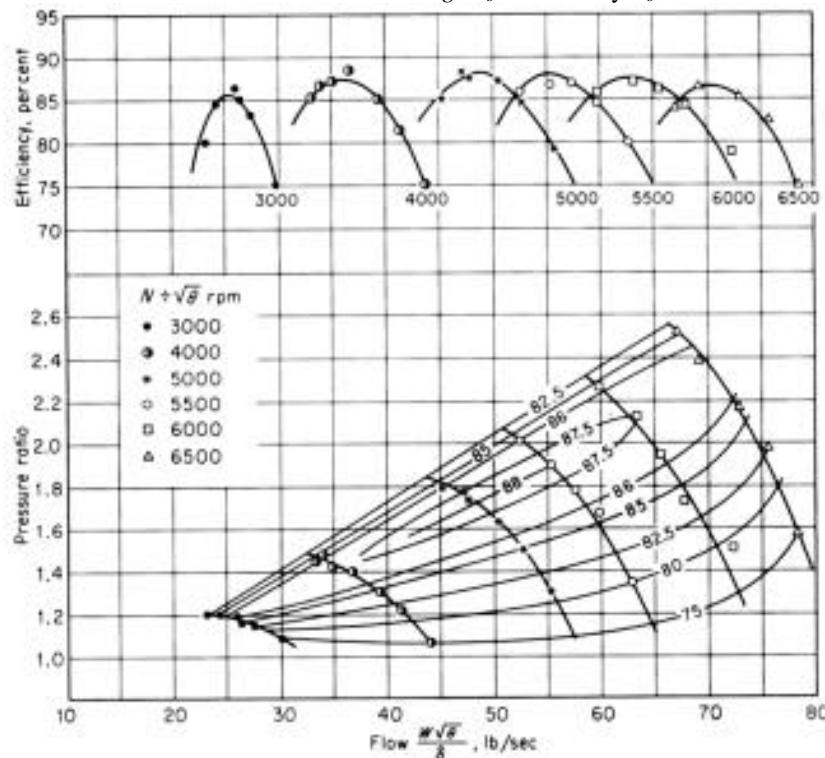
Calcule la potencia mecánica del prototipo cuando se hace trabajar en el proceso industrial.

Si se modifica el régimen de revoluciones del prototipo en el proceso industrial para que la relación de presiones sea igual a 2 en el punto de mayor eficiencia. Calcule el régimen de revoluciones al cual se tendrá que hacer girar el compresor en el proceso industrial y el flujo másico que impulsará.

4.11 En un proceso industrial entra AIRE a 22°C y 100 KPa ($k=1.4$, $R=287 \text{ J/KgK}$, $C_p=1005 \text{ J/KgK}$) al impulsor de un compresor centrífugo cuyo mapa de equilibrio se muestra. Cálculos en el punto de diseño en el proceso industrial dan un rendimiento global del compresor de 85% y hacen girar el compresor a 5313 RPM con un flujo másico de 23.53 Kg/s . Un manómetro colocado en el ducto de descarga del compresor mide una presión de 65 KPa . Calcular para el proceso industrial el número de *Mach*, el diámetro en el ducto de descarga del compresor y la potencia mecánica.

Si en el proceso industrial se incrementa el régimen de revoluciones del compresor hasta el valor máximo posible según el mapa de funcionamiento para incrementar la relación de presiones y el flujo másico, cual sería entonces el régimen de revoluciones al cual se debe hacer girar el compresor en el proceso industrial. Considerando la mayor eficiencia posible, calcule la nueva potencia mecánica en el proceso industrial en estas condiciones si el rendimiento mecánico del compresor permanece constante independientemente del punto de funcionamiento del compresor.

Haga todos los cálculos en el sistema internacional. $1 \text{ lb}=0.4536 \text{ Kg}$. $P_s=100 \text{ KPa}$ y $T_s=288 \text{ K}$.



Capítulo 5

Fluidodinámica de las Turbomáquinas

- 5.1. Introducción.
- 5.2. Triángulo de Velocidades en el Rotor.
- 5.3. Turbomáquinas radiales y mixtas.
 - 5.3.1. Triángulo de velocidades en Turbomáquinas Generadoras.
 - 5.3.2. Triángulo de velocidades en Turbomáquinas Motoras.
- 5.4 Turbomáquinas axiales.
 - 5.4.1 Turbomáquinas Generadoras axiales.
 - 5.4.2 Turbomáquinas Motoras axiales.
- 5.5 Ecuación de cantidad de movimiento angular.
 - 5.5.1 Aplicación a Turbomáquinas Generadoras.
 - 5.5.2 Aplicación a Turbomáquinas Motoras.
- 5.6 Ecuación de Bernoulli en Términos Energéticos.
- 5.7 Grado de Reacción.
- 5.8 Ecuación de Euler para turbomáquinas hidráulicas generadoras de flujo radial y máxima transferencia de energía.
- 5.9 Triángulos de velocidades de turbinas de acción: Turbina Pelton.
- 5.10. Problemas.

Capítulo 5

Fluidodinámica de las Turbomáquinas

5.1. Introducción.

Para lograr la interacción más eficiente posible con el fluido de trabajo, el estudio de las turbomáquinas requiere el diseño hidrodinámico del rotor que es el órgano intercambiador de energía. Los triángulos de velocidades representan las condiciones del flujo y determinan bajo el principio de conservación de momento angular, el intercambio de energía en el rotor calculado con la ecuación de Euler. Las turbomáquinas son máquinas dinámicas debido a que el intercambio de energía se produce por la variación en la dirección y magnitudes de las velocidades.

5.2. Triángulo de Velocidades en el Rotor.

Se supone que el flujo es unidimensional; es decir, las propiedades varían en la dirección de movimiento del fluido y son uniformes sobre cualquier sección de flujo, así que, la velocidad puede representarse por un vector único y puede variar solamente en la dirección de flujo.

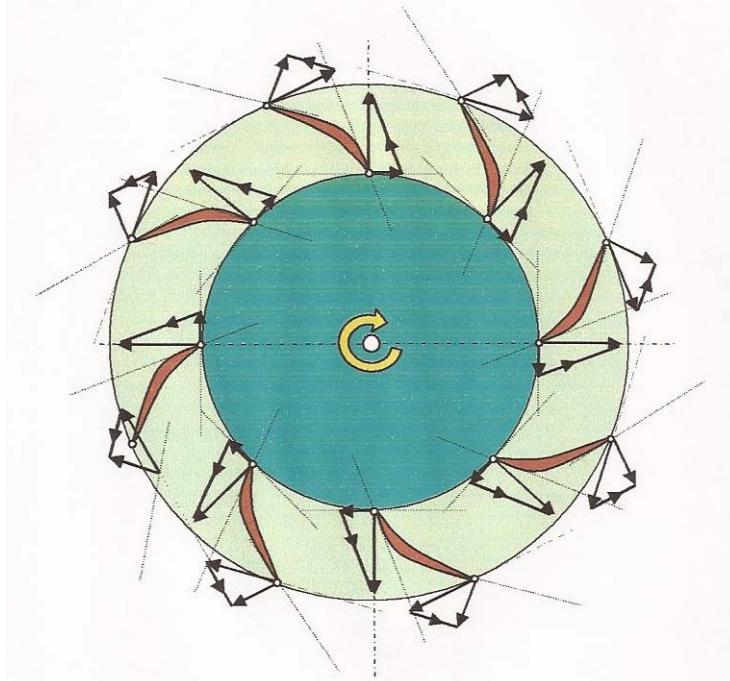


Figura 5.1. Triángulos de velocidades en la entrada y salida de un rotor de una turbomáquina centrífuga. Se puede observar que todos los triángulos de la entrada son iguales y diferentes a todos los triángulos de velocidades iguales de la salida.

En todos los tipos de turbomáquinas, los triángulos de velocidades se forman con las velocidades absoluta, tangencial y relativa debido al efecto dinámico de rotación.

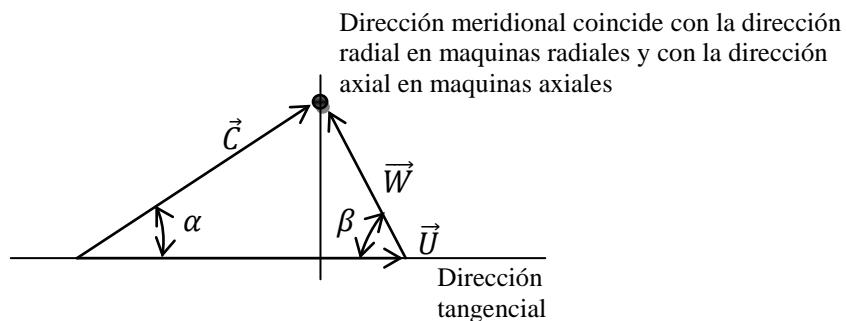


Figura 5.2 Triángulo de velocidades y ángulos

\vec{C} es la velocidad absoluta del fluido, es la velocidad vista por un observador fijo, por ejemplo en la carcasa.

\vec{U} es la velocidad tangencial del alabe

\vec{W} es la velocidad relativa, es la velocidad vista por un observador que gira con el rotor.

α es el ángulo que se forma entre la velocidad absoluta y la dirección tangencial o axial.

β es el ángulo que se forma entre la velocidad relativa y la dirección tangencial o axial.

5.3. Turbomáquinas radiales y mixtas

\vec{U} = velocidad tangencial del alabe a una distancia ' r ' del centro de rotación. Es perpendicular al radio y dirigida en el sentido de rotación.

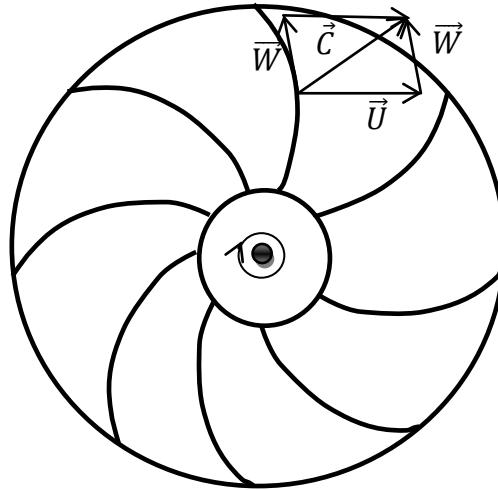


Figura 5.3. Triángulo de velocidades en una Turbomáquina Generadora radial

En base a la figura (5.3), en cualquier punto sobre la línea media entre alabes se observan las siguientes velocidades:

\vec{W} = velocidad relativa del fluido con respecto al rotor. Sigue la dirección tangente a la línea media entre alabes. Vista por un observador situado sobre el rotor y girando a la misma velocidad angular.

Ω = velocidad angular del rotor [rad/s]

$$N = RPM$$

$$\Omega = \frac{2\pi N}{60}$$

$$U = \frac{\pi D N}{60}$$

Dirección meridional coincide con la dirección radial en maquinas radiales

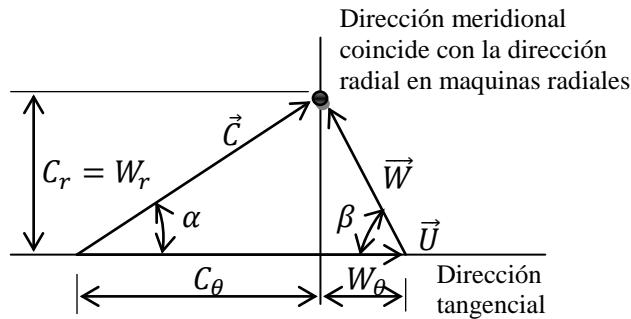


Figura 5.4. Triángulo de velocidades en Turbomáquinas radiales y mixtas.

Se cumple la ecuación vectorial: $\vec{C} = \vec{U} + \vec{W}$. La Figura 5.4 muestra el triángulo de velocidades en detalle.

$$\vec{C}_\theta = \vec{U} + \vec{W}_\theta \quad (5.1)$$

$$|\vec{U}| = |\vec{C}_\theta| + |\vec{W}_\theta| \quad (5.2)$$

C_θ = componente de C que produce intercambio de energía entre el fluido y el rotor por medio del principio de conservación de momento angular.

-
- C_r = componente de C que se usa para calcular el flujo másico a través del rotor por medio del principio de conservación de masa.
- β = ángulo entre la velocidad relativa W y la dirección tangencial. Es igual ángulo del alabe, β' , si la conducción del fluido es perfecta, ya que en este caso \vec{W} es tangente al alabe (ver Figura 5.5).
- α = ángulo entre la velocidad absoluta C y la dirección tangencial.

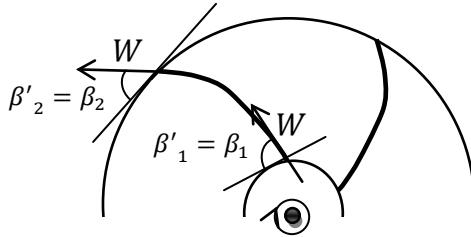


Figura 5.5. Conducción perfecta: Ángulo de flujo igual al ángulo del álabe.

5.3.1. Triángulo de velocidades en Turbomáquinas Generadoras

Se utiliza el subíndice 1, para representar los triángulos de velocidades en la entrada del rotor y el subíndice 2, para representar las condiciones en la salida del rotor.

A la entrada del rotor, el flujo puede llegar con un ángulo β_1 diferente al ángulo del alabe β_1' como se señala en la Figura 5.6; es decir, el vector \vec{W}_1 no entra tangente al alabe. El flujo llega entonces con un ángulo de incidencia, i , el cual puede ser positivo o negativo. En el punto de diseño de la máquina se desea que la incidencia sea nula o muy pequeña.

A la descarga del rotor, el flujo siempre sale con un ángulo β_2 menor que el ángulo del alabe β_2' como se muestra en la Fig. 5.6 debido al fenómeno de deslizamiento.

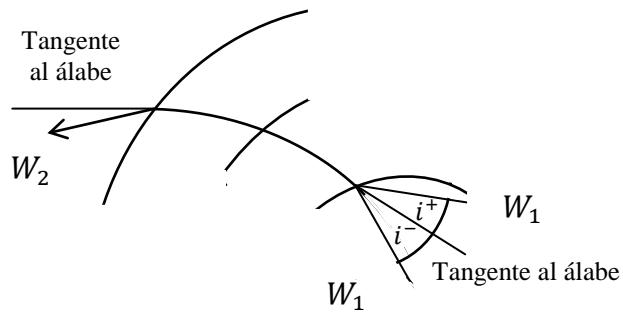


Figura 5.6. Ilustración de los fenómenos de incidencia y deslizamiento

Sin embargo, para simplificar la situación, en este Capítulo se supone que el fluido es conducido perfectamente por el rotor; es decir, no existe incidencia ni deslizamiento y los ángulos de flujo β son iguales a los ángulos del alabe β' .

Los canales móviles actúan como difusores para la velocidad relativa \vec{W} y los canales fijos actúan como difusores para la velocidad absoluta \vec{C} ; por lo tanto, $W_2 < W_1$ y $C_2 < C_1$. Además, $U_2 > U_1$ porque el radio de salida es mayor que el radio de entrada $r_2 > r_1$ y $C_2 > C_1$ porque se le está comunicando energía al fluido.

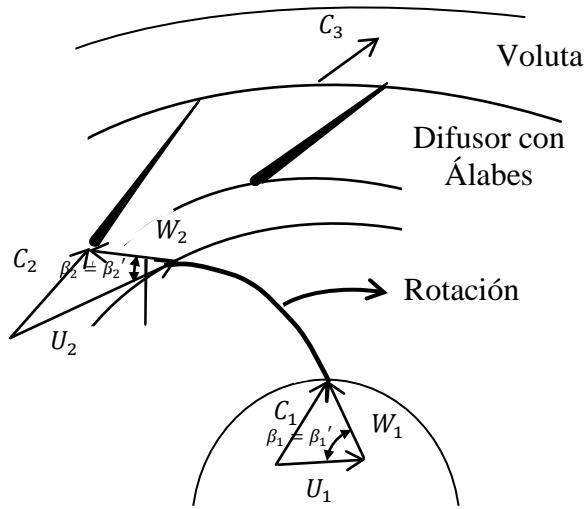
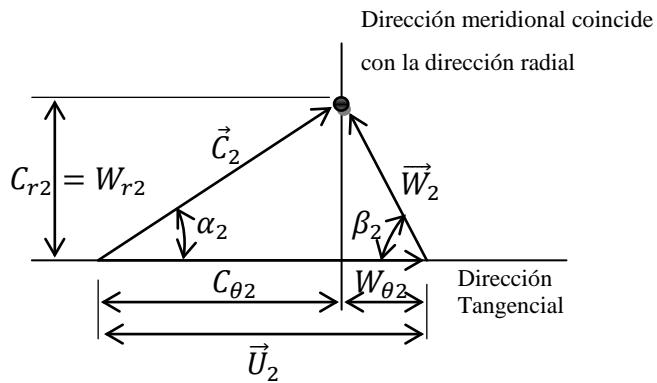
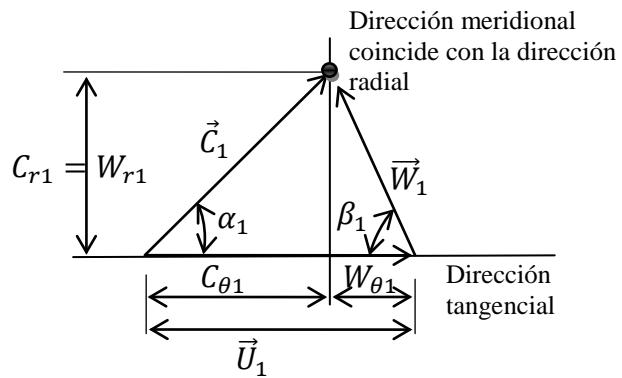


Figura 5.7. Triángulos de velocidades para Turbomáquina Generadora Centrífuga.

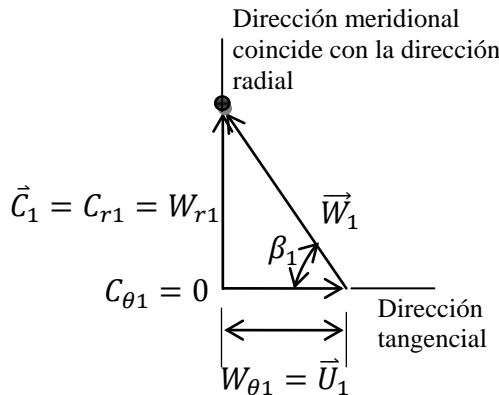


5.8 Triángulo de velocidades en la salida del rotor:



5.9. Triángulo de velocidades en la entrada del rotor:

Cuando la velocidad absoluta entra al rotor en dirección radial, el triángulo de velocidades es un triángulo rectángulo con $\alpha_1 = 90^\circ$

Figura 5.10. Triangulo de velocidades con $\alpha_1 = 90^\circ$

En una bomba centrífuga con entrada y salida radial en el rotor, el área de flujo en la entrada y salida, despreciando el espesor de los álabes, se calcula con la ecuación:

$$A = 2\pi r B \quad (5.3)$$

donde:

- A = área de flujo
- r = radio del rotor
- B = ancho del rotor

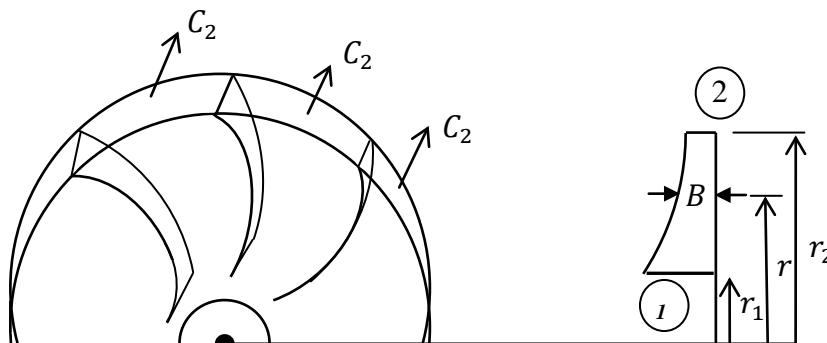


Figura 5.11. Turbomáquinas generadora con entrada y salida radial en el rotor.

Esquema de las variables importantes para calcular el caudal.

El área de flujo en la entrada es:

$$A_1 = 2\pi r_1 B_1 \quad (5.4)$$

El área en la salida del flujo en el rotor:

$$A_2 = 2\pi r_2 B_2 \quad (5.5)$$

El caudal de flujo se calcula:

$$Q = \iint \vec{C} \circ d\vec{A} = \iint \vec{W} \circ d\vec{A} = \iint C dA \cos\theta \quad (5.6)$$

Con θ el ángulo entre el vector \vec{C} y el vector $d\vec{A}$, este último perpendicular al área y dirigido hacia afuera.

$$Q = W_r A = C_r A$$

$$Q = Q_1 = Q_2$$

De esta forma, se debe usar la componente radial de la velocidad absoluta para calcular el flujo a través de la turbomáquinas hidráulicas radiales.

$$Q = C_{r1} 2 \pi R_1 B_1 = C_{r2} 2 \pi R_2 B_2 \quad (5.8)$$

En Turbomáquinas térmicas se debe usar el flujo másico $\dot{m} = \rho Q$.

$$\dot{m} = \rho_1 C_{r1} 2 \pi R_1 B_1 = \rho_2 C_{r2} 2 \pi R_2 B_2 \quad (5.9)$$

En una bomba centrífuga con entrada axial, el área de flujo en la entrada, despreciando el espesor de los álabes, se calcula con la ecuación:

$$A_1 = \pi(r_t^2 - r_r^2) \quad (5.10)$$

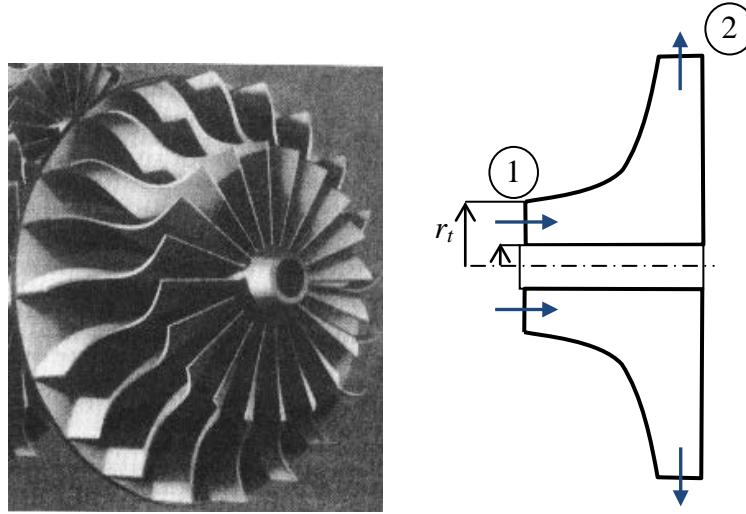


Figura 5.12. Esquema de un rotor centrífugo con entrada axial

Donde:

- r_r = radio de raíz del rotor
- r_t = radio de tope del rotor en la entrada.

El triángulo de velocidades en la entrada de una turbomáquina generadora de flujo radial con entrada axial se calcula en el radio medio calculado entre el radio de raíz y el radio de tope de la entrada.

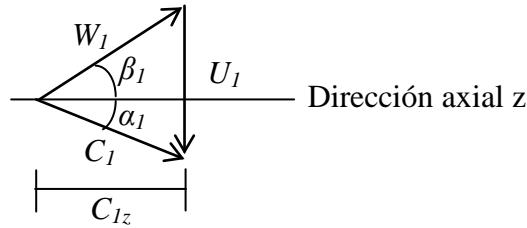


Figura 5.13. Triángulo de velocidades en la entrada axial de un rotor centrífugo

Donde:

$$U_1 = \frac{\pi D_m N}{60} \quad (5.11)$$

$$D_m = 2r_m = \frac{D_t + D_r}{2} \quad (5.12)$$

En una bomba centrífuga con entrada axial, la componente axial de la velocidad absoluta, es la velocidad para calcular el caudal:
 $Q = C_{1z} \pi (r_t^2 - r_r^2)$ (5.13)

En turbomáquinas térmicas se debe calcular el flujo másico.

Con la entrada axial, como se observa en la figura 5.13 y 5.14, los ángulos se forman con la dirección axial. Si el fluido entra a la maquina en la dirección axial, se tiene:

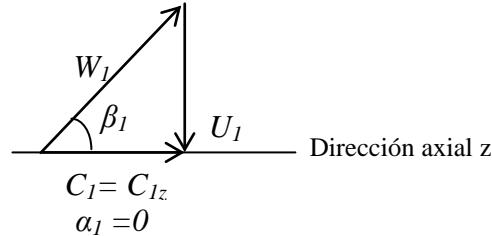


Figura 5.14. Triángulo de velocidades en la entrada axial de un rotor centrífugo con la velocidad absoluta en la dirección axial

En este caso la componente de C_1 en la dirección de U , $C_{1\theta}$ es igual a cero.

5.3.2 Triángulo de velocidades en Turbomáquinas Motoras.

Puede existir incidencia a la entrada del alabe; sin embargo, el deslizamiento no existe en Turbomáquinas Motoras. El ángulo de salida del flujo β_3 siempre es menor que el ángulo del alabe β'_3 en este tipo de máquinas debido al fenómeno de desviación; el vector \vec{W} no sale tangente al álabe debido principalmente al crecimiento de la capa límite. Sin embargo, para simplificar se supone que los ángulos del flujo β son iguales a los ángulos del alabe β' . En las turbomáquinas motoras se designa la entrada a la turbina con el subíndice 1. El subíndice 2 representa la salida del estator y por ende la entrada al rotor, finalmente 3 representa la salida del rotor, los triángulos de velocidades se dibujan entre 2 y 3.

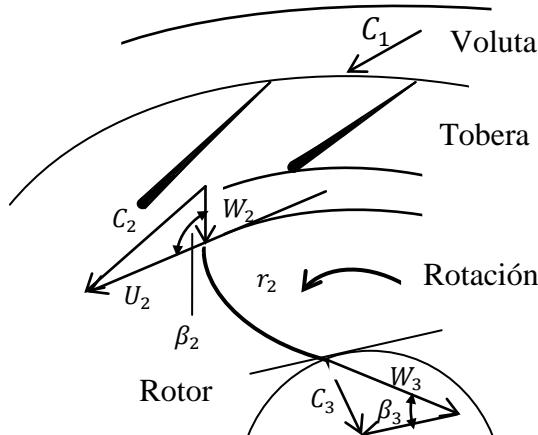


Figura 5.15. Triángulos de velocidades para Turbomáquina Motora radial o mixta.

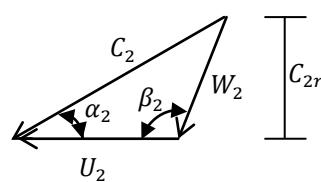
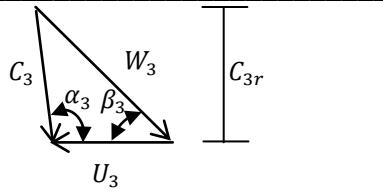


Figura 5.16. Triángulo de entrada al rotor:



5.17. Triángulo de salida del rotor:

Los canales fijos actúan como toberas para la velocidad absoluta \vec{C} y los canales móviles actúan como toberas para la velocidad relativa \vec{W} ; por lo tanto, $C_2 > C_1$ y $W_2 > W_1$. Además, $U_2 > U_3$ porque $r_2 > r_3$ y $C_3 < C_2$ porque se extrae energía del fluido. Resulta ventajoso que la velocidad absoluta en la salida del rotor tenga la dirección radial, lo que representa el mayor aprovechamiento posible de la energía cinética por parte de la máquina. En este caso el triángulo de velocidades en la salida es un triángulo rectángulo y la componente de C_3 en la dirección tangencial, $C_{3\theta}$ es igual a cero.

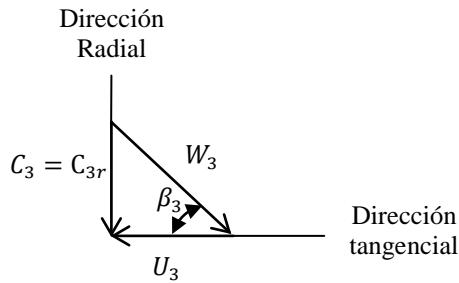


Figura 5.18. Triángulo de velocidades en la salida de un rotor centrífugo con la velocidad absoluta en la dirección radial

El caudal en la entrada del rotor se calcula con la ecuación:

$$Q = C_{2r} \pi D_2 B_2 \quad (5.14)$$

En una turbina radial con salida radial tal como se muestra en la figura 5.19, el caudal se calcula con la ecuación:

$$Q = C_{3r} \pi D_3 B_3 \quad (5.15)$$

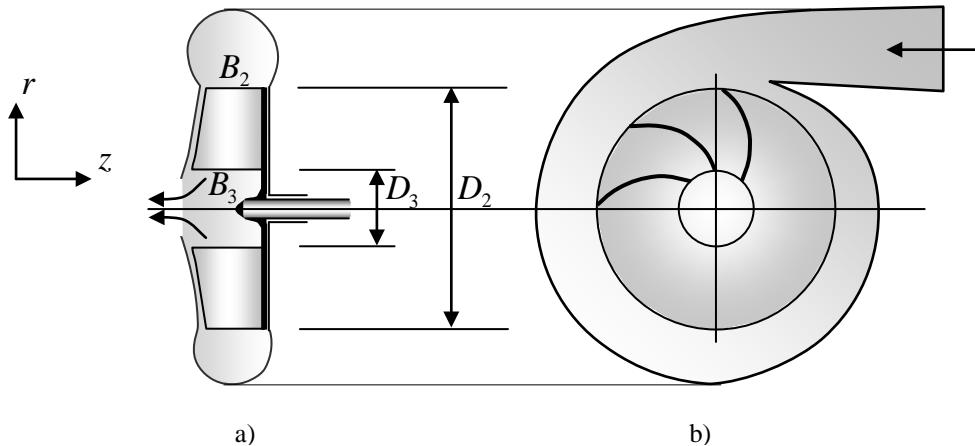


Figura 5.19. Turbina radial con salida radial

En una turbina radial con salida axial tal como se muestra en la figura 5.20, el triángulo de velocidades se dibuja como se muestra:

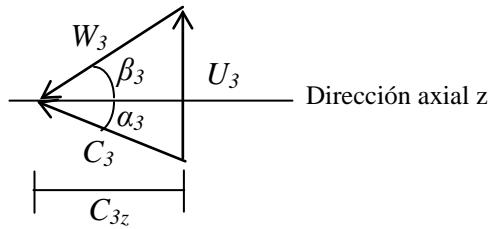


Figura 5.20. Triángulo de velocidades de un rotor centrífugo de una turbomáquina motora con salida axial

Si el fluido sale de la turbina en la dirección axial se tiene:

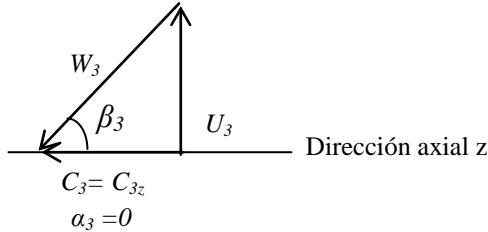


Figura 5.21. Triángulo de velocidades de un rotor centrífugo de turbomáquina motora con salida axial y la velocidad absoluta en la dirección axial

En este caso, el caudal se calcula con la ecuación:

$$Q = C_{3z} \pi (r_t^2 - r_r^2) \quad (5.16)$$

En turbomáquinas térmicas se debe calcular el flujo másico.

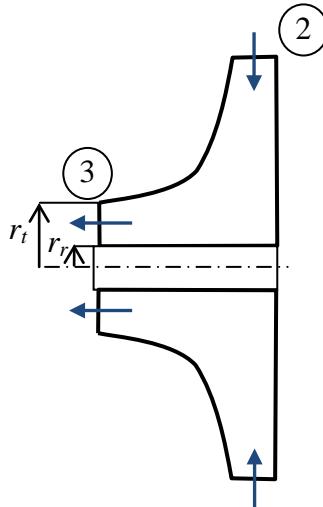


Figura 5.22. Rotor centrífugo de turbomáquina motora con salida axial

5.4 Turbomáquinas axiales.

Puede existir incidencia a la entrada del álabe y siempre existe desviación a la salida ya que el vector \vec{W} no sale tangente al álabe debido principalmente al crecimiento de la capa límite sobre la superficie del álabe. Sin embargo, para simplificar se supone que los ángulos de flujo β son iguales a los ángulos del álabe β' , es decir, conducción perfecta.

5.4.1 Turbomáquinas Generadoras axiales

Las figuras 5.23, 5.24 y 5.25 muestran los triángulos de velocidades de entrada y salida del rotor.

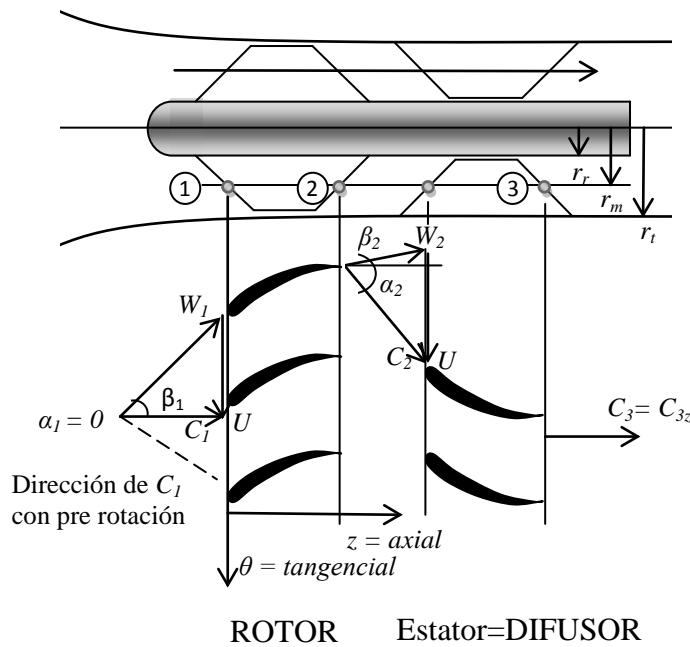


Figura 5.23. Triángulos de velocidades en Turbomáquinas Generadoras axiales.

La Fig. 5.23 muestra los triángulos de velocidades para una situación con entrada axial y una situación general (representada con la línea segmentada) donde la entrada no es axial, tal como se muestra en la figura 5.24. Se cumplen también las ecuaciones vectoriales $\vec{C} = \vec{U} + \vec{W}$. La velocidad tangencial de rotación del alabe \vec{U} se mantiene constante entre la entrada y la salida porque el fluido no cambia su posición radial en su paso a través del rotor, ya que el radio medio se mantiene constante.

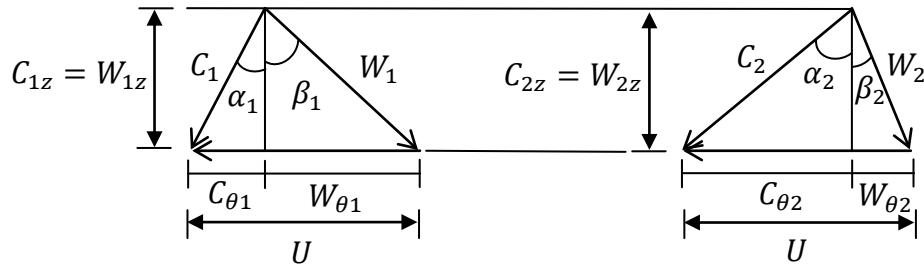


Figura 5.24. Triángulos de velocidades en Turbomáquinas Generadoras axiales.

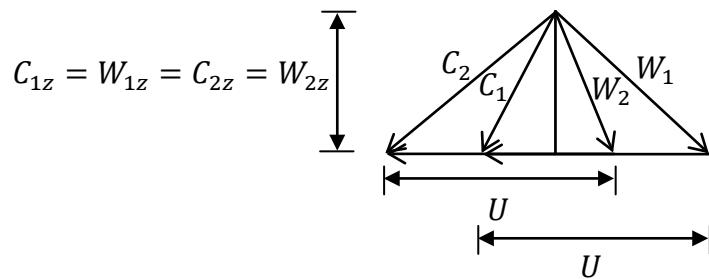


Figura 5.25. Diagrama de vértice común en Turbomáquinas Generadoras axiales.

Los canales móviles actúan como difusores para la velocidad relativa \vec{W} y los canales fijos actúan como difusores para la velocidad absoluta \vec{C} ; por lo tanto, $\vec{W}_2 < \vec{W}_1$ y $C_3 < C_2$. Además, $U_2 = U_1$ porque el radio de salida es igual al radio de entrada $r_2 = r_1$ y

$C_2 > C_1$ porque el rotor le comunica energía al fluido. Por criterio de diseño la componente axial de C , ósea, C_z , debe mantenerse constante a través de la etapa $C_{1z} = C_{2z} = C_{3z}$.

C_θ = componente de \vec{C} que produce intercambio de energía entre el fluido y el rotor por medio de la conservación de momento angular.

C_z = componente de \vec{C} que se usa para calcular el caudal de flujo que pasa a través del rotor por medio del principio de conservación de masa.

β = ángulo entre la velocidad relativa \vec{W} y la dirección axial. Es igual al ángulo del alabe, β' , si la conducción del fluido es perfecta, porque en este caso \vec{W} es tangente a la línea media del alabe.

α = ángulo entre la velocidad absoluta \vec{C} y la dirección axial.

En la figura 5.26 se muestran las variables importantes para calcular la sección transversal de flujo.

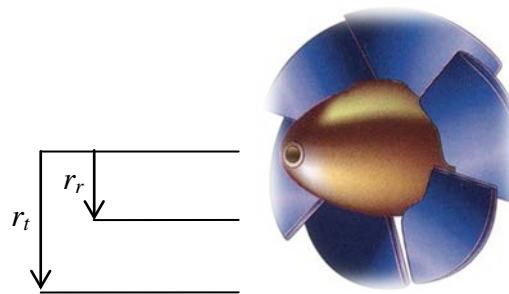


Figura 5.26. Esquema de las variables geométricas que intervienen en el cálculo del caudal

$$A = \pi(r_t^2 - r_r^2) \quad (5.17)$$

Donde:

r_t = radio del tope de los alabes; r_r = radio de raíz de los alabes;

$$Q = \iint \vec{C} \circ d\vec{A} = \iint \vec{W} \circ d\vec{A} = \iint C dA \cos \theta \quad (5.18)$$

Con θ el ángulo entre el vector \vec{C} y el vector $d\vec{A}$, este último perpendicular al área y dirigido hacia afuera.

$$Q = W_z A = C_z A \quad (5.19)$$

$$C_{1z} \pi (r_t^2 - r_r^2)_1 = C_{2z} \pi (r_t^2 - r_r^2)_2 \quad (5.20)$$

En Turbomáquinas Térmicas se debe usar el flujo másico $\dot{m} = \rho Q$.

5.4.2. Turbomáquinas Motoras axiales

Las Figuras 5.27, 5.28 y 5.29 muestran los triángulos de velocidades de entrada y salida

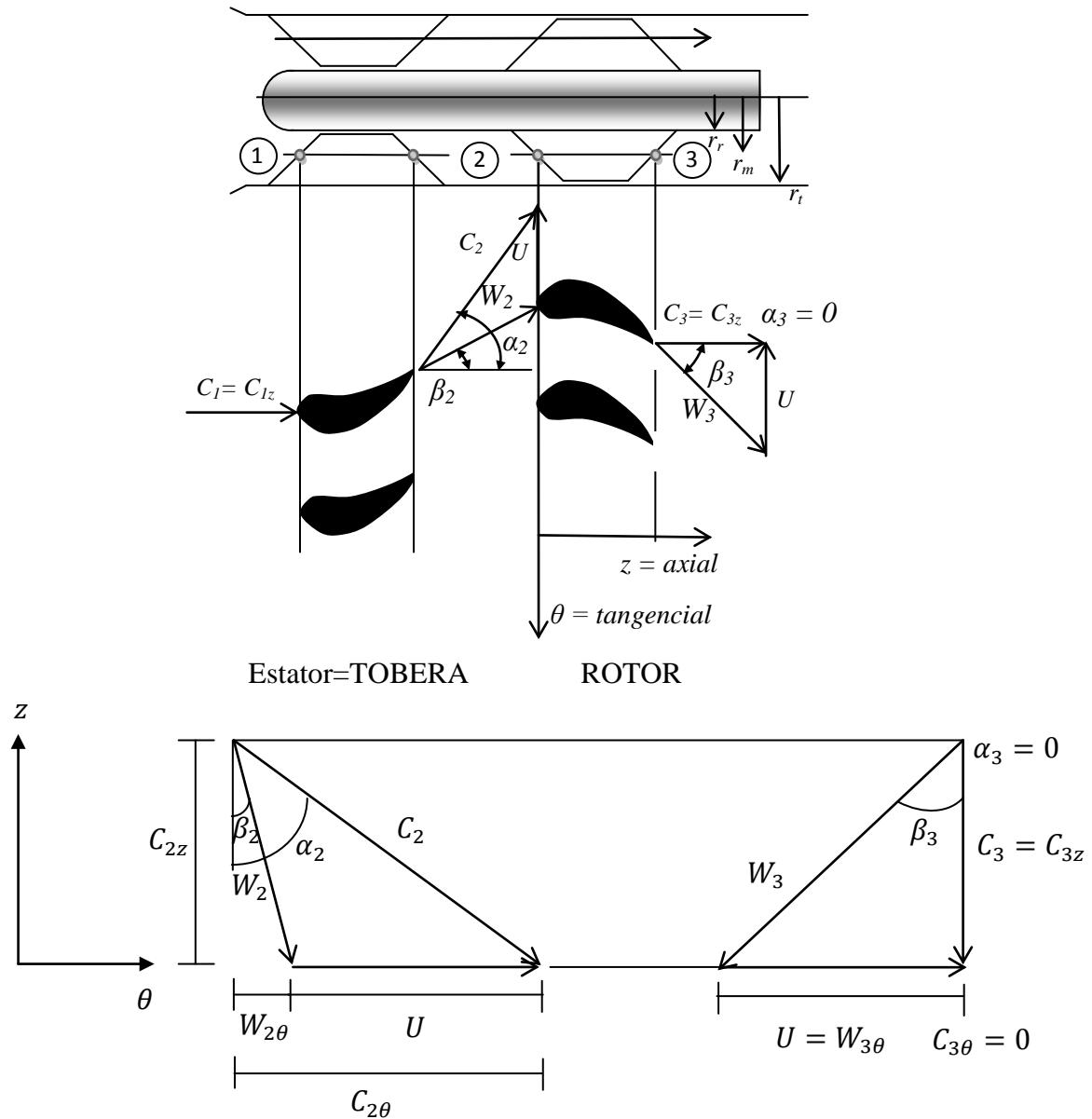


Figura 5.27. Triángulos de velocidades en Turbomáquinas Motoras axiales

La Figura 5.27 muestra en detalle los triángulos de velocidades de entrada y salida para una situación general. La velocidad tangencial de rotación del alabe se mantiene constante entre la entrada y la salida porque el fluido no cambia su posición radial en su paso a través del rotor.

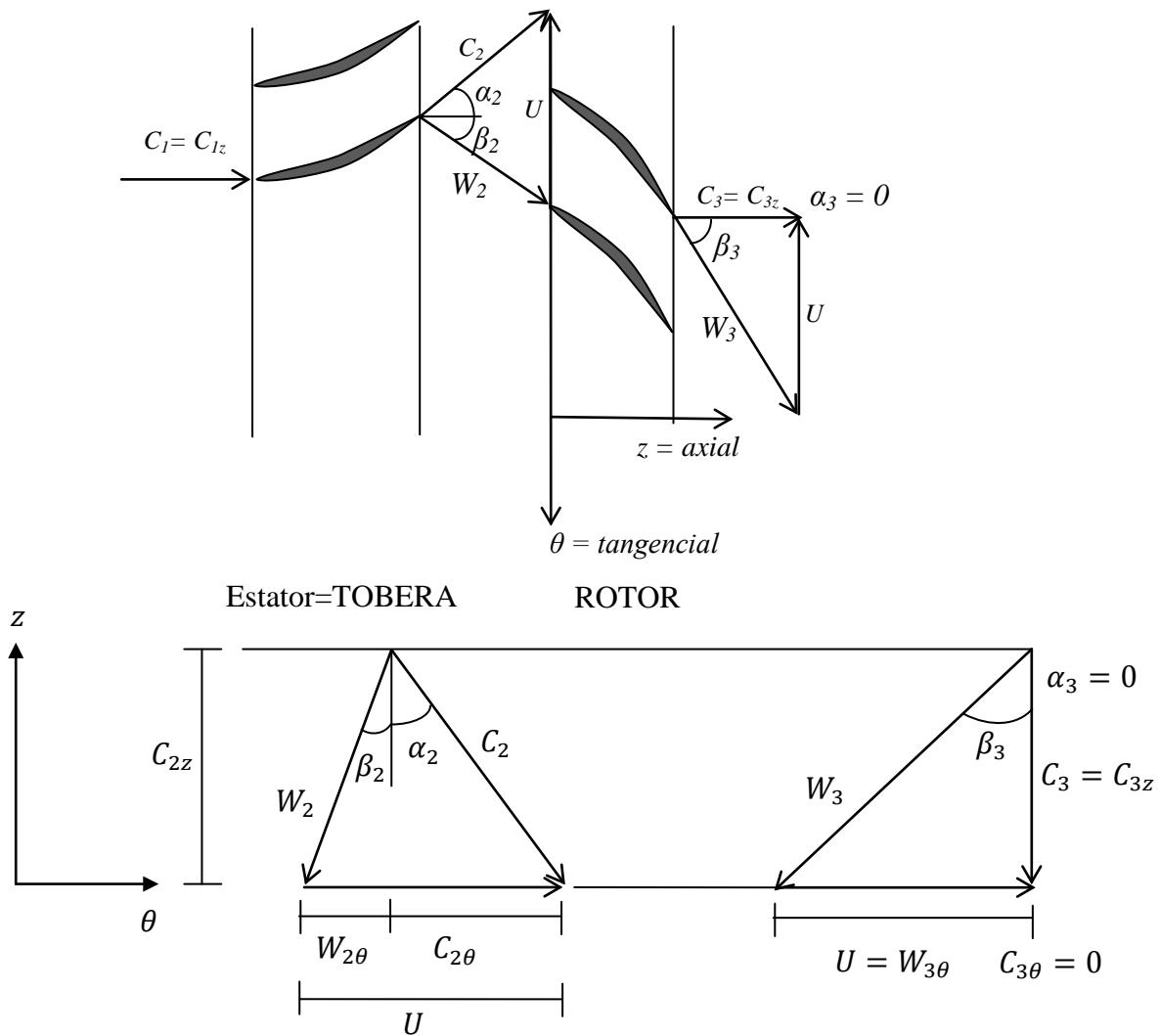


Figura 5.28. Triángulos de velocidades en Turbomáquinas Motoras axiales.

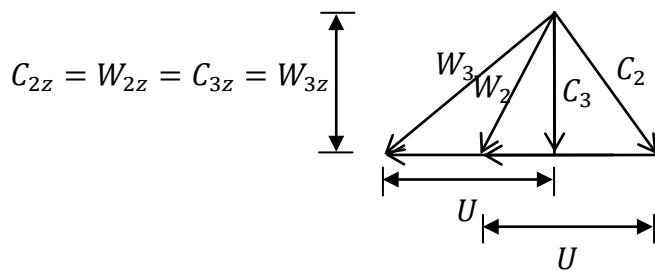


Figura 5.29. Diagrama de vértice común de turbomáquinas motoras axiales

Los canales fijos actúan como toberas para la velocidad absoluta \vec{C} y los canales móviles actúan como toberas para la velocidad relativa \vec{W} ; por lo tanto, $C_2 > C_1$ y $W_3 > W_2$. Además, $U_2 = U_3$ porque el radio medio es constante y $C_3 < C_2$ porque el rotor le extrae energía al fluido. Por criterio de diseño $C_{1z} = C_{2z} = C_{3z}$

5.5 Ecuación de cantidad de movimiento angular.

El principio de conservación de cantidad de movimiento angular aplicado volumen de control finito resulta en:

$$\vec{r} \times \vec{F}_S + \iiint \vec{r} \times \vec{g} \rho dV + \vec{T}_{eje} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint \vec{r} \times \vec{V} \rho dV + \iint \vec{r} \times \vec{V} \rho (\vec{V} \circ d\vec{A})$$

En el análisis de Turbomáquinas se elige un volumen de control fijo que encierra al rotor para evaluar el momento de torsión del eje. Los momentos de torsión debidos a fuerzas de superficie pueden ignorarse y la contribución de la fuerza de gravedad puede despreciarse por simetría. Por lo tanto, para flujo estable, la ecuación de cantidad de movimiento angular se convierte en:

$$\vec{T}_{eje} = \iint \vec{r} \times \vec{V} \rho (\vec{V} \circ d\vec{A}) \quad (5.21)$$

El sistema de coordenadas fijo de la figura 5.30 se elige con el eje z alineado con el eje de rotación de la máquina. Se supone que el fluido entra al rotor en la posición radial r_1 , con velocidad absoluta uniforme C_1 y abandona el rotor en la posición radial r_2 , o velocidad absoluta uniforme C_2 .

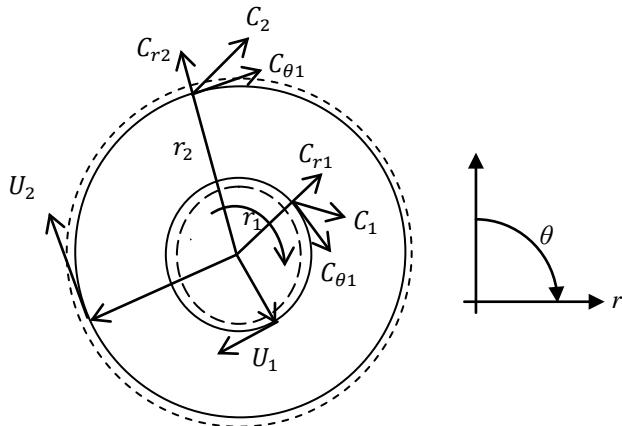


Figura 5.30. Volumen de control finito y componentes de velocidad absoluta

Resolviendo la integral de superficie se tiene:

$$T_{eje} \hat{k} = (r_2 C_{\theta 2} - r_1 C_{\theta 1}) \dot{m} \hat{k} \quad (5.22)$$

o en forma escalar:

$$T_{eje} = (r_2 C_{\theta 2} - r_1 C_{\theta 1}) \dot{m} \quad (5.23)$$

que es la relación básica entre el momento de torsión y el momento angular para todas las Turbomáquinas y generalmente recibe el nombre de ecuación de Euler de las Turbomáquinas.

La potencia en el rotor está dada por el producto escalar de la velocidad angular del rotor y el momento de torsión.

$$\dot{W}_{rotor} = \vec{\Omega} \circ \vec{T}_{eje} = \Omega \hat{k} \circ (r_2 C_{\theta 2} - r_1 C_{\theta 1}) \dot{m} \hat{k} \quad (5.24)$$

$$\dot{W}_{rotor} = \Omega (r_2 C_{\theta 2} - r_1 C_{\theta 1}) \dot{m} \quad (5.25)$$

Introduciendo $U = r\Omega$, donde U es la velocidad tangencial del rotor en el radio r , entonces

$$\dot{W}_{rotor} = (U_2 C_{\theta 2} - U_1 C_{\theta 1}) \dot{m} \quad (5.26)$$

Esta relación es estrictamente válida si no existen pérdidas mecánicas ni pérdidas hidráulicas, en este caso, la potencia en el rotor es igual a la potencia hidráulica y mecánica ya que la eficiencia sería de un 100 %. Las turbomáquinas reales tienen una eficiencia menor del 100%, por lo tanto la ecuación de Euler representaría la potencia intercambiada en el rotor. Dividiendo entre el flujo máscico se obtiene el trabajo específico:

$$\omega_{rotor} = \omega_{1-2} = (U_2 C_{\theta 2} - U_1 C_{\theta 1}) \quad (5.27)$$

Dividiendo entre la gravedad ' g ' se obtiene la altura intercambiada entre fluido rodete, ecuación que se utiliza para turbomáquinas hidráulicas:

$$H_{rotor} = H_{1-2} = \frac{\omega_{1-2}}{g} = \frac{1}{g} (U_2 C_{\theta 2} - U_1 C_{\theta 1}) \quad (5.28)$$

La potencia en el rotor en turbomáquinas hidráulicas se calcula con la ecuación:

$$\dot{W}_{rotor} = \gamma Q H_{rotor} \quad (5.29)$$

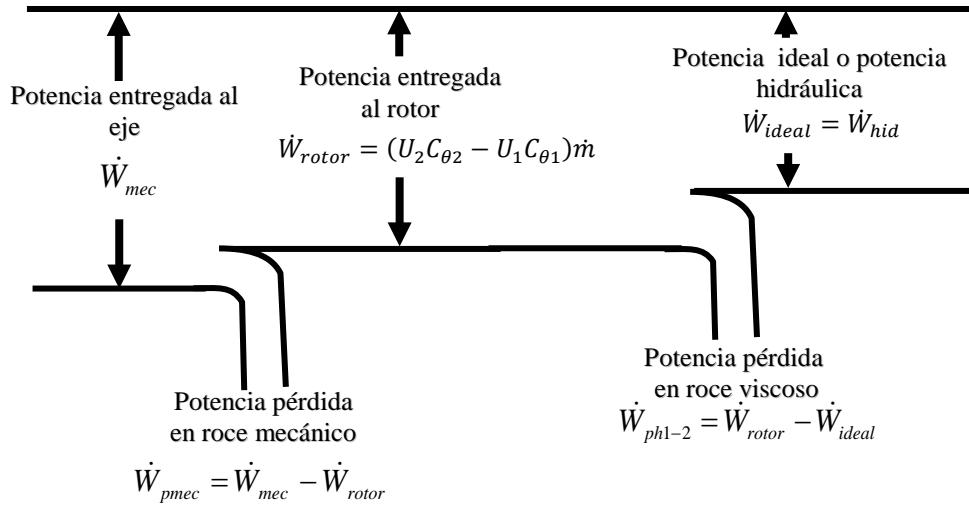


Figura 5.31. Esquema de potencias en turbomáquinas generadoras

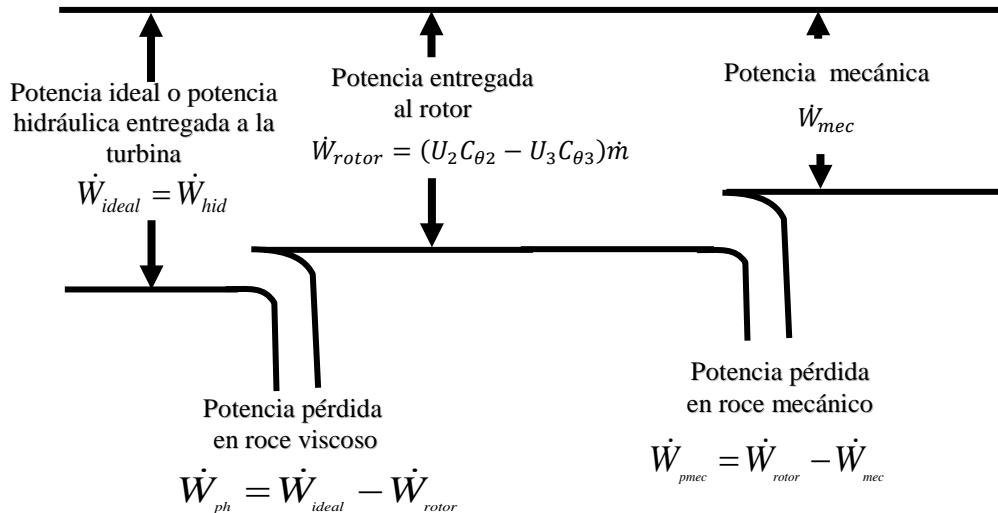


Figura 5.32. Esquema de potencias en turbomáquinas motoras

5.5.1 Aplicación a Turbomáquinas Generadoras.

Turbomáquinas Hidráulicas Generadoras Radiales o Mixtas.

$$H_{rotor} = \frac{1}{g} (U_2 C_{\theta 2} - U_1 C_{\theta 1}) \quad (5.30)$$

Turbomáquinas Térmicas Generadoras Radiales o Mixtas.

$$\omega_{rotor} = (U_2 C_{\theta 2} - U_1 C_{\theta 1}) \quad (5.31)$$

Para máxima transferencia de energía en el rotor la velocidad $C_{\theta 1}$ debe ser nula. Esta condición implica que el triángulo de velocidades a la entrada del rotor debe ser un triángulo recto; es decir, la velocidad absoluta de entrada debe ser meridional o radial.

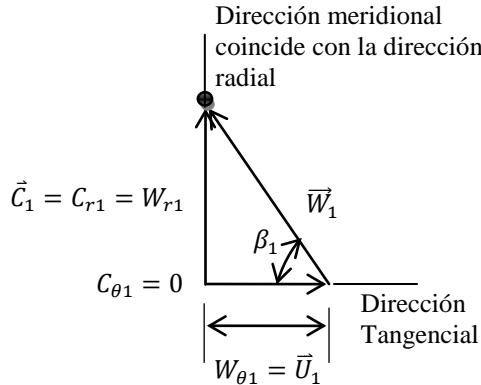


Figura 5.33. Triángulo con velocidad absoluta de entrada meridional o radial

Turbomáquinas Hidráulicas Generadoras Axiales.

$$H_{rotor} = \frac{1}{g} U (C_{\theta 2} - C_{\theta 1}) \quad (5.32)$$

Turbomáquinas Térmicas Generadoras Axiales.

$$\omega_{rotor} = U (C_{\theta 2} - C_{\theta 1}) \quad (5.33)$$

Para máxima transferencia de energía en el rotor la velocidad $C_{\theta 1}$ debe ser nula. Esta condición implica que el triángulo de velocidades a la entrada del rotor debe ser un triángulo recto; es decir, la velocidad absoluta de entrada debe ser axial.

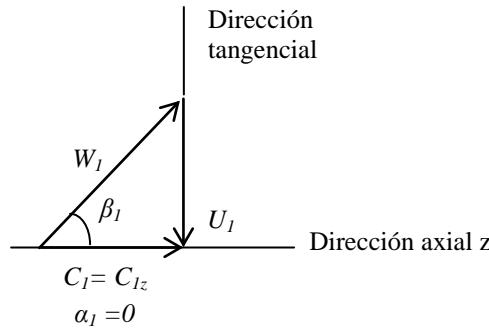


Figura 5.34. Triángulo con velocidad absoluta de entrada axial

5.5.2 Aplicación a Turbomáquinas Motoras.

Turbomáquinas Hidráulicas Motoras Radiales o Mixtas.

$$H_{rotor} = \frac{1}{g} (U_2 C_{\theta 2} - U_3 C_{\theta 3}) \quad (5.34)$$

Turbomáquinas Térmicas Motoras Radiales o Mixtas.

$$\omega_{rotor} = (U_2 C_{\theta 2} - U_3 C_{\theta 3}) \quad (5.35)$$

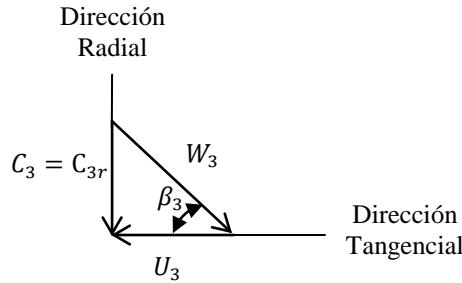


Figura 5.35. Triángulo con velocidad absoluta de salida radial

Para máxima transferencia de energía en el rotor la velocidad $C_{\theta 3}$ debe ser nula; es decir, la velocidad absoluta de salida debe ser meridional o radial.

Turbomáquinas Hidráulicas Motoras Axiales.

$$H_{rotor T} = H_T = \frac{1}{g} U(C_{\theta 2} - C_{\theta 3}) \quad (5.36)$$

Turbomáquinas Térmicas Motoras Axiales.

$$\omega_{rotor T} = \omega_T = U(C_{\theta 2} - C_{\theta 3}) \quad (5.37)$$

Para máxima transferencia de energía en el rotor la velocidad $C_{\theta 3}$ debe ser nula; es decir, la velocidad absoluta de salida debe ser axial.

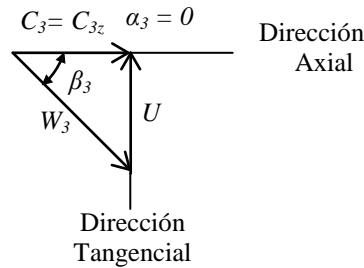


Figura 5.36. Triángulo con velocidad absoluta de salida axial

5.6 Ecuación de Euler en Términos Energéticos

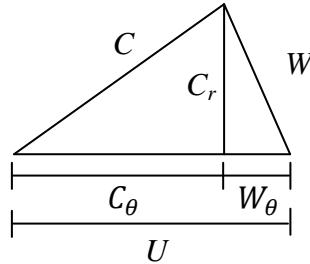


Figura 5.37. Triángulo de velocidades

$$\begin{aligned} C^2 &= C_r^2 + C_\theta^2 & \rightarrow C_r^2 &= C^2 - C_\theta^2 \\ W^2 &= C_r^2 + (U - C_\theta)^2 & \rightarrow C_r^2 &= W^2 - (U - C_\theta)^2 \end{aligned}$$

Igualando se tiene:

$$\begin{aligned} C^2 - C_\theta^2 &= W^2 - (U - C_\theta)^2 \\ C^2 - C_\theta^2 &= W^2 - (U^2 - 2UC_\theta + C_\theta^2) \\ UC_\theta &= \frac{C^2 - W^2 + U^2}{2} \end{aligned} \quad (5.38)$$

La ecuación de Euler para una turbomáquina hidráulica generadora:

$$H_{rotor} = \frac{1}{g} (U_2 C_{\theta 2} - U_1 C_{\theta 1})$$

Sustituyendo la ecuación (5.38) se tiene:

$$H_{rotor} = \frac{1}{g} \left(\frac{C_2^2 - W_2^2 + U_2^2}{2} - \frac{C_1^2 - W_1^2 + U_1^2}{2} \right) \quad (5.39)$$

Arreglando la ecuación se obtiene la ecuación de Euler en términos energéticos para turbomáquinas hidráulicas generadoras, bombas y ventiladores:

$$H_{rotor} = \frac{1}{g} \left(\frac{C_2^2 - C_1^2}{2} + \frac{W_1^2 - W_2^2}{2} + \frac{U_2^2 - U_1^2}{2} \right) \quad (5.40)$$

Escribiendo la ecuación de Bernoulli entre la entrada y la salida del rotor, despreciando la variación en la energía potencial y sin tener en cuenta las perdidas en el mismo, se tendrá:

$$H_{rotor} = \left(\frac{P_2 - P_1}{\gamma} + \frac{C_2^2 - C_1^2}{2g} \right) \quad (5.41)$$

Igualando las ecuaciones (5.40) y (5.41) se tendrá:

$$\frac{P_2 - P_1}{\gamma} = \frac{1}{g} \left(\frac{W_1^2 - W_2^2}{2} + \frac{U_2^2 - U_1^2}{2} \right) \quad (5.42)$$

Evidentemente, el término $\frac{C_2^2 - C_1^2}{2g}$ representa la altura dinámica intercambiada en el rotor.

Los términos $\frac{W_1^2 - W_2^2}{2g} + \frac{U_2^2 - U_1^2}{2g}$ representan la altura de presión intercambiada en el rotor.

La altura de Euler es la altura total que representa la suma del intercambio de energía dinámica y de presión entre el fluido y el rotor debido a la acción dinámica que produce las variaciones en las velocidades del fluido según el principio de conservación de momento angular.

$$H_{rotor} = \frac{1}{g} (w_{dinamica} + w_{presión}) = H_{dinamica} + H_{presión} \quad (5.43)$$

La ecuación de Euler en términos energéticos para una turbomáquina térmica generadora:

$$w_{rotor} = w_{dinamica} + w_{presión} = \frac{C_2^2 - C_1^2}{2} + \frac{W_1^2 - W_2^2}{2} + \frac{U_2^2 - U_1^2}{2} \quad (5.44)$$

Ecuación de Euler en términos energéticos para una turbomáquina hidráulica motora:

$$H_{rotor} = \frac{1}{g} \left(\frac{C_2^2 - C_3^2}{2} + \frac{W_3^2 - W_2^2}{2} + \frac{U_2^2 - U_3^2}{2} \right) \quad (5.45)$$

Ecuación de Euler en términos energéticos para una turbomáquina térmica motora:

$$w_{rotor} = \frac{C_2^2 - C_3^2}{2} + \frac{W_3^2 - W_2^2}{2} + \frac{U_2^2 - U_3^2}{2} \quad (5.46)$$

En resumen se tienen dos expresiones de la segunda forma de la ecuación de Euler, una ecuación energética utilizada para turbomáquinas motoras térmicas:

$$w_{rotor} = \left(\frac{C_2^2 - C_3^2}{2} + \frac{W_3^2 - W_2^2}{2} + \frac{U_2^2 - U_3^2}{2} \right) \quad (5.47)$$

Y una ecuación en alturas utilizada para turbomáquinas motoras hidráulicas:

$$H_{rotor} = \frac{1}{g} \left(\frac{C_2^2 - C_3^2}{2} + \frac{W_3^2 - W_2^2}{2} + \frac{U_2^2 - U_3^2}{2} \right) \quad (5.48)$$

5.7 Grado de Reacción

Es la fracción o porcentaje de energía de presión intercambiada en el rotor.

En las turbomáquinas hidráulicas se calcula con la siguiente ecuación:

$$Gr = \frac{H_{presion}}{H_{rotor}} \times 100 \quad (5.49)$$

En las turbomáquinas térmicas se calcula con la siguiente ecuación:

$$Gr = \frac{w_{presion}}{w_{rotor}} \times 100 \quad (5.50)$$

El grado de reacción de una turbomáquina se refiere al modo como trabaja el rodete. Así, por ejemplo, en una bomba se debe distinguir la altura de presión que da la bomba y la altura de presión que da el rodete de la bomba ($H_{presion}$). La primera normalmente es mayor que $H_{presion}$ porque la bomba tiene además de un rodete un sistema difusor, que transforma la energía dinámica que da el rodete, $H_{dinamica}$ en energía de presión, que sumada a la energía de presión del rodete constituye la energía de presión que da toda la bomba. Análogamente sucede en una turbina.

Las maquinas en que el grado de reacción es igual a cero se llaman de acción. Todas las bombas son de reacción. Las turbinas de acción constituyen las turbinas Pelton. Si el rodete da (bomba, compresor) o absorbe (turbinas) la mitad de su energía en forma de presión y la otra mitad en energía dinámica, el grado de reacciones igual a $\frac{1}{2}$. Es muy frecuente construir las turbinas de vapor y las turbinas de gas con grado de reacción igual a $\frac{1}{2}$.

5.8 Ecuación de Euler para turbomáquinas hidráulicas generadoras de flujo radial y máxima transferencia de energía

$$H_{rotor} = \frac{U_2 C_{\theta 2}}{g} = \frac{U_2}{g} (U_2 - C_{2r} \operatorname{ctg} \beta_2) \quad (5.51)$$

La componente de la velocidad absoluta en la dirección radial se puede escribir en función del caudal y el área de flujo de salida del rotor.

$$C_{2r} = \frac{Q}{\pi D_2 B_2} \quad (5.52)$$

Sustituyendo la ecuación (5.52) en (5.51) se tiene:

$$H_{rotor} = \frac{U_2^2}{g} - \frac{U_2 \operatorname{ctg} \beta_2}{g \pi D_2 B_2} Q \quad (5.53)$$

La ecuación 5.53 es la ecuación de una recta, la variable dependiente es la altura intercambiada $H_{B,V}$ y la variable independiente es el caudal. Entonces la altura de la bomba o ventilador es proporcional al caudal, su valor a caudal nulo es $\frac{U_2^2}{g}$, y la pendiente es positiva, nula o negativa en función del valor del ángulo de salida del alabe β_2 . Cuando $\beta_2 = 90^\circ$, se tiene un alabe radial, con $\beta_2 > 90^\circ$, el alabe esta curvado adelante con respecto a la dirección de giro del rotor, y con $\beta_2 < 90^\circ$, el alabe esta curvado atrás. Según el tipo de alabe que se tenga, se muestran tres situaciones diferentes:

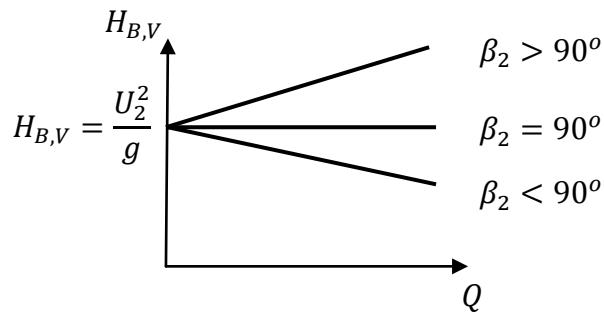
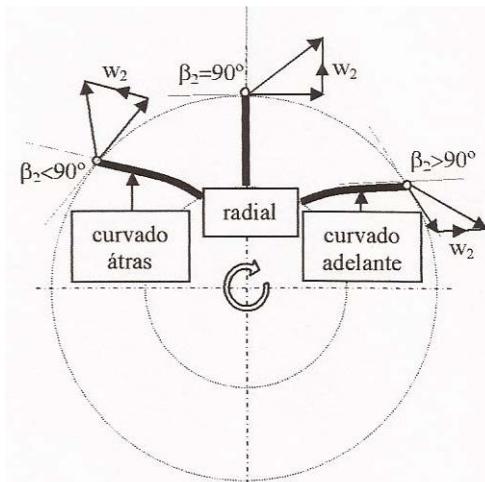
Figura 5.38. Efecto del ángulo de salida del alabe sobre la curva característica $H_{B,V}$ vs Q 

Figura 5.39. Efecto del ángulo de salida del alabe sobre los triángulos de velocidades

La ecuación 5.53 sería la ecuación ideal (eficiencia 100%) de una bomba o ventilador en ausencia de pérdidas hidráulicas y mecánicas. La curva característica real en una función normalmente cuadrática. Las bombas se construyen con alabe curvado hacia atrás para reducir las elevadas pérdidas que se producen a la salida del rotor como consecuencia de la alta velocidad absoluta y obtener un punto de funcionamiento con la curva del sistema de bombeo.

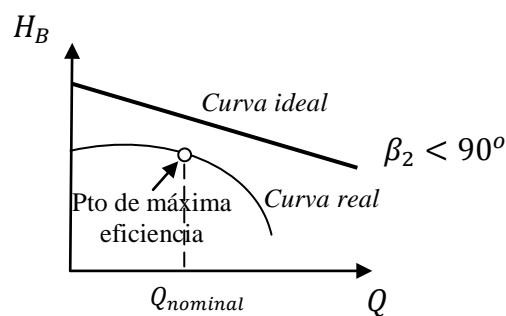


Figura 5.40. Curva ideal y curva real de una turbomáquina generadora con alabe curvado hacia atrás

A caudales mayores y menores que el nominal la eficiencia disminuye debido a las pérdidas hidráulicas.

5.9 Triángulos de velocidades de turbinas de acción: Turbina Pelton

En el caso de las turbinas Pelton, turbinas de flujo tangencial, los alabes reciben un chorro de alta velocidad y a presión atmosférica; por lo que el flujo está a presión constante, y por tanto su grado de reacción es nulo, denominándose turbina de acción.

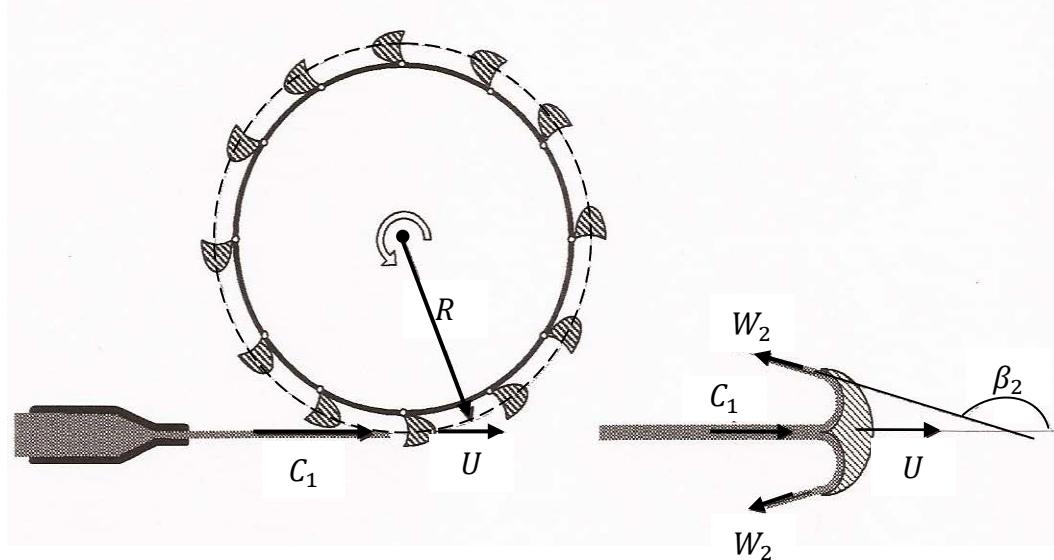


Figura 5.41. Rotor de una turbina Pelton. Detalle de una de las cuchillas con las velocidades del flujo y ángulo de desviación.

El módulo de la velocidad relativa de entrada del chorro al alabe W_1 se mantiene constante en su interacción con el chorro, sin considerar efectos disipativos, con lo que el módulo de la velocidad relativa de salida será igual al de la entrada, es decir, $W_1 = W_2$. La velocidad real W_2 es algo menor que W_1 .

La trayectoria de una partícula de agua en la cuchilla es tangencial, de manera que en las turbinas Pelton se verifica siempre: $U_1 = U_2 = U$.

La velocidad absoluta de entrada es tangencial, por lo que $C_1 = C_{1\theta} = C_j$. Donde C_j es la velocidad del chorro. El triángulo de velocidades en la entrada queda reducido a tres vectores tangenciales:

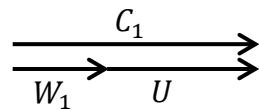


Figura 5.42. Velocidades en la entrada

Se cumple $\vec{C}_1 = \vec{W}_1 + \vec{U}$, de donde $W_1 = C_1 - U$, donde $U = \frac{\pi DN}{60}$

En el triángulo de velocidades de la salida, la dirección de la velocidad relativa está marcada por el ángulo de salida del alabe. El alabe se diseña de tal forma que el chorro incidente se divide en dos chorros simétricos horizontales, con lo que se compensan los esfuerzos en el alabe en dirección axial. Se tienen dos triángulos de velocidades de salida simétricos, uno por cada uno de los lados por los que salen los chorros, cada uno con la mitad del caudal de entrada.

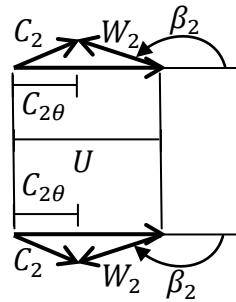


Figura 5.43. Triángulos de velocidades en la salida

La ecuación de Euler se escribe:

$$H_{rotor} = \frac{1}{g} U(C_{1\theta} - C_{2\theta}) \quad (5.54)$$

Donde:

$$\begin{aligned} C_{2\theta} &= U - W_2 \cos(180^\circ - \beta_2) = U + W_2 \cos \beta_2 = \\ C_{2\theta} &= U + (C_j - U) \cos \beta_2 \end{aligned} \quad (5.55)$$

$$H_{rotor} = \frac{1}{g} U \left(C_{1\theta} - (U + (C_j - U) \cos \beta_2) \right)$$

$$H_{rotor} = \frac{1}{g} U (C_j - U) (1 - \cos \beta_2) \quad (5.56)$$

La potencia del rotor:

$$\dot{W}_{rotor} = \gamma Q H_{rotor}$$

Sustituyendo la ecuación 5.56 se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{W}_{rotor} &= \gamma Q \frac{1}{g} U (C_j - U) (1 - \cos \beta_2) \\ \dot{W}_{rotor} &= \rho Q U (C_j - U) (1 - \cos \beta_2) \end{aligned} \quad (5.57)$$

Por lo regular β_2 varía entre 160° y 168° . Si se deriva la ecuación 5.57 respecto a U y se iguala a cero, la potencia máxima ocurre cuando $U = \frac{C_j}{2}$

La Potencia hidráulica de la turbina Pelton:

$$\dot{W}_{hid} = \gamma Q H_T \quad (5.58)$$

Aplicando Bernoulli se tiene que H_T es:

$$H_T = \Delta z - h_{f1-2} \quad (5.59)$$

Donde h_{f1-2} da cuenta de las pérdidas en la tubería forzada.

Si la pérdida en la tobera, se estima mediante un coeficiente de velocidad C_v , la velocidad del chorro puede darse en términos de la carga disponible H_T , representando ésta la carga piezométrica inmediatamente arriba de la tobera.

$$C_j = C_v \sqrt{2gH_T}$$

Los valores de C_v típicamente, $0.92 \leq C_v \leq 0.98$

La relación entre la potencia hidráulica y la potencia del rotor está dada por el rendimiento interno o hidráulico:

$$\eta_h = \frac{H_{rotor}}{H_T} \quad (5.60)$$

Finalmente la potencia útil o realmente aprovechada de la turbina Pelton será la potencia mecánica. La relación entre la potencia del rotor y la potencia mecánica viene determinada por el rendimiento mecánico:

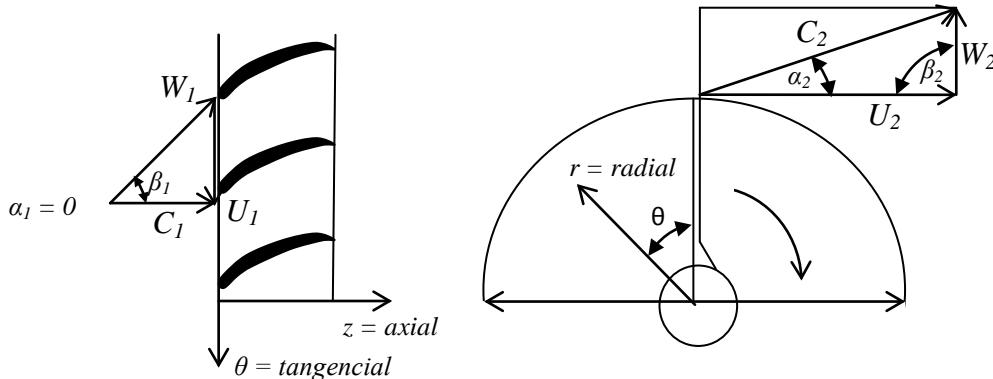
$$\eta_{mec} = \frac{\dot{W}_{mec}}{\dot{W}_{rotor}} \quad (5.61)$$

Ejemplo 5.1.

Aire a una temperatura ambiente de $22^\circ C$ y presión atmosférica normal ($\gamma = 1.4$, $C_p = 1.005 \text{ KJ/Kg } ^\circ C$, $R = 287 \text{ J/Kg } ^\circ C$) entra en la dirección axial al impulsor de un compresor centrífugo de alabe radial. El impulsor rota a 15000 RPM , la relación de presión total es 4, la eficiencia adiabática es 84%, el flujo máscico es 2 Kg/s y la eficiencia mecánica es 97%.

Dibujar un diagrama $T-s$ incluyendo el proceso en el ducto de entrada, rotor y difusor. Asumir que las pérdidas en el ducto de entrada son nulas. Determinar:

- Diámetro de salida del impulsor suponiendo conducción perfecta del fluido.
- Ancho del rotor B_2 a la salida, si las pérdidas de presión total en el compresor ocurren 60% en el rotor y 40% en el difusor y la velocidad absoluta a la descarga del rotor debe formar un ángulo de 30° con la dirección tangencial de rotación.
- Número de Mach en la descarga del rotor.
- Porcentaje de difusión sobre la velocidad absoluta de descarga del rotor, si la velocidad del aire comprimido a la salida del compresor no debe exceder 100 m/s .
- Diámetro y número de Mach en la brida descarga del compresor.
- Si los diámetros del ojo del impulsor en el tope y la raíz son de 12 cm y 6 cm respectivamente, calcular los ángulos del alabe en la raíz, línea media y tope suponiendo que no existe incidencia y que las perdidas en el ducto de entrada son despreciables.
- Potencia del motor de accionamiento en KW .
- Grado de reacción



- a) Diámetro de salida del impulsor:

$$\text{Conducción perfecta} \Rightarrow \beta_2 = \beta_2'$$

$$\text{Máxima transferencia de energía} \Rightarrow C_{\theta 1} = 0$$

$$\text{Compresor de alabe radial} \beta_2 = 90^\circ \Rightarrow C_{\theta 2} = U_2$$

$$\text{La Ecuación de Euler} \quad \omega_{rotor} = (U_2 C_{\theta 2} - U_1 C_{\theta 1}) \text{ resulta en } \omega_{rotor} = U_2^2$$

$$\text{La Ecuación de Energía es}$$

$$\omega_{rotor} = C_P(T_{03} - T_{01})$$

$$\frac{P_{03}}{P_{01}} = 4$$

$$\frac{T_{03s}}{T_{01}} = \left(\frac{P_{03}}{P_{01}}\right)^{\frac{k-1}{k}}$$

$$T_{03s} = 295(4)^{\frac{1.4-1}{1.4}} = 438.37 K$$

$$\eta_i = \eta_{ad} = \frac{T_{03s} - T_{01}}{T_{03} - T_{01}}$$

$$T_{03} = T_{01} + \frac{T_{03s} - T_{01}}{\eta_{ad}}$$

$$T_{03} = 295 + \frac{438.37 - 295}{0.84} = 465.68 K$$

$$\omega_{rotor} = 1005 \frac{J}{Kg \text{ } ^\circ C} (465.68 - 273 - (295 - 273))^\circ C$$

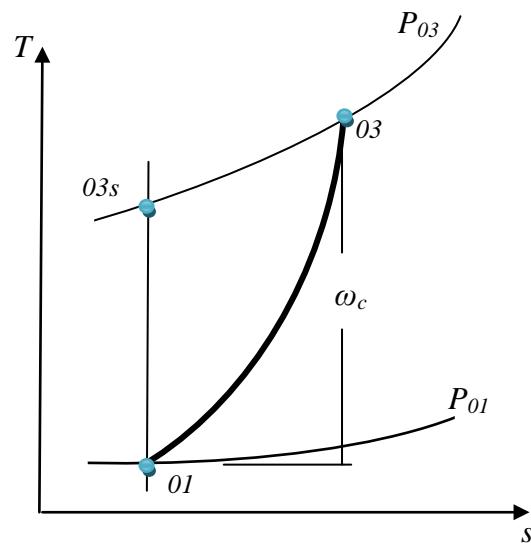
$$= 171533.4 \frac{J}{Kg}$$

$$\omega_{rotor} = 171533.4 \frac{m^2}{s^2} = U_2^2$$

$$U_2 = 414.17 \frac{m}{s}$$

$$U_2 = \frac{\pi D_2 N}{60} \quad D_2 = \frac{414.17 \times 60}{\pi \times 15000} m = 0.5273 m$$

$$D_2 = 52.73 \text{ cm}$$



a) Ancho del rotor a la salida:

$$\dot{m} = \rho_2 C_{2r} \pi D_2 B_2$$

$$C_{2r} = W_2 = U_2 \tan \alpha_2 = 414.17 \frac{m}{s} \tan 30^\circ$$

$$= 239.12 m/s$$

Pérdidas nulas en ducto de entrada $\Rightarrow 00 = 01$

$$P_{01} = 101.3 \text{ kPa}$$

$$\omega_{ph1-3} = C_p (T_{03} - T_{03s})$$

$$\omega_{ph1-3} = 1.005 \frac{KJ}{KgK} (465.68 - 438.37) K$$

$$\omega_{ph1-3} = 27.45 \frac{KJ}{Kg}$$

$$\omega_{phrotor} = 0.6 \omega_{ph1-3} = 16.47 \frac{KJ}{Kg}$$

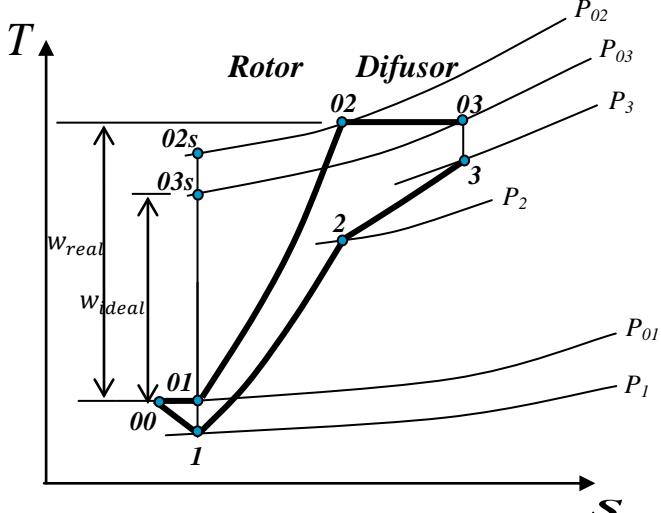
$$\omega_{phdifusor} = 0.4 \omega_{ph1-3} = 10.98 \frac{KJ}{Kgm}$$

$$\omega_{phrotor} = C_p (T_{02} - T_{02s}) \Rightarrow T_{02s} = T_{02} - \omega_{phrotor} / C_p$$

$$T_{02s} = 465.68 K - (16.47 / 1.005) K = 449.29 K$$

$$P_{02} = P_{01} \left(\frac{T_{02s}}{T_{01}} \right)^{\frac{k}{k-1}} = 101.3 \left(\frac{449.29}{295} \right)^{3.5} = 441.65 \text{ kPa}$$

$$C_2 = (U_2^2 + W_2^2)^{1/2} = (171536.8 + 57178.4)^{1/2} = 478.24 \text{ m/s}$$



$$T_2 = T_{02} - \frac{C_2^2}{2C_p} = 465.68 K - \left(\frac{478.24^2}{2 \times 1005} \right) K = 351.88 K$$

$$P_2 = P_{02} \left(\frac{T_2}{T_{02}} \right)^{\frac{k}{k-1}} = 441.65 KPa \left(\frac{351.88}{465.68} \right)^{\frac{1.4}{0.4}} = 165.65 KPa$$

$$\rho_2 = \frac{P_2}{RT_2} = \frac{165.65}{0.287 \times 351.88} \frac{Kg}{m^3} = 1.64 \frac{Kg}{m^3}$$

$$B_2 = \frac{\dot{m}}{\rho_2 C_{2r} \pi D_2} = \frac{\dot{m}}{1.64 \times 239.12 \times \pi \times 0.5273}$$

$$B_2 = \mathbf{3.07 \text{ mm}}$$

- a) Número de Mach en la descarga del rotor:

$$a_2 = (kRT_2)^{\frac{1}{2}} = (1.4 \times 287 \times 351.89)^{\frac{1}{2}} = 376.02 \frac{m}{s}$$

$$M_2 = C_2/a_2 = 478.24 / 376.02 = 1.27 \Rightarrow \text{Fluido Supersónico}$$

- b) Porcentaje de difusión sobre la velocidad absoluta

Con $C_3 = 100 \text{ m/s}$

$$\%Difusion = \frac{(C_2 - C_3)}{C_2} \times 100 = \frac{(478.24 - 100)}{478.24} \times 100 = 79.10\%$$

- c) Diámetro y número de Mach en el ducto de descarga del compresor:

$$T_3 = T_{03} - \frac{C_3^2}{2C_p} = 465.68 K - \left(\frac{100^2}{2 \times 1005} \right) K = 460.70 K$$

$$P_3 = P_{03} \left(\frac{T_3}{T_{03}} \right)^{\frac{k}{k-1}} = 405.2 \left(\frac{460.70}{465.68} \right)^{\frac{1.4}{0.4}} = 390.23 KPa$$

$$\rho_3 = \frac{P_3}{RT_3} = \frac{390.23 \times 10^3}{287 \times 460.70} \frac{Kg}{m^3} = 2.95 \frac{Kg}{m^3}$$

$$\dot{m} = \frac{\rho_3 C_3 \pi D_3^2}{4} \Rightarrow D_3^2 = \frac{4\dot{m}}{\rho_3 C_3 \pi} = \frac{4 \times 2}{2.95 \times 100 \times \pi} m^2$$

$$D_3 = 9.29 \text{ cm}$$

$$a_3 = (kRT_3)^{\frac{1}{2}} = (1.4 \times 287 \times 460.70)^{\frac{1}{2}} = 430.24 \frac{m}{s}$$

$$M_3 = C_3/a_3 = 100 / 430.24 = 0.23 \Rightarrow \text{Fluido Subsónico}$$

- d) Ángulos del alabe en la raíz, línea media y tope:

$$\dot{m} = \rho_1 C_{1z} \pi (r_t^2 - r_r^2) \Rightarrow C_{1z} = \frac{4\dot{m}}{\rho_1 \pi (D_t^2 - D_r^2)}$$

En una primera aproximación se puede suponer $01=1$.

$$\rho_1 = \rho_{01} = \frac{P_{01}}{RT_{01}} = \frac{101.3 \times 10^3}{287 \times 295} \frac{Kg}{m^3} = 1.196 \frac{Kg}{m^3}$$

$$C_1 = C_{1z} = \frac{2 \times 4}{1.196 \times \pi \times (0.12^2 - 0.06^2)} = 197.16 \frac{m}{s}$$

$$T_1 = T_{01} - \frac{C_1^2}{2C_p} = 295 K - \left(\frac{197.16^2}{2 \times 1005} \right) K = 275.66 K$$

$$P_1 = P_{01} \left(\frac{T_1}{T_{01}} \right)^{\frac{k}{k-1}} = 101.3 KPa \left(\frac{275.66}{295} \right)^{\frac{1.4}{0.4}} = 79.90 KPa$$

$$\rho_1 = \frac{P_1}{RT_1} = \frac{79.90 \times 10^3}{287 \times 275.66} \frac{Kg}{m^3} = 1.01 \frac{Kg}{m^3}$$

$$C_{1z} = C_1 = \frac{2 \times 4}{1.01 \times \pi \times (0.12^2 - 0.06^2)} = 233.46 \frac{m}{s}$$

ρ_1 [Kg/m ³]	C_1 [m/s]	T_1 [K]	P_1 [KPa]
1.196	197.16	275.66	79.90
1.010	233.46	267.88	72.28
0.940	250.78	263.70	68.42
0.904	260.81	261.15	66.13
0.882	267.24	259.47	64.65
0.863	273.37	257.82	63.21
0.854	275.98	257.10	62.61
0.848	277.88	256.58	62.16
0.844	279.31	256.18	61.83
0.841	280.39	255.89	61.57
0.838	281.22	255.65	61.37
0.837	281.86	255.47	61.23
CONVERGENCIA			

Velocidad tangencial en el radio de raíz:

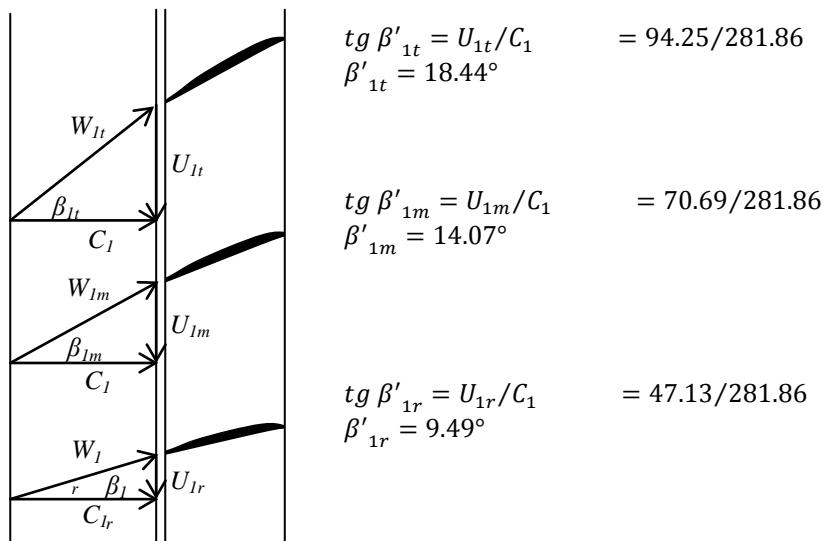
$$U_{1r} = \pi D_r N / 60 = \pi \times 0.12 \times 15000 / 60 = 47.13 \text{ m/s}$$

Velocidad tangencial en el radio medio:

$$U_{1m} = 70.69 \text{ m/s}$$

Velocidad tangencial en el radio de tope:

$$U_{1t} = 94.25 \text{ m/s}$$



- e) Potencia mecánica del motor de accionamiento:

$$\dot{W}_{mec} = \frac{\dot{W}_{rotor}}{\eta_{mec}} = \frac{\dot{m} \omega_{rotor}}{\eta_{mec}} = \frac{2 \frac{\text{Kg}}{\text{s}} 171.533 \frac{\text{J}}{\text{Kgm}}}{0.97}$$

$$\dot{W}_{mec} = 353.7 \text{ KW}$$

- f) Grado de reacción:

$$Gr = \frac{W_{presión}}{W_{rotor}}$$

Haciendo en el radio medio se tiene:

$$W_{presión} = \frac{W_1^2 - W_2^2}{2} + \frac{U_2^2 - U_1^2}{2}$$

$$W_1 = \sqrt{70.69^2 + 281.86^2} = 290.59 \text{ m/s}$$

$$W_2 = C_{2r} = 239.12 \text{ m/s}$$

$$w_{\text{presión}} = \frac{290.59^2 - 239.12^2}{2} + \frac{414.17^2 - 70.69^2}{2} = 96901.94 \text{ J/Kg}$$

$$w_{\text{rotor}} = 171533.4 \text{ J/Kg}$$

$$Gr = \frac{96901.94}{171533.4} = 0.56$$

Ejemplo 5.2.

Un ventilador de flujo axial rota a 1200 RPM. El diámetro del tope de los alabes es 1.1 m y el de la raíz es 0.8 m. Los ángulos del alabe a la entrada y salida del rotor son 60° y 30° respectivamente. Los alabes guía de entrada producen una pre-rotación en el sentido de rotación de tal forma que el flujo absoluto entra al rotor formando un ángulo de 30° con la dirección axial. Suponiendo que el flujo relativo entra y sale del rotor a los ángulos geométricos del alabe y empleando las propiedades en el radio medio del alabe, calcular:

- a) Triángulo de entrada.
- b) Triángulo de salida.
- c) Caudal manejado.
- d) Altura real comunicada al fluido
- e) Altura ideal comunicada al fluido, si las pérdidas hidráulicas internas se estiman en 10% de la altura ideal.
- f) Potencia de accionamiento si las pérdidas mecánicas se estiman en un 3% de la potencia real comunicada al fluido.
- g) Eficiencia interna o hidráulica, mecánica y total.
- h) Incremento de presión total en pulgadas de agua producida por el ventilador si la entrada a la máquina se toma como las condiciones atmosféricas del lugar.
- i) Incremento de presión estática en pulgadas de agua producida por el ventilador si la entrada a la máquina se toma como las condiciones atmosféricas del lugar.

- a) Triángulo de entrada

$$U = \pi D_m N / 60 = \pi \times \left(\frac{1.1 + 0.8}{2} \right) \times 1200 / 60$$

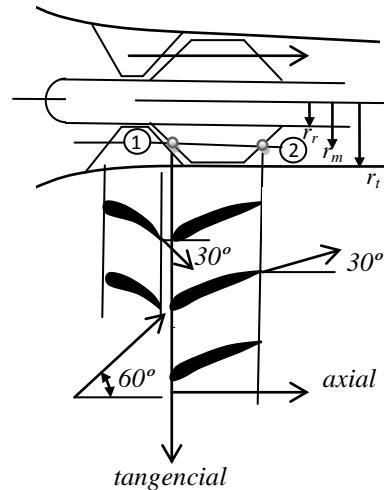
$$U = 59.69 \text{ m/s}$$

$$U = C_{1z} \tan \beta_1 + C_{1z} \tan \alpha_1$$

Por lo que:

$$C_{1z} = \frac{U}{\tan \beta_1 + \tan \alpha_1} = \frac{59.69 \text{ m/s}}{\tan 60^\circ + \tan 30^\circ}$$

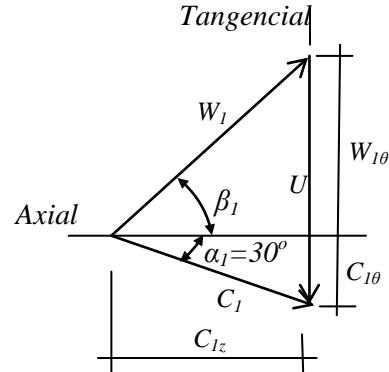
$$C_{1z} = 25.85 \text{ m/s}$$



$$C_{1\theta} = C_{1z} \tan \alpha_1 = 25.85 \tan 30^\circ \\ C_{1\theta} = 14.92 \text{ m/s}$$

$$W_1 = \frac{25.85}{\cos 60^\circ} = 51.70 \text{ m/s} \\ W_1 = 51.70 \text{ m/s} \\ W_{1\theta} = 25.85 \tan 60^\circ \\ W_{1\theta} = 44.77 \text{ m/s}$$

$$C_1 = \sqrt{C_{1\theta}^2 + C_{1z}^2} \\ C_1 = \sqrt{14.92^2 + 25.85^2} \\ C_1 = 29.85 \text{ m/s}$$



b) Triángulo de salida

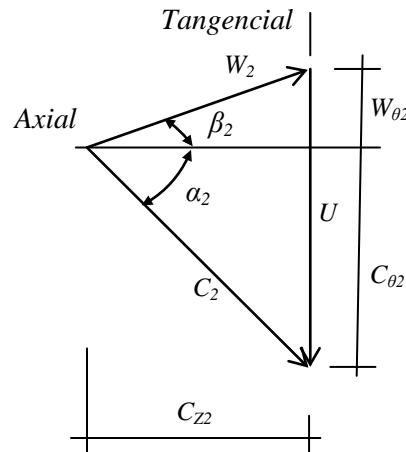
$$Q = C_{1z} A_1 = C_{2z} A_2$$

$$C_{1z} = C_{2z} = 28.85 \text{ m/s} \\ U_1 = U_2 = U = 59.69 \text{ m/s}$$

$$W_{\theta 2} = C_{2z} \tan \beta_2 = \\ W_{\theta 2} = 25.85 \tan 30^\circ = \\ W_{\theta 2} = 14.92 \text{ m/s}$$

$$C_{\theta 2} = U - W_{\theta 2} = 59.69 - 14.92 = \\ C_{\theta 2} = 44.77 \text{ m/s}$$

$$W_2 = \frac{25.85}{\cos 30^\circ} = \\ W_2 = 29.85 \text{ m/s}$$



$$\alpha_2 = \tan^{-1} \left(\frac{C_{\theta 2}}{C_{2z}} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{44.77}{25.85} \right) = 60^\circ \\ C_2 = \frac{25.85}{\cos 60^\circ} = 51.70 \text{ m/s}$$

c) Caudal manejado

$$Q = C_{Z1} \frac{\pi(D_t^2 - D_r^2)}{4} = 25.85 \text{ m/s} \frac{\pi(1.21 - 0.64)}{4} \text{ m}^2 =$$

$$Q = 11.57 \text{ m}^3/\text{s}$$

d) Altura real comunicada al fluido:

La altura real es la altura intercambiada en el rotor, que es la suma de la altura mínima requerida para impulsar el gas H_V , más la altura de perdidas requerida para vencer las irreversibilidades en el ventilador h_{fint}

$$H_{rotor} = \frac{U}{g} (C_{\theta 2} - C_{\theta 1}) = \frac{59.69 \text{ m/s}}{9.81 \text{ m/s}^2} (44.77 - 14.92) \text{ m/s} = 181.63 \text{ m}$$

e) Altura ideal comunicada al fluido, si las pérdidas hidráulicas internas se estiman en 10% de la altura ideal.

La altura ideal es la altura mínima requerida para impulsar el gas.

$$H_V = H_{rotor} - 0.1H_{rotor} = 0.90 \times 181.63 \text{ m} = 163.47 \text{ m}$$

f) Potencia de accionamiento:

$$\dot{W}_{rotor} = \gamma Q H_{rotor} = 1.23 \frac{Kg}{m^3} 9.81 \frac{m}{s^2} 11.57 \frac{m^3}{s} 181.63 m = 25.357 KW$$

$$\dot{W}_{mec} = \dot{W}_{rotor} + 0.03 \dot{W}_{rotor} = 1.03 \dot{W}_{rotor} = 26.118 KW$$

g) Eficiencia interna o hidráulica, mecánica y total.

$$\eta_i = \eta_h = \frac{\dot{W}_{hid}}{\dot{W}_{rotor}} = \frac{H_V}{H_{rotor}} = \frac{163.47}{181.63} \times 100 = 90\%$$

$$\eta_{mec} = \frac{\dot{W}_{rotor}}{\dot{W}_{mec}} = \frac{25.357 KW}{26.118 KW} \times 100 = 97\%$$

$$\eta_V = \eta_h \times \eta_{mec} = 0.90 \times 0.97 \times 100 = 87.3\%$$

h) Incremento de presión total en pulgadas de agua producida por el ventilador:

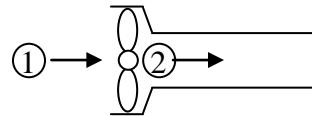
$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + H_V = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g}$$

$$H_V = \frac{\Delta P_o}{\gamma} = \frac{P_{02} - P_{01}}{\gamma} = \frac{P_2 - P_{atm}}{\gamma} + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g}$$

$$V_1 = 0$$

$$P_{atm} = 0 \text{ Presión relativa}$$

$$H_V = \frac{\Delta P_o}{\gamma} = \frac{P_{02}}{\gamma}$$



$$H_V = \frac{\Delta P_o}{\gamma}; \Delta P_o = \gamma H_V = 1.23 \frac{Kg}{m^3} \times 9.81 \frac{m}{s^2} \times 163.47 m = 1972.48 Pa$$

$$\frac{\Delta P_o}{\gamma_{agua}} = \frac{1972.48 Pa}{998 \frac{Kg}{m^3} \times 9.81 \frac{m}{s^2}} = 0.2 \text{ m.c.a.} = 7.93 \text{ pulg de agua}$$

g) Incremento de presión estática en pulgadas de agua:

$$\frac{\Delta P}{\gamma} = H_V - \frac{C_2^2}{2g}$$

Suponiendo que no hay estator que actúe como difusor después del rotor, $C_2 = V_2$, se tiene:

$$\Delta P = \left(H_V - \frac{C_2^2}{2g} \right) \gamma = \left(163.47 m - \frac{51.7^2}{2 \times 9.81} m \right) 1.23 \frac{Kg}{m^3} \times 9.81 \frac{m}{s^2} = 328.65 Pa$$

$$\frac{\Delta P}{\gamma_{agua}} = \frac{328.65 Pa}{998 \times 9.81 \frac{N}{m^3}} \times \frac{1}{0.0254} = 1.32 \text{ pulg de agua}$$

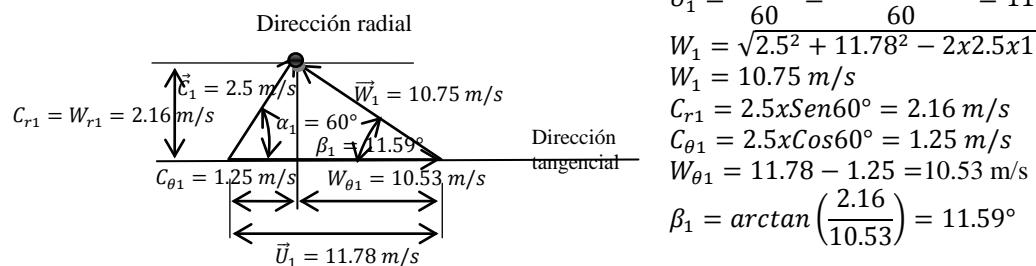
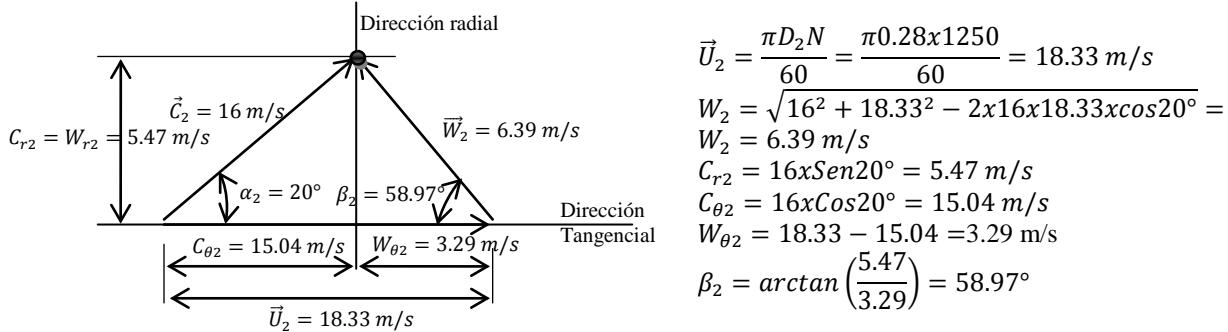
EJEMPLO 5.3.

El rodete de una bomba centrífuga tiene un diámetro a la entrada $D_1 = 18 \text{ cm}$ y un diámetro a la salida $D_2 = 28 \text{ cm}$. El ángulo absoluto de entrada es de 60° y la velocidad absoluta es de 2.5 m/s . A la salida se tiene un ángulo absoluto de 20° y una velocidad absoluta de 16 m/s . El rodete gira a 1250 RPM .

Dibujar los triángulos de velocidades a la salida y la entrada con las respectivas magnitudes de las velocidades. Calcular la altura de Euler.

Dibujar el triángulo de velocidades en la entrada cuando la velocidad absoluta de 2.5 m/s de magnitud, entra en la dirección radial y determinar cómo varía (en %) la altura de Euler en el rotor.

Triángulo de velocidades en la salida del rotor:



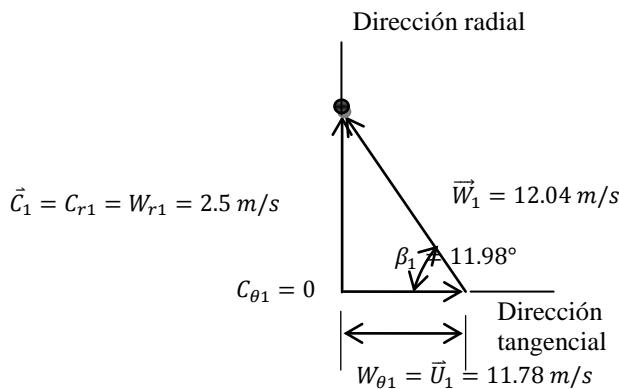
$$H_{rotor} = \frac{18.33 \times 15.04 - 11.78 \times 1.25}{9.81} = 26.60 \text{ m}$$

Con C_1 en la dirección radial, se tiene máxima transferencia de energía, el triángulo de velocidades es un triángulo rectángulo con $\alpha_1 = 90^\circ$

$$H_{rotor} = \frac{18.33 \times 15.04}{9.81} = 28.10 \text{ m}$$

$$\% \Delta H_{rotor} = \frac{28.10 - 26.60}{26.60} * 100 = 5.64\%$$

Con MTE se incrementa la altura intercambiada en el rotor en un 5.64%



Ejemplo 5.4

Una turbina de gas de flujo radial ($k=1.4$, $R=288 \text{ J/KgK}$), recibe gas a 600 kPa y 1200 K . La presión estática a la salida de la turbina es 100 kPa y se supone despreciable la velocidad en la salida. La eficiencia adiabática es 85% y la mecánica 98%. La potencia útil que sale de la turbina es 2 MW . La velocidad del flujo a la salida de las toberas del estator es igual a la velocidad del sonido y sale formando un ángulo de 30° con la velocidad tangencial del alabe. La relación ancho del rotor en la entrada con el radio del rotor B_2/r_2 es 0.12. Se supone conducción perfecta y máxima transferencia de energía.

- Calcular el flujo másico manejado por la turbina
- Si 40% de las pérdidas de la etapa ocurren en el estator. Calcular la caída de presión por fricción en las toberas
- Calcule el diámetro del rotor
- Calcule el régimen de revoluciones de la turbina en RPM
- Calcule la magnitud de la velocidad relativa del flujo que entra al rotor y el ángulo del álabe.
- Dibuje el triángulo de velocidades a la entrada del rotor.

Datos:

$$P_{01} = 600 \text{ kPa}$$

$$T_{01} = 1200 \text{ K}$$

$$P_3 = P_{03} = 100 \text{ kPa} \text{ ya que } C_3 \approx 0$$

$$\eta_{0-0} = 85\%$$

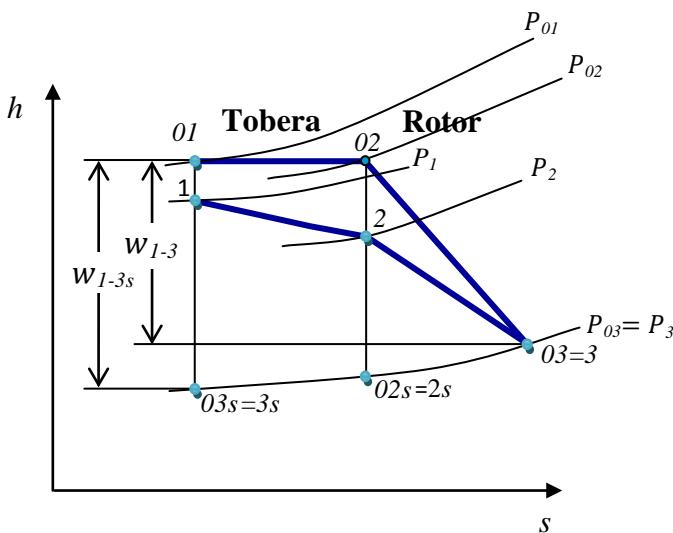
$$\eta_{mec} = 98\%$$

$$\dot{W}_{mec} = 2 \text{ MW}$$

$$C_2 = \sqrt{kRT_2}$$

$$\alpha_2 = 30^\circ$$

$$\frac{B_2}{r_2} = 0.12$$



- Flujo másico de la turbina:

$$\dot{W}_{rotor} = \frac{\dot{W}_{mec}}{\eta_{mec}} = \frac{2 \text{ MW}}{0.98} = 2.04 \text{ MW}$$

$$\dot{W}_{rotor} = \dot{m} C_p (T_{01} - T_{03})$$

$$\eta_{0-0} = \frac{T_{01} - T_{03}}{T_{01} - T_{03s}} = 0.85$$

$$T_{03s} = T_{01} \left(\frac{P_{03}}{P_{01}} \right)^{\frac{k-1}{k}} = 1200K \left(\frac{100}{600} \right)^{\frac{0.4}{1.4}} = 719.20K$$

$$T_{03} = T_{01} - \eta_{0-0} (T_{01} - T_{03s}) = 1200K - 0.85(1200 - 719.20)K = 791.32K$$

$$C_p = \frac{kR}{k-1} = \frac{1.4 \times 288}{1.4 - 1} = 1008 \frac{J}{KgK}$$

$$\dot{m} = \frac{\dot{W}_{rotor}}{C_p(T_{01} - T_{03})} = \frac{2.04 \times 10^6}{1008(1200 - 791.32)} = \\ \dot{m} = 4.95 \text{ Kg/s}$$

b) Caída de presión por fricción en las toberas:

$$\Delta P_{OTOBERAS} = P_{01} - P_{02} \\ w_{ph1-3} = C_p(T_{03} - T_{03s}) = 1008(791.32 - 719.20) = 72696.96 \text{ J/Kg} \\ w_{phtoberas} = 0.40w_{ph1-3} = 29078.78 \text{ J/Kg} \\ w_{phtoberas} = C_p(T_{02s} - T_{03s}) \\ T_{02s} = \frac{w_{phtoberas}}{C_p} + T_{03s} = \frac{29078.78}{1008} + 719.20 = 748.05 \text{ K} \\ P_{02} = P_{03} \left(\frac{T_{02}}{T_{02s}} \right)^{\frac{k}{k-1}} = 100 \text{ KPa} \left(\frac{1200}{748.05} \right)^{\frac{1.4}{0.4}} = 522.85 \text{ KPa} \\ \Delta P_{OTOBERAS} = 600 \text{ KPa} - 522.85 \text{ KPa} = 77.15 \text{ KPa}$$

c) Diámetro del rotor

$$\dot{m} = \rho_2 C_{2r} 2\pi r_2 B_2 = \rho_2 C_{2r} \pi r_2^2 0.24 \\ T_2 = T_{02} - \frac{C_2^2}{2C_p} = T_{02} - \frac{kRT_2}{2C_p} = \\ T_2 = \frac{T_{02}}{1 + \frac{kR}{2C_p}} = \frac{1200}{1 + \frac{1.4 \times 288}{2 \times 1008}} = 1000 \text{ K} \\ P_2 = P_{02} \left(\frac{T_2}{T_{02}} \right)^{\frac{k}{k-1}} = 522.85 \left(\frac{1000}{1200} \right)^{\frac{1.4}{0.4}} = 276.21 \text{ KPa} \\ \rho_2 = \frac{P_2}{RT_2} = \frac{276.21 \text{ KPa}}{0.288 \times 1000} = 0.9591 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^2} \\ C_2 = \sqrt{1.4 \times 288 \times 1000} = 634.98 \text{ m/s} \\ C_{2r} = C_2 \text{ Sen}\alpha_2 = 634.98 \times \text{Sen}30^\circ = 317.49 \text{ m/s} \\ r_2 = \sqrt{\frac{\dot{m}}{\rho_2 C_{2r} \pi 0.24}} = \sqrt{\frac{4.95}{0.9591 \times 317.49 \times \pi \times 0.24}} = 0.1468 \text{ m} \\ D_2 = 0.2937 \text{ m} = 29.37 \text{ cm}$$

d) RPM=?

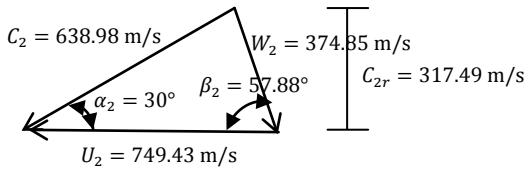
$$U_2 = \frac{\pi D_2 N}{60} \\ N = \frac{60 U_2}{\pi D_2} \\ w_{rotor} = \frac{\dot{W}_{rotor}}{\dot{m}} = 412121.21 \text{ J/Kg} \\ w_{rotor} = U_2 C_{2\theta} \\ C_{2\theta} = C_2 \text{ Cos}\alpha_2 = 634.98 \times \text{Cos}30^\circ = 549.91 \text{ m/s} \\ U_2 = \frac{w_{rotor}}{C_{2\theta}} = \frac{412121.21}{549.91} = 749.43 \text{ m/s} \\ N = \frac{60 \times 749.43}{\pi \times 0.2937} = 48734 \text{ RPM}$$

e) Velocidad relativa y ángulo del alabe en la entrada

$$W_2 = \sqrt{638.98^2 + 749.43^2 - 2 \times 638.98 \times 749.43 \times \cos 30^\circ} = 374.85 \text{ m/s}$$

$$\beta_2 = \arcsin\left(\frac{317.49}{374.85}\right) = 57.88^\circ$$

- f) Triángulo de velocidades a la entrada del rotor:



Ejemplo 5.5.

Una turbina Francis aprovecha un salto geodésico de 200 m. Las pérdidas en la tubería forzada se estiman en unos 20 m. El rendimiento mecánico de la turbina es de 97%. La turbina recibe un caudal de 2 m³/s. La turbina gira a 300 RPM y el diámetro del rodete es 2 m. La componente de la velocidad absoluta que produce intercambio de energía entre el fluido y el rodete tiene una magnitud de 45 m/s y está diseñada para máxima transferencia de energía.

- a) Calcular el rendimiento interno de la turbina.
- b) La potencia disponible en el fluido.
- c) La potencia perdida en roce viscoso.
- d) La potencia perdida en roce mecánico.
- e) Triángulo de velocidades de la entrada si el ancho del alabe es constante en cualquier posición radial e igual a 10 cm.
- f) Si el diámetro de salida es 20 cm dibujar el Triángulo de velocidades.
- g) Calcule el Grado de reacción de la Turbina Francis.

Datos:

$$\Delta Z = 200 \text{ m}$$

$$h_{f1-2} = 20 \text{ m}$$

$$\eta_{mec} = 97\%$$

$$Q = 2 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$N = 300 \text{ RPM}$$

$$D_2 = 2 \text{ m}$$

$$C_{2\theta} = 45 \text{ m/s}$$

$$B_2 = 10 \text{ cm}$$

$$D_3 = 20 \text{ cm}$$

- a) Rendimiento interno:

$$\eta_i = \frac{H_{rotor}}{H_T}$$

$$H_T = \Delta Z - h_{f1-2} = 200 - 20 = 180 \text{ m}$$

$$H_{rotor} = \frac{U_2 C_{2\theta}}{g}$$

$$U_2 = \frac{\pi D_2 N}{60} = \frac{\pi \times 2 \times 300}{60} = 31.42 \text{ m/s}$$

$$H_{rotor} = \frac{31.42 \times 45}{9.81} = 144.13 \text{ m}$$

$$\eta_i = \frac{144.13}{180} = 0.80$$

- b) Potencia hidráulica:

Se supone agua a 20°C.

$$\dot{W}_{hid} = \gamma Q H_T = 998 \times 9.81 \frac{N}{m^3} \times 2 \frac{m^3}{s} \times 180m = 3.524 MW$$

c) Potencia debido a perdidas hidráulicas:

$$\dot{W}_{ph} = \dot{W}_{hid} - \dot{W}_{rotor} = \gamma Q (H_T - H_{rotor}) = \gamma Q h_{fint} = 998 \times 9.81 \frac{N}{m^3} \times 2 \frac{m^3}{s} \times 35.87m = 0.702 MW$$

d) Potencia debido a perdidas mecánicas:

$$\dot{W}_{mec} = \dot{W}_{hid} \eta_T = 3.524 MW \times 0.80 \times 0.97 = 2.735 MW$$

$$\dot{W}_{rotor} = 998 \times 9.81 \frac{N}{m^3} \times 2 \frac{m^3}{s} \times 144.13m = 2.822 MW$$

$$\dot{W}_{pmech} = \dot{W}_{rotor} - \dot{W}_{mec} = 2.822 - 2.735 = 0.087 MW$$

e) Triángulo de velocidades en la entrada:

$$Q = C_{2r} \pi D_2 B_2$$

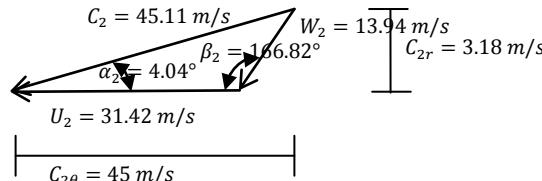
$$C_{2r} = \frac{Q}{\pi D_2 B_2} = \frac{2}{\pi \times 2 \times 0.10} = 3.18 m/s$$

$$\alpha_2 = \arctan\left(\frac{3.18}{45}\right) = 4.04^\circ$$

$$C_2 = \sqrt{3.18^2 + 45^2} = 45.11 m/s$$

$$W_2 = \sqrt{45.11^2 + 31.42^2 - 2 \times 45.11 \times 31.42 \times \cos 4.04^\circ} = 13.94 m/s$$

$$\beta_2 = 180^\circ - \arctan\left(\frac{3.18}{45 - 31.42}\right) = 166.82^\circ$$



f) Triángulo de velocidades de la salida:

$$B_3 = B_2 = 15 cm$$

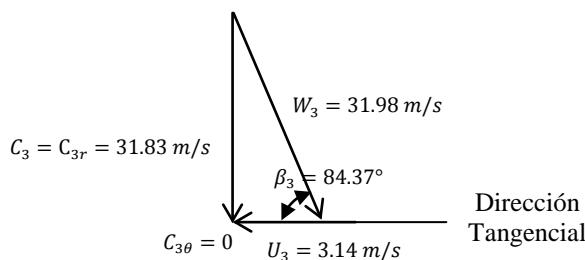
$$C_3 = C_{3r} = \frac{Q}{\pi D_3 B_3} = \frac{2}{\pi \times 0.20 \times 0.10} = 31.83 m/s$$

$$U_3 = \frac{\pi D_3 N}{60} = \frac{\pi \times 0.20 \times 300}{60} = 3.14 m/s$$

$$W_3 = \sqrt{31.83^2 + 3.14^2} = 31.98 m/s$$

$$\beta_3 = \arctan\left(\frac{31.83}{3.14}\right) = 84.37^\circ$$

Dirección
Radial



g) Grado de Reacción

$$Gr = \frac{H_p}{H_e}$$

$$H_p = \frac{31.98^2 - 13.94^2}{2 \times 9.81} + \frac{31.42^2 - 3.14^2}{2 \times 9.81} = 92.04 \text{ m}$$

$$Gr = \frac{92.04}{144.13} = 0.6386$$

Ejemplo 5.6

Una turbina Pelton gira con una velocidad angular de 400 RPM. Desarrollando una potencia mecánica máxima respecto a la velocidad tangencial de 66.15 KW, bajo una altura de turbina aprovechada de 60 m de columna de agua considerando las pérdidas en la tubería forzada. El diámetro del tubo de entrada en la base de la tobera única es de 200 mm. Las eficiencias hidráulica y mecánica son 83% y 98% respectivamente. La velocidad del chorro que sale de la tobera se puede calcular con la ecuación: $C_j = C_v \sqrt{2gH_T}$, donde C_v es el coeficiente de velocidad igual a 0.97, el cual da cuenta de las pérdidas en la tobera. Determine la razón de flujo volumétrico, b) el diámetro del chorro, c) el diámetro de la rueda y d) la presión en el tubo de entrada en la base de la tobera, e) Triángulo de velocidades en la salida

Datos:

$$N = 400 \text{ RPM}; \dot{W}_{mec} = 66.15 \text{ KW}; H_T = 60 \text{ m}; D_{et} = 200 \text{ mm}; \eta_h = 83\%; \eta_{mec} = 98\%$$

a) Caudal:

$$\eta_{mec} = \frac{\dot{W}_{mec}}{\dot{W}_{rotor}}$$

$$\dot{W}_{rotor} = \frac{66.15 \text{ KW}}{0.98} = 67.5 \text{ KW}$$

$$Q = \frac{\dot{W}_{rotor}}{\gamma H_T \eta_h} = \frac{67500}{998 \times 9.81 \frac{N}{m^3} \times 60 \times 0.83} =$$

$$Q = 0.138 \frac{m^3}{s}$$

b) Diámetro del chorro:

$$C_j = C_v \sqrt{2gH_T} = 0.97 \sqrt{2 \times 9.81 \times 60} = 33.3 \text{ m/s}$$

El área del chorro es el caudal entre la velocidad C_j

$$A_j = \frac{Q}{C_j} = \frac{0.138}{33.3} = 4.14 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$D_j = \sqrt{\frac{4A_j}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \times 4.14 \times 10^{-3}}{\pi}} = 0.0726 \text{ m}$$

c) Diámetro de la rueda Pelton:

Como la potencia desarrollada es la potencia máxima respecto a U , se tiene:

$$U = \frac{C_j}{2} = 16.65 \text{ m/s}$$

$$U = \frac{\pi D N}{60}$$

$$D = \frac{60U}{\pi N} = \frac{60 \times 16.65}{\pi \times 400} = 0.795 \text{ m}$$

d) Presión en la entrada de la tobera:

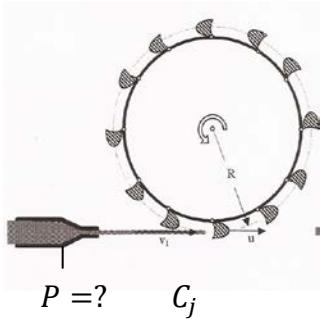
Aplicando Bernoulli desde la entrada de la tobera hasta después de la turbina se tiene:

$$\frac{P}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} - H_T = 0$$

$$P = \gamma \left(H_T - \frac{Q^2}{2gA^2} \right) =$$

$$P = 998 \times 9.81 \frac{N}{m^3} \left(60 - \frac{0.138^2}{2 \times 9.81 \times 0.0314^2} \right)$$

$$P = 578 \text{ kPa}$$



- e) Triangulo de velocidades en la salida:

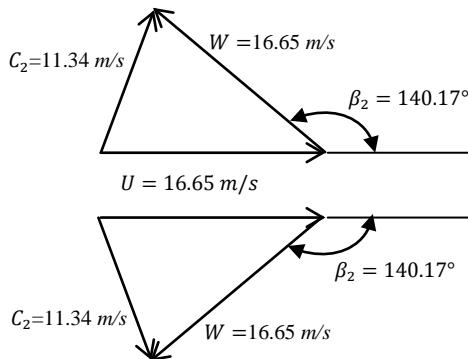
$$W_2 = C_j - U = 33.3 - 16.65 = 16.65 \text{ m/s}$$

$$\cos \beta_2 = 1 - \frac{\dot{W}_{rotor}}{\rho Q U (C_j - U)} = 1 - \frac{67500}{998 \times 0.138 \times 16.65 \times 16.65} = -0.7679$$

$$\beta_2 = \arccos(-0.7679) = 140.17^\circ$$

$$C_2 = \sqrt{16.65^2 + 16.65^2 - 2 \times 16.65 \times 16.65 \times \cos(180 - 140.17)}$$

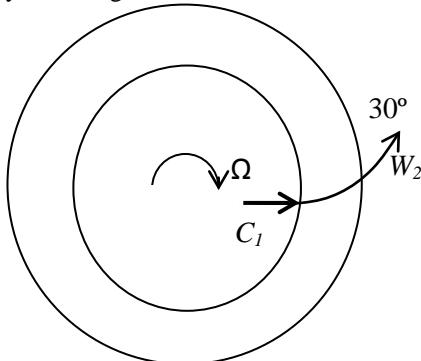
$$C_2 = 11.34 \text{ m/s}$$



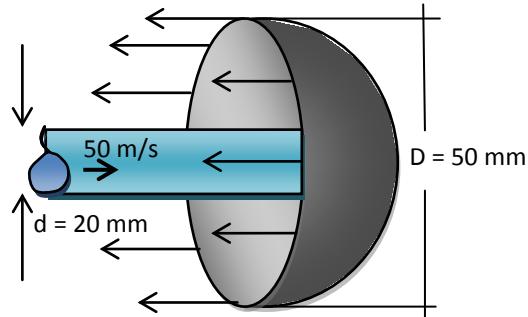
5.10 Problemas

5.1 El diámetro exterior de un ventilador centrífugo es de 30 cm y el diámetro interno es de 25 cm . El ancho de los alabes es 2.54 cm y es constante desde la entrada hasta la salida. El caudal estable de aire manejado es $375\text{ m}^3/\text{h}$ y la velocidad absoluta de entrada al alabe es radial. El ángulo de descarga del alabe es 30° y el rotor gira a 1725 RPM .

Suponiendo que no existen pérdidas mecánicas ni pérdidas hidráulicas y que la conducción del fluido es perfecta, calcular la potencia requerida por el ventilador.



5.2 Un chorro de aire horizontal choca contra la superficie interior de un hemisferio hueco con una velocidad de 50 m/s ; Calcular la fuerza horizontal necesaria para mantener fijo el hemisferio.



5.3 Una bomba de hélice o axial mueve un caudal de $2.5\text{ m}^3/\text{s}$ girando a 600 RPM . El agua entra al impulsor en dirección axial. La velocidad relativa a la salida también es axial. Al impulsor sigue un difusor constituido por un sistema de álabes fijos que enderezan y transforman parcialmente la energía cinética en energía de presión. La acción del flujo se considera en un diámetro medio del rotores móvil de 10 pulg . El diámetro de tope es 15 pulg . Dibuje los triángulos de velocidades en la entrada y en la salida del rotor con sus respectivas velocidades, ángulos y magnitudes. Dibuje el diagrama de vértice común. Calcule la potencia mecánica de la bomba si esta tiene una eficiencia mecánica del 98%. ¿Calcule el grado de reacción?

5.4 Una bomba centrífuga de alabe radial con radio de entrada 2 cm y de salida 7 cm , ancho del alabe en la salida 0.4 cm . Se tiene máxima transferencia de energía y conducción perfecta. El agua entra con una velocidad absoluta de 8 pies/s , la velocidad de giro es 3460 RPM , rendimiento global y mecánico 75% y 95% respectivamente. La bomba está diseñada de manera que la velocidad radial permanece constante. Dibuje los triángulos de velocidades en la entrada y en la salida del rotor con sus respectivas velocidades, ángulos y magnitudes. Calcular: Caudal, Altura de bombeo, Potencia mecánica, Grado de reacción.

5.5 Una bomba axial provista de un estator de descarga, radio de tope 50 cm , radio de raíz 10 cm , gira a 1750 RPM . La velocidad del flujo que entra axial, es 2 m/s .

Calcular:

El caudal

Dibuje los triángulos de velocidades en la entrada y en la salida con sus respectivas velocidades y ángulos si la altura intercambiada en el rotor es 60 m de agua, suponiendo conducción perfecta.

5.6 Una bomba prototipo manejará un caudal de $3.5\text{ pie}^3/\text{s}$, con una altura de bombeo de 300 pies girando a 1760 RPM . El rendimiento mecánico se estima en 95% . La línea de succión del sistema tiene 100 pies de longitud y es de acero con rugosidad 0.00015 pies . Use criterios de pre-diseño requeridos y calcule:

Diámetro del rotor.

La diferencia de cota entre la bomba y la superficie libre del tanque de succión, use un factor de seguridad del 20%.

Si el ancho del alabe es constante e igual a 1 pulg y el diámetro de entrada al rotor es 0.82 pies y se tiene máxima transferencia de energía, calcular el ángulo de descarga del alabe y el grado de reacción de la bomba.

5.7 Un compresor centrífugo maneja un flujo másico de 5 Kg/s de aire. Las condiciones totales de la entrada son 100 KPa y 19°C , la eficiencia adiabática es 82%, el numero de mach a la salida del rotor debe ser igual a 0.8 y se estima el 80% de las pérdidas en la etapa se producen en el rotor. El compresor tiene una relación de presión igual a 4, el diámetro del rotor es 0.45 m y el ancho del alabe en la salida es 2 cm . Determine el tipo de alabe calculando el ángulo relativo de salida del rotor, suponiendo conducción perfecta y entrada radial. Si en el ducto de salida del compresor tiene un diámetro de $6''$ ($\text{DI}=\text{DN}$). Un manómetro mide una presión de 225 KPa . Calcule el número de Mach. Si el rendimiento mecánico es de 98%, realice el esquema de potencia del compresor.

5.8 Aire a una temperatura ambiente de 27°C y presión normal ($k=1.4$, $C_p=1.005 \text{ KJ/KgK}$, $R=287 \text{ J/KgK}$) entra al impulsor de un compresor centrífugo en la dirección axial. El impulsor rota a 16000 RPM , la relación de presión total es 5, la eficiencia adiabática es 85%, el flujo másico es 1.8 Kg/s y la eficiencia mecánica 95%. Determinar:

- Diámetro de salida del impulsor suponiendo conducción perfecta del fluido y máxima transferencia de energía si el ángulo del alabe a la salida es 60° y la velocidad relativa en la salida es 55 m/s .
- Ancho del rotor B_2 y el ángulo de salida de la velocidad absoluta si las pérdidas internas en el compresor ocurren 60% en el rotor y 40% en el difusor.
- Número de Mach en la descarga del rotor.
- Potencia del motor de accionamiento.

5.9 Un compresor axial recibe aire a 15°C y 100 KPa . El flujo másico manejado es igual a 5 Kg/s , el flujo sale de los alabes fijos del estator en la dirección axial y con una velocidad de 160 m/s . Se supone conducción perfecta y máxima transferencia de energía. Si el diámetro de raíz del impulsor en la entrada es 8 cm :

Calcular el diámetro de tope del impulsor

Si la velocidad absoluta del fluido a la salida del rotor es 200 m/s y el rotor gira a 10000 RPM , dibujar los triángulos de velocidades de la entrada y salida del rotor con sus respectivas magnitudes.

Si la velocidad absoluta del fluido a la salida del rotor se mantiene en 200 m/s y el rotor gira a 20000 RPM Dibujar el triángulo de velocidades a la salida del rotor con sus respectivas magnitudes. Calcular la potencia mecánica si la eficiencia mecánica es 97% .

5.10 Aire a una temperatura ambiente de 27°C y 100 KPa entra al impulsor de un compresor centrífugo en la dirección axial. La relación de presión total es 5, la eficiencia global es 84.48%, el flujo másico es 2 Kg/s y la eficiencia mecánica 96%. El diámetro del impulsor es 48.97 cm . Determinar:

- El régimen de revoluciones del impulsor suponiendo conducción perfecta, si en la salida: el ángulo del alabe es 30° y la componente de la velocidad para calcular el flujo de gas se estima igual a 17.5 m/s .
- Ancho del rotor B_2 si 57% de las pérdidas hidráulicas ocurren en el rotor.
- Potencia del motor de accionamiento.
- Si el radio de tope en la entrada es 18 cm y el de raíz 10 cm dibuje los triángulos de velocidades en la entrada y salida del rotor con sus respectivas direcciones y magnitudes de ángulos y velocidades.

Use las siguientes propiedades en el problema:

$k=1.4$, $C_p=1 \text{ KJ/KgK}$, $R=287 \text{ J/KgK}$ y la densidad del aire en la entrada al rotor del compresor es 1 kg/m^3 .

5.11 Entra y sale gas axialmente de una turbina axial. El gas sale de las toberas formando un ángulo de 60° . La velocidad de entrada es 160 m/s . La potencia útil que se obtiene de esta turbina la cual acciona un generador es 2 MW , con una eficiencia mecánica de 98%. Las condiciones totales a la entrada de la etapa son 800 KPa y 1120 K . Un manómetro colocado a la salida de las toberas mide 350 KPa . La variación de las entalpias estáticas en el rotor a través del rotor ($h_3 - h_{2s}$) se estima igual a 3600 J/Kg . El flujo másico de gas manejado por la turbina es 25 Kg/s de un gas con las siguientes propiedades: $C_p = 1200 \frac{\text{J}}{\text{KgK}}$; $R_g = 300 \frac{\text{J}}{\text{KgK}}$. Debido al tamaño de la turbina, el diámetro medio que se mide es igual a $1.5m$.

Calcular:

La variación de presión total debido a pérdidas en las toberas.

La eficiencia adiabática total a total.

El régimen de revoluciones de la turbina.

Dibujar con sus respectivas direcciones, magnitudes de las velocidades y de los ángulos, el triángulo de velocidades a la entrada y a la salida del rotor.

Grado de reacción

Incremento porcentual del área de flujo requerido para el proceso de expansión en el rotor de la turbina.

5.12 Se tiene una turbina de gas centrifuga y se conocen los siguientes datos:

$$P_{01} = 0.4 \text{ MPa}$$

$$T_{01} = 1140 \text{ K}$$

Presión estática a la salida $P_3 = 0.1 \text{ MPa}$ y se supone despreciable la velocidad a la salida, es decir, $C_3 \approx 0 \text{ m/s}$.

Eficiencia adiabática $\eta_{0-0} = 0.90$

Eficiencia Mecánica $\eta_{mec} = 0.95$

Potencia mecánica $W_{mec} = 900 \text{ KW}$

El número de Mach a la salida del distribuidor es $M_2 = 1$ y $\alpha_2 = 30^\circ$

Se sabe que la relación ancho de rodete en la entrada con el radio de entrada es $B_2/r_2 = 0.09$

Las propiedades del gas que entra a la turbina: $k = 1.333$ y $R = 287 \text{ J/KgK}$

Dibuje el diagrama T-s detallado.

Calcular:

El flujo máscico manejado por la turbina $\dot{m} = ?$

El diámetro del rotor de la turbina $D_2 = ?$ Si se sabe que la velocidad relativa del fluido a la entrada del rotor tiene la dirección radial y que el 60% de las pérdidas de toda la etapa de la turbina, ocurren en el rotor.

Régimen de revoluciones de la turbina en RPM ?

Capítulo 6

Eficiencias de las Turbomáquinas

- 6.1. Introducción.
- 6.2. Flujo másico interno de recirculación o fuga.
- 6.3. Eficiencias de las Turbomáquinas Motoras.
 - 6.3.1. Eficiencias de las Turbomáquinas Motoras Térmicas.
 - 6.3.2. Eficiencias de las Turbomáquinas Motoras Hidráulicas.
- 6.4. Eficiencias de las Turbomáquinas Generadoras.
 - 6.4.1. Eficiencias de las Turbomáquinas Generadoras Térmicas.
 - 6.4.2. Eficiencias de las Turbomáquinas Generadoras Hidráulicas.
- 6.5. Eficiencia Politrópica de Compresores y Turbinas Térmicas.
 - 6.5.1. Eficiencia Politrópica de Compresores, η_{pc} .
 - 6.5.2. Eficiencia Politrópica de Turbinas, η_{pt} .
- 6.6. Influencia del número de etapas sobre la eficiencia adiabática o isentrópica de Compresores y Turbinas Térmicas.
 - 6.6.1. Compresores.
 - 6.6.2. Turbinas.
- 6.7. Factor de recalentamiento en Turbinas de Vapor.
- 6.8. Eficiencias de Componentes de Turbomáquinas.
 - 6.8.1. Eficiencia de la Tobera.
 - 6.8.2. Eficiencia del Difusor.
- 6.9. Geometría óptima de difusores planos y cónicos.
- 6.10. Problemas.

Capítulo 6

Eficiencias de las Turbomáquinas

6.1. Introducción.

Se definen en forma precisa cada una de las eficiencias usadas para turbomáquinas: eficiencia adiabática total-a-total, adiabática total-a-estática, volumétrica, hidráulica, mecánica y global. Además, se define la eficiencia politrópica, el factor de recalentamiento y se estudia el efecto del número de etapas.

Se define también la eficiencia de los canales de flujo componentes de turbomáquinas: toberas y difusores.

6.2. Flujo másico interno de recirculación o fuga.

Para entender este fenómeno se puede hacer referencia a la Fig. 6.1 que muestra el corte meridional de un rodete de turbomáquina radial. La diferencia de presiones existente entre la salida y la entrada del rodete provoca un flujo másico de fuga o recirculación, \dot{m}_f , el cual es más importante en las máquinas de pequeñas dimensiones que en las de grandes dimensiones. Despreciando las pequeñas fugas al exterior de la máquina, se concluye que el flujo másico de entrada es igual al flujo másico de salida, \dot{m} .

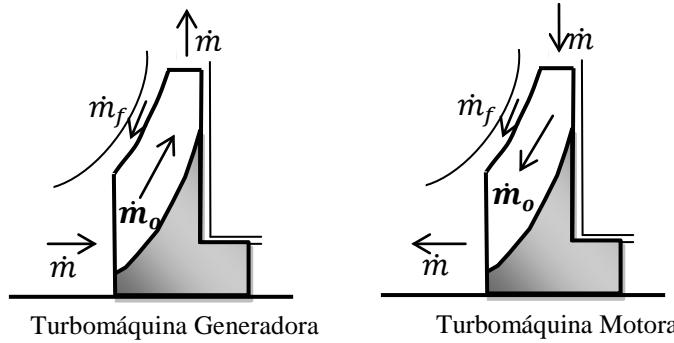


Figura 6.1. Esquema ilustrativo del flujo másico de fuga o de recirculación

El flujo másico que pasa por el rodete, \dot{m}_o , en turbomáquinas generadoras es la suma del flujo másico de la máquina más el flujo másico de recirculación.

$$\dot{m}_o = \dot{m} + \dot{m}_f \quad (6.1)$$

En turbomáquinas motoras, el flujo másico que pasa por el rodete, \dot{m}_o , es la resta del flujo masico de la máquina menos el flujo másico de fuga:

$$\dot{m}_o = \dot{m} - \dot{m}_f \quad (6.2)$$

6.3. Eficiencias de las Turbomáquinas Motoras.

6.3.1. Eficiencias de las Turbomáquinas Motoras Térmicas.

La Fig. 6.2 ilustra el intercambio de potencia entre el fluido y la máquina en turbinas térmicas.

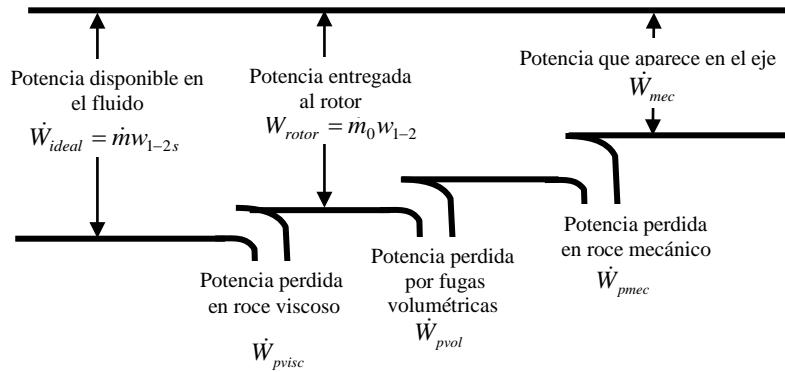


Figura 6.2. Esquema de intercambio de potencia en turbinas térmicas

6.3.1.1. Eficiencia interna o adiabática total-a-total, η_{i0-0}

Se define en términos de los cambios de propiedades totales o de estancamiento que sufre el fluido entre la entrada y salida de la maquina y su valor refleja todas las irreversibilidades que ocurren dentro de la maquina tanto volumétricas como por roce viscoso o hidráulico. En referencia a la Fig. 6.2 se tiene:

$$\eta_{i0-0} = \frac{\text{Potencia entregada al rotor}}{\text{Potencia disponible en el fluido}} = \frac{\dot{W}_{\text{rotor}}}{\dot{W}_{\text{ideal}}} \quad (6.3)$$

En referencia a la Fig. 6.3 se tiene:

$$\eta_{i0-0} = \frac{\dot{m}_o w_{1-2}}{\dot{m} w_{1-2s}} = \frac{\dot{m}_o (h_{01} - h_{02})}{\dot{m} (h_{01} - h_{02s})} \quad (6.4)$$

Esta eficiencia se utiliza cuando la energía cinética a la salida de la turbina se va a usar posteriormente, como sucede en las turbinas de gas para propulsión de aviones.

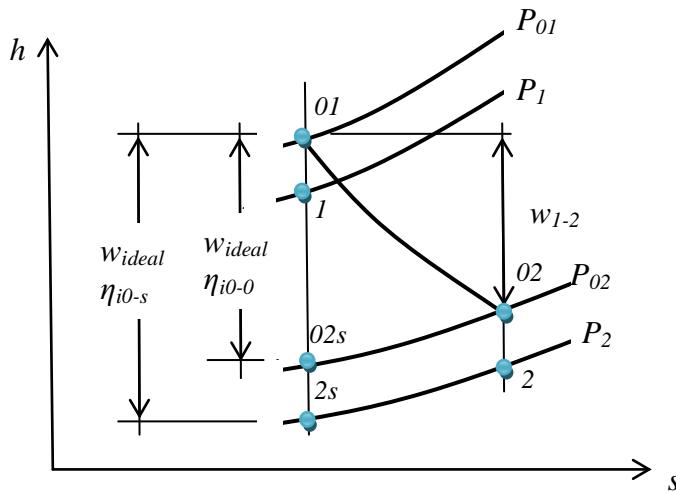


Figura 6.3. Diagrama entalpia – entropía para turbinas térmicas

6.3.1.2. Eficiencia interna o adiabática total-a-estática. η_{i0-s} .

Una definición alternativa de la eficiencia adiabática usa las condiciones estáticas en la salida para calcular el trabajo específico ideal. En referencia a la Fig. 6.3 se tiene:

$$\eta_{i0-s} = \frac{\dot{m}_o (h_{01} - h_{02})}{\dot{m} (h_{01} - h_{2s})} \quad (6.5)$$

Esta eficiencia se utiliza cuando la energía cinética a la salida de la turbina no se va a usar posteriormente, como sucede en las turbinas de gas y de vapor para producción de electricidad.

6.3.1.3 Eficiencia volumétrica, η_v .

Las fugas internas, \dot{m}_f , constituyen una fuente de perdidas porque el fluido que no cruza el rodete no tiene la oportunidad de transferir su energía disponible al rotor. Se define la eficiencia volumétrica como:

$$\eta_v = \frac{\dot{m}_o}{\dot{m}} \quad (6.6)$$

6.3.1.4 Eficiencia hidráulica, η_h .

Refleja todas las fuentes de irreversibilidades que ocurren dentro de la máquina por roce viscoso o hidráulico y se define en términos de la relación entre el trabajo específico ideal de la máquina y el trabajo específico real del rotor:

$$\eta_h = \frac{\dot{W}_{\text{rotor}}/\dot{m}_o}{\dot{W}_{\text{ideal}}/\dot{m}} = \frac{U_1 C_{\theta 1} - U_2 C_{\theta 2}}{\dot{W}_{\text{ideal}}/\dot{m}} = \frac{(h_{01} - h_{02})}{(h_{01} - h_{02s})} \quad (6.7)$$

Se usa el trabajo específico ideal basado en las condiciones totales de salida o estáticas de salida dependiendo de la eficiencia interna usada.

Sustituyendo η_v y η_h en la definición de eficiencia interna se tiene:

$$\eta_{i0-0} = \eta_v \eta_h$$

$$\eta_{i0-s} = \eta_v \eta_h$$

Por lo tanto, la eficiencia interna es igual a la eficiencia hidráulica si no existen fugas de recirculación.

6.3.1.5. Eficiencia mecánica, η_m .

Refleja las fuentes perdidas externas de energía útil; es decir, las pérdidas ocasionadas por el rozamiento mecánico en cojinetes, empaques y prensaestopas. El rozamiento hidráulico del fluido atrapado en los espacios entre la cubierta del rodeté y la carcasa de la máquina, el llamado rozamiento de disco, es una perdida hidráulica; sin embargo, se considera como una perdida mecánica. En referencia a la Fig. 6.2 se tiene:

$$\eta_m = \frac{\text{Potencia que aparece en el eje}}{\text{Potencia entregada al rotor}} = \frac{\dot{W}_{mec}}{\dot{W}_{rotor}} \quad (6.9)$$

6.3.1.6. Eficiencia global, η_T .

Se define en referencia a la Fig. 6.2 como:

$$\begin{aligned} \eta_T &= \frac{\text{Potencia que aparece en el eje}}{\text{Potencia disponible en el fluido}} = \frac{\dot{W}_{mec}}{\dot{W}_{ideal}} \\ \eta_T &= \frac{\dot{m}_o (h_{01} - h_{02})}{\dot{m} (h_{01} - h_{02s}) \dot{m}_o (h_{01} - h_{02})} \end{aligned} \quad (6.10)$$

Sustituyendo η_v , η_h y η_m en la ecuación (6.10) se tiene:

$$\eta_T = \eta_v \eta_h \eta_m \quad (6.11)$$

$$\eta_T = \eta_i \eta_m \quad (6.12)$$

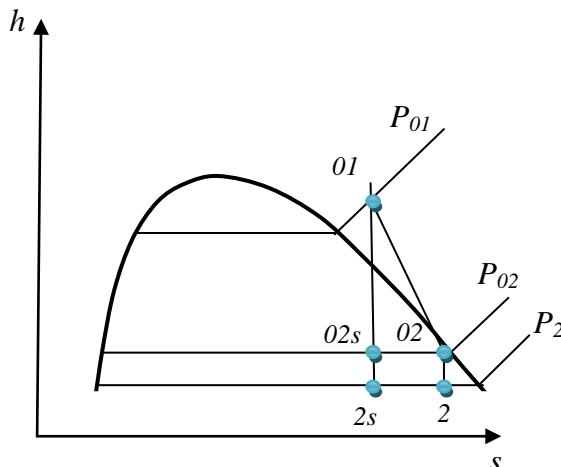
Ejemplo 6.1.

Una turbina de vapor recibe el fluido a condiciones totales de 4 MPa abs y 300°C . Un manómetro colocado en el ducto de descarga de la turbina indica una presión de 249 KPa man . La potencia entregada al eje de la máquina es de 20 MW y la eficiencia mecánica es de 98% . El flujo másico de vapor que entra a la turbina es de 55 Kg/s , existiendo un flujo másico de fuga es 2 Kg/s . Calcular:

- a) La eficiencia adiabática o interna de la turbina.
 - b) La potencia entregada al rotor.
 - c) La eficiencia volumétrica de la turbina.
 - d) La eficiencia hidráulica de la turbina.
 - e) La potencia disponible en el vapor.
 - f) La potencia perdida en rose viscoso.
 - g) La potencia perdida en roce mecánico.
- a) La eficiencia adiabática o interna que debe calcularse es la total-a-estática, ya que las turbinas de vapor se usan únicamente para producir potencia mecánica.

$$\begin{aligned} P_{01} &= 4 \text{ MPa} \\ T_{01} &= 300^\circ\text{C} + 273 = 573 \text{ K} \\ h_{01} &= 2863 \text{ KJ/Kg} \\ s_{01} &= 6.364 \text{ KJ/KgK} \\ \text{Diagrama de Mollier con} \\ P_2 &= 249 + 101 = 0.35 \text{ MPa} \\ s_{02s} &= 6.364 \text{ KJ/KgK} \end{aligned}$$

Se obtiene mezcla en el punto $2s$.



$$x = \frac{s_{2S} - s_{2f}}{s_{2g} - s_{2f}} = \frac{6.364 - 1.727}{5.214} = 0.8893$$

$$h_{2S} = h_{2f} + x(h_{2g} - h_{2f}) = 584 + 0.8893(2148) = 2494 \text{ KJ/Kg}$$

$$h_{01} - h_{2S} = 2963 - 2494 = 469 \text{ KJ/Kg}$$

$$\dot{W}_{rotor} = \frac{\dot{W}_{eje}}{\eta_{mec}} = \frac{20MW}{0.98} = 20.408 \text{ MW}$$

$$\dot{W}_{rotor} = \dot{m}_o(h_{01} - h_{02}) \Rightarrow \frac{\dot{W}_{rotor}}{\dot{m}_o} = (h_{01} - h_{02}) \Rightarrow h_{02} = h_{01} - \frac{\dot{W}_{rotor}}{\dot{m}_o}$$

$$h_{02} = 2963 \text{ KJ/Kg} - \frac{20408 \frac{\text{KJ}}{\text{s}}}{53 \frac{\text{Kg}}{\text{s}}} = 2963 - 385 = 2578 \text{ KJ/Kg}$$

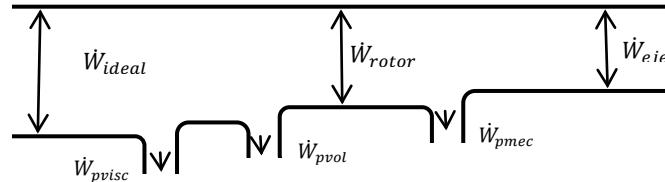
$$\eta_{i0-s} = \frac{\dot{m}_o (h_{01} - h_{02})}{\dot{m} (h_{01} - h_{2S})} = \frac{53 (2963 - 2578)}{55 (2963 - 2494)} = \frac{53 (385)}{55 (469)} = 79.10\%$$

b) Potencia entregada al rotor

$$\dot{W}_{rotor} = 20.408 \text{ MW}$$

d) Eficiencia volumétrica

$$\eta_v = \frac{\dot{m}_o}{\dot{m}} = 96.36\%$$



e) Eficiencia hidráulica

$$\eta_h = \frac{(h_{01} - h_{02})}{(h_{01} - h_{02s})} = \frac{(385)}{(469)} = 82.09\%$$

e) Potencia disponible en el fluido

$$\dot{W}_{ideal} = \dot{m}(h_{01} - h_{2s}) = 25.795 \text{ MW}$$

f) Potencia debido a pérdidas viscosas

$$\dot{W}_{pvisc} = \dot{m}(h_{02} - h_{2s}) = \dot{W}_{ideal}(1 - \eta_h) = 25.795 \text{ MW}(1 - 0.8209) = 4.620 \text{ MW}$$

g) Potencia perdida por fugas volumétricas

$$\dot{W}_{pvol} = \dot{m}_f(h_{01} - h_{02}) = (\dot{W}_{ideal} \eta_h)(1 - \eta_v) = (25.795 \text{ MW} 0.8209)(1 - 0.9636) = 0.771 \text{ MW}$$

h) Potencia perdida por roce mecánico

$$\dot{W}_{pmech} = \dot{W}_{rotor} - \dot{W}_{eje} = 20.408 \text{ MW} - 20 \text{ MW} = 0.408 \text{ MW}$$

6.3.2. Eficiencias de las Turbomáquinas Motoras Hidráulicas.

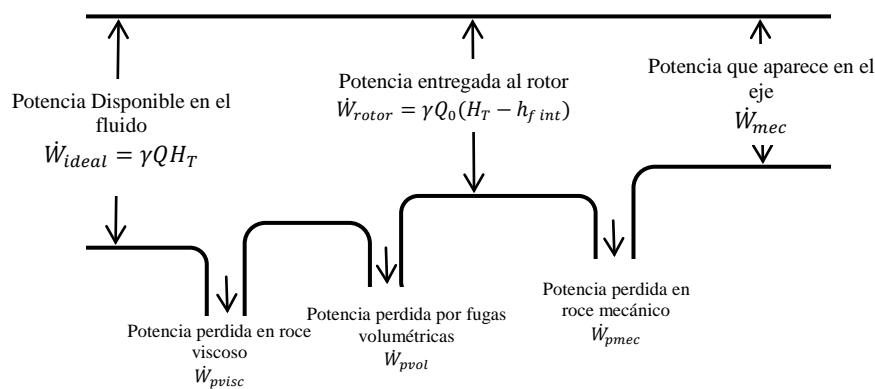


Figura 6.4. Esquema de intercambio de potencia en turbinas hidráulicas.

La Fig. 6.4 ilustra el intercambio de potencia entre el fluido y la maquina en turbinas hidráulicas.

6.3.2.1. Eficiencia interna, η_i .

En referencia a la Fig. 6.4 se tiene:

$$\eta_i = \frac{\text{Potencia entregada al rotor}}{\text{Potencia disponible en el fluido}} = \frac{\dot{W}_{rotor}}{\dot{W}_{ideal}} = \frac{Q_0(H_T - h_{f\ int})}{QH_T} \quad (6.13)$$

6.3.2.2. Eficiencia volumétrica, η_v .

$$\eta_v = \frac{Q_o}{Q} \quad (6.14)$$

6.3.2.3 Eficiencia hidráulica, η_h .

$$\eta_h = \frac{(H_T - h_{f\ int})}{H_T} = \frac{1/g(U_1 C_{\theta 1} - U_2 C_{\theta 2})}{H_T} \quad (6.15)$$

Sustituyendo η_v y η_h en la definición de eficiencia interna se tiene:

$$\eta_i = \eta_v \eta_h \quad (6.16)$$

Por lo tanto, la eficiencia interna es igual a la eficiencia hidráulica si no existen fugas de recirculación.

3.3.1.4. Eficiencia mecánica, η_m .

$$\eta_m = \frac{\text{Potencia que aparece en el eje}}{\text{Potencia entregada al rotor}} = \frac{\dot{W}_{mec}}{\dot{W}_{rotor}} \quad (6.17)$$

3.3.1.5. Eficiencia global, η_T .

Se define en referencia a la Fig. 6.4 como:

$$\eta_T = \frac{\text{Potencia que aparece en el eje}}{\text{Potencia disponible en el fluido}} = \frac{\dot{W}_{mec}}{\dot{W}_{ideal}} \quad (6.18)$$

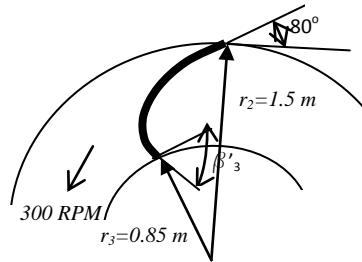
Sustituyendo η_v , η_h y η_m en la ecuación (6.18) se tiene:

$$\eta_T = \eta_v \eta_h \eta_m \quad (6.19)$$

Ejemplo 6.2.

El rotor de una turbina radial tipo Francis que maneja un caudal de $20 m^3/s$ y tiene un ancho de álabe a la entrada de $0.35 m$ se esquematiza en la Figura. Se supone conducción perfecta sin incidencia, se mantiene constante la velocidad radial por criterio de diseño, máxima transferencia de energía y una eficiencia volumétrica de 99%, determinar:

- 1) Triángulo de velocidades a la entrada del rotor.
- 2) Triángulo de velocidades y ángulo del álabe a la descarga del rotor.
- 3) Ancho del álabe en la descarga del rotor.
- 4) Altura intercambiada en el rotor [m].
- 5) Potencia desarrollada por el rotor [KW].
- 6) Potencia mecánica en el eje [KW] si la eficiencia mecánica es de 98%.
- 7) Altura neta de turbina [m] si la eficiencia hidráulica es 88%.
- 8) Potencia del líquido a la entrada de la turbina [KW].
- 9) Eficiencia global de la turbina.



1) Triángulo de velocidades a la entrada del rotor.

$$Q_0 = \eta_v Q = 0.99 \times 20 = 19.8 \text{ m}^3/\text{s};$$

$$Q_0 = \pi D_2 B_2 C_{2r}$$

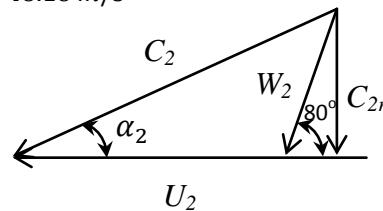
$$C_{2r} = \frac{Q_0}{\pi D_2 B_2} = \frac{19.8 \text{ m}^3/\text{s}}{3.1416 \times 2 \times 1.5 \times 0.35} = 6 \text{ m/s}$$

$$U_2 = \frac{\frac{N_2 \pi}{60} r_2}{60} = \frac{300 \times 2 \pi}{60} \times 1.5 = 47.12 \text{ m/s}$$

$$W_2 = C_{2r} / \sin 80^\circ = 6 / \sin 80^\circ = 6.093 \text{ m/s}$$

$$W_{2\theta} = C_{2r} / \tan 80^\circ = 6 / \tan 80^\circ = 1.058 \text{ m/s}$$

$$C_{2\theta} = U_2 + W_{2\theta} = 47.12 + 1.058 = 48.18 \text{ m/s}$$



$$C_2 = (C_{2r}^2 + C_{2\theta}^2)^{1/2} = 48.55 \text{ m/s}$$

$$\alpha_2 = \arctan \left(\frac{C_{2r}}{C_{2\theta}} \right) = \arctan \left(\frac{6}{48.18} \right) = 7.10^\circ$$

2) Triángulo de velocidades y ángulo del álabe a la descarga del rotor.

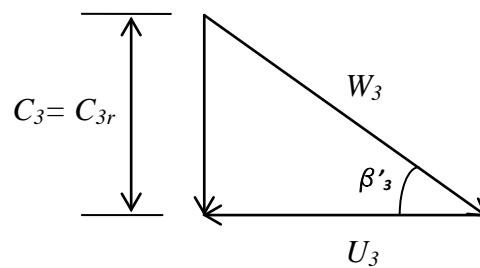
$$U_3 = \frac{2 \times 3.1416 \times 300}{60} \times 0.85 = 26.7 \text{ m/s}$$

Por criterio de diseño se mantiene constante la velocidad meridional \$C_m = C_r\$ a través del rotor.

$$C_3 = C_{3r} = C_{2r} = 6 \text{ m/s}$$

$$W_3 = (C_3^2 + U_3^2)^{1/2} = 27.37 \text{ m/s}$$

$$\beta'3 = \arctan(C_3/U_3) = 12.36^\circ$$



3) Ancho del álabe en la descarga del rotor

$$C_3 = C_{3r} = C_{2r} = 6 \text{ m/s} \quad (\text{Criterio de diseño})$$

$$B_3 = Q_0 / (\pi D_3 C_{3r}) = 19.8 / (3.1416 \times 2 \times 0.85 \times 6) = 0.618 \text{ m}$$

4) Altura intercambiada en el rotor

$$H_{rotor} = \frac{1}{g} U_2 C_{2\theta} = (47.12 \frac{m}{s} \times 48.18 \frac{m}{s}) / (9.81 m/s^2) = 231.42 m$$

10) 5) Potencia desarrollada por el rotor

$$\dot{W}_{rotor} = \gamma Q_0 H_{rotor} = 9810 N/m^3 \times 19.8 m^3/s \times 231.42 m = 44.95 MW$$

6) Potencia mecánica en el eje si la eficiencia mecánica es de 98%

$$\dot{W}_{mec} = \dot{W}_{rotor} \eta_{mec} = 0.98 \times 44.95 MW = 44.05 MW$$

7) Altura neta de turbina [m] si la eficiencia hidráulica es 88%

$$H_T = \frac{H_{rotor}}{\eta_{hid}} = \frac{231.42 m}{0.88} = 262.98 m$$

8) Potencia del líquido a la entrada de la turbina.

$$\dot{W}_{hid} = \gamma Q H_T = 9810 N/m^3 \times 20 m^3/s \times 262.98 m = 51.6 MW$$

9) Eficiencia global de la turbina.

$$\eta_T = \eta_v \eta_h \eta_m = 0.99 \times 0.88 \times 0.98 = 85.38\%$$

6.4. Eficiencias de las Turbomáquinas Generadoras.

6.4.1. Eficiencias de las Turbomáquinas Generadoras Térmicas.

La Figura 3.5 ilustra el intercambio de potencia entre el fluido y la máquina en compresores.

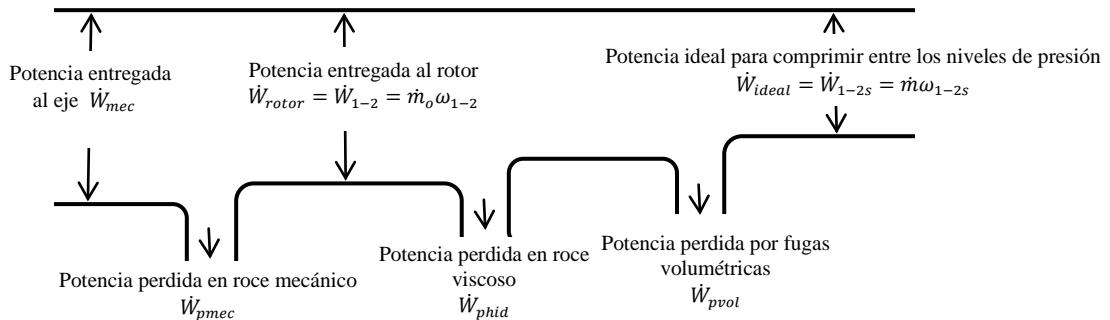


Figura 6.5. Esquema de intercambio de potencia en compresores.

6.4.1.1. Eficiencia interna o adiabática total – a – total, η_{i_0-0} .

Se define en términos de los cambios de propiedades totales o de estancamiento que sufre el fluido entre la entrada y la salida de la máquina y su valor refleja todas las irreversibilidades que ocurren dentro de la máquina tanto volumétricas como por roce viscoso o hidráulico. En referencia a la Fig. 6.6 se tiene:

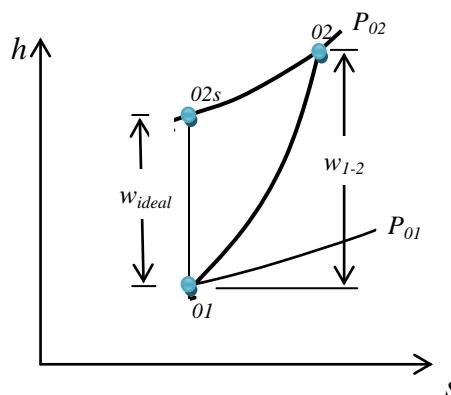


Figura 6.6. Diagrama entalpía – entropía para compresores

$$\eta_{i0-0} = \frac{\text{Potencia mínima para comprimir entre } P_{01} \text{ y } P_{02}}{\text{Potencia real para comprimir entre } P_{01} \text{ y } P_{02}} = \frac{\dot{W}_{ideal}}{\dot{W}_{rotor}} \quad (6.20)$$

$$\eta_{i0-0} = \frac{\dot{m} \frac{\omega_{1-2s}}{\dot{m}_o \omega_{1-2}}}{\dot{m}_o} = \frac{\dot{m} (h_{02s} - h_{01})}{\dot{m}_o (h_{02} - h_{01})} \quad (6.21)$$

6.4.1.2. Eficiencia volumétrica, η_v .

Las fugas internas, Las fugas internas, \dot{m}_f , constituyen una fuente de pérdidas porque el rodamiento debe ejecutar trabajo sobre \dot{m}_o en lugar de \dot{m} . Se define la eficiencia volumétrica como:

$$\eta_v = \frac{\dot{m}}{\dot{m}_o} \quad (6.22)$$

6.4.1.3 Eficiencia hidráulica, η_h .

Refleja todas las fuentes de irreversibilidades que ocurren dentro de la máquina por roce viscoso o hidráulico y se define en términos de la relación entre el trabajo específico ideal de la máquina y el trabajo específico real del rodete:

$$\eta_h = \frac{(h_{02s} - h_{01})}{(h_{02} - h_{01})} \frac{(h_{02s} - h_{01})}{(U_2 C_{\theta 2} - U_1 C_{\theta 1})} \quad (6.23)$$

Sustituyendo η_v y η_h en la definición de eficiencia interna se tiene:

$$\eta_{i0-0} = \eta_v \eta_h \quad (6.24)$$

Por lo tanto, la eficiencia interna es igual a la eficiencia hidráulica si no existen fugas de recirculación.

6.4.1.4. Eficiencia mecánica, η_m .

Refleja las pérdidas externas de energía útil; es decir, las pérdidas ocasionadas por el rozamiento mecánico en cojinetes, empaques y prensaestopas. El rozamiento hidráulico del fluido atrapado en los espacios entre la cubierta del rodete y la carcasa de la máquina, el llamado rozamiento de disco, es una perdida hidráulica; sin embargo, se considera como una perdida mecánica.

$$\eta_m = \frac{\text{Potencia real para comprimir entre } P_{01} \text{ y } P_{02}}{\text{Potencia mecánica entregada al eje}} = \frac{\dot{W}_{rotor}}{\dot{W}_{mec}} \quad (6.25)$$

6.4.1.5. Eficiencia global, η_c .

Se define en referencia a la Fig. 6.5 como:

$$\eta_c = \frac{\text{Potencia mínima para comprimir entre } P_{01} \text{ y } P_{02}}{\text{Potencia mecánica entregada al eje}} = \frac{\dot{W}_{ideal}}{\dot{W}_{mec}} \quad (6.26)$$

Sustituyendo η_v , η_h y η_m en la ecuación (6.26) se tiene:

$$\eta_c = \eta_v \eta_h \eta_m \quad (6.27)$$

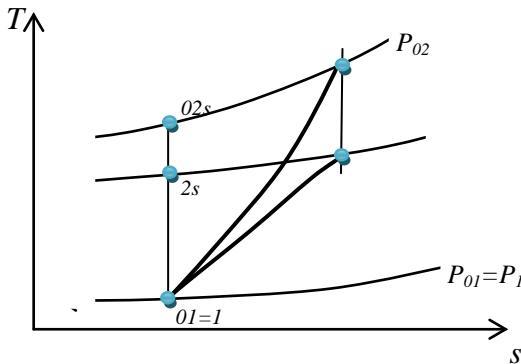
$$\eta_c = \eta_{i0-0} \eta_m \quad (6.28)$$

Ejemplo 6.3.

Un compresor industrial con una relación de compresión total de 3:1 en el punto de diseño, toma aire de la atmósfera a 100 KPa y 20°C y lo descarga a un número de Mach estático de 0.15 y una temperatura estática de 145°C. El flujo másico comprimido es 1 Kg/s y el flujo másico de recirculación es de 0.01 Kg/s.

Calcular:

- a) La eficiencia hidráulica del compresor.
- b) La eficiencia adiabática o interna del compresor.
- c) La potencia ideal requerida en KW para realizar la compresión.
- d) La potencia en KW comunicada al rotor del compresor.
- e) La potencia en KW del motor de accionamiento si la eficiencia mecánica del compresor es 98%.
- f) La potencia perdida por efectos hidráulicos.
- g) La potencia perdida por efectos volumétricos.
- h) La potencia perdida por efectos mecánicos.
- i) La eficiencia global del compresor.



$$k = 1.4 \quad R = 287 \frac{J}{Kg} K \quad Cp = 1.006 KJ/KgK$$

$$C_1 \cong 0 \quad \Rightarrow \quad P_{01} = P_1 = 100 KPa$$

$$T_{01} = T_1 = 20^\circ C + 273.15 = 293.15^\circ K$$

$$T_2 = 145^\circ C + 273.15 = 418.15 K$$

$$M_2 = C_2/a_2 = C_2/(kRT_2)^{\frac{1}{k}} \quad \Rightarrow \quad C_2^2 = M_2^2 kRT_2$$

$$T_{02} = T_2 + \frac{M_2^2 k R T_2}{2 C_P} = T_2 \left(1 + \frac{M_2^2 k R}{2 C_P} \right) = 418.15 K \left(1 + \frac{(0.15)^2 \times 1.4 \times 287}{2 \times 1006 \frac{J}{Kgm^\circ K}} \right)$$

$$T_{02} = 420.03 K$$

$$T_{02s} = T_{01} \left(\frac{P_{02}}{P_{01}} \right)^{\frac{k-1}{k}} = 293.15 (3)^{\frac{1.4-1}{1.4}} = 401.25 K$$

a) La eficiencia hidráulica del compresor.

$$\eta_h = \frac{(h_{02s} - h_{01})}{(h_{02} - h_{01})} = \frac{(T_{02s} - T_{01})}{(T_{02} - T_{01})} = \frac{401.25 - 293.15}{420.03 - 293.15} = 85.2 \%$$

b) La eficiencia adiabática o interna del compresor

$$\eta_v = \frac{\dot{m}}{\dot{m}_o} = \frac{1}{1.01} = 0.99 = 99 \%$$

$$\eta_{i0-0} = \eta_v \eta_h = 0.99 \times 0.852 = 0.8435 = 84.35\%$$

c) La potencia ideal requerida en KW para realizar la compresión.

$$\dot{W}_{ideal} = \dot{W}_{1-2s} = \dot{m} w_{1-2s} = \dot{m} C_P (T_{02s} - T_{01})$$

$$\dot{W}_{ideal} = 1.00 \frac{Kg}{s} \times 1.006 \frac{KJ}{KgK} (401.25 - 293.15) K = 108.75 KW$$

d) La potencia en KW comunicada al rotor del compresor.

$$\dot{W}_{rotor} = \dot{W}_{1-2} = \dot{m}_o \omega_{1-2} = \dot{m}_o C_P (T_{02} - T_{01})$$

$$\dot{W}_{rotor} = 1.01 \frac{Kg}{s} \times 1.006 \frac{KJ}{KgK} (420.03 - 293.15) K = 128.92 KW$$

e) La potencia en KW del motor de accionamiento

$$\dot{W}_{mec} = \frac{\dot{W}_{rotor}}{\eta_{mec}} = \frac{128.92}{0.98} = 131.55 KW$$

f) La potencia perdida por efectos hidráulicos.

$$\dot{W}_{phid} = \dot{m}_o C_P (T_{02} - T_{02s}) = \dot{W}_{rotor} (1 - \eta_h) = 128.92 KW (1 - 0.8252) = 19.08 KW$$

- g) La potencia perdida por efectos volumétricos

$$\dot{W}_{pvol} = \dot{m}_f C_p (T_{02s} - T_{01}) = (\dot{W}_{rotor} \eta_h)(1 - \eta_v) = (128.92 \text{ KW} 0.8252)(1 - 0.99) = 1.098 \text{ KW}$$

- h) La potencia perdida por efectos mecánicos

$$\dot{W}_{pmech} = \dot{W}_{mec} - \dot{W}_{rotor} = 131.55 \text{ KW} - 128.92 \text{ KW} = 2.63 \text{ KW}$$

- i) La eficiencia global del compresor

$$\eta_c = \eta_{i0-0} \eta_m = 0.8435 \times 0.98 = 82.66\%$$

Ejemplo 6.4.

Aire a una temperatura ambiente de 27 °C y 100 KPa entra al impulsor de un compresor centrífugo en la dirección axial. La relación de presión total es 5, la eficiencia global es 84.48%, el flujo máscio que entra al compresor es 2 Kg/s, el rendimiento volumétrico 95% y la eficiencia mecánica 96%. El diámetro del impulsor es 48.97 cm. Determinar:

- El régimen de revoluciones del impulsor suponiendo conducción perfecta, si en la salida: el ángulo del alabe es 30° y la componente de la velocidad para calcular el flujo de gas se estima igual a 17.5 m/s.
- Ancho del rotor B_2 si 57% de las pérdidas hidráulicas ocurren en el rotor.
- Potencia del motor de accionamiento.

Use las siguientes propiedades en el problema:

$$k=1.4, C_p=1 \text{ KJ/KgK}, R=287 \text{ J/KgK}$$

- a) Régimen de revoluciones del compresor

$$\tan\beta_2 = \frac{C_{r2}}{W_{\theta2}} \rightarrow W_{\theta2} = \frac{C_{r2}}{\tan\beta_2} = \frac{17.5}{\tan 30^\circ} = 30.31 \text{ m/s}$$

$$w_{rotor} = U_2 C_{\theta2} = U_2 (U_2 - W_{\theta2})$$

$$w_{rotor} = C_p (T_{03} - T_{01})$$

$$\eta_h = \frac{\eta_c}{\eta_v \eta_{mec}} = \frac{0.8448}{0.95 \times 0.96} = 0.9263$$

$$\eta_h = \frac{T_{03s} - T_{01}}{T_{03} - T_{01}}$$

$$T_{03s} = T_{01} \left(\frac{P_{03}}{T_{01}} \right)^{\frac{1}{k}} = 300 \times (5)^{\frac{0.4}{1.4}} = 475.15 \text{ K}$$

$$T_{03} = T_{01} + \frac{T_{03s} - T_{01}}{\eta_h} = 300 + \frac{475.15 - 300}{0.9263} = 489.09 \text{ K}$$

$$w_{rotor} = 1000(489.09 - 300) = 189090 \text{ J/Kg}$$

Con

$$w_{rotor} = U_2 C_{\theta2} = U_2 (U_2 - W_{\theta2})$$

Se obtiene la ecuación para calcular U_2

$$w_{rotor} = U_2^2 - U_2 W_{\theta2}$$

$$U_2^2 - U_2 30.31 - 189090 = 0$$

$$U_2 = 450.26 \text{ m/s}$$

Con $U_2 = \frac{\pi D_2 N}{60}$

$$N = \frac{450.26 \times 60}{\pi \times 0.4897} = 17560 \text{ RPM}$$

- a) Ancho del rotor en la salida

Usando la ecuación para el flujo máscio calculado en la salida del rotor

$$\dot{m}_0 = \rho_2 C_{2r} \pi D_2 B_2$$

$$w_{ph1-3} = C_p (T_{03} - T_{03s}) = 1000(489.09 - 475.15) = 13940 \text{ J/Kg}$$

$$w_{phrotor} = C_p (T_{02} - T_{02s}) = 0.57 w_{ph1-3} = 7945.8 \frac{\text{J}}{\text{Kg}}$$

$$T_{02s} = T_{02} - \frac{w_{phrotor}}{C_p} = 489.09 - \frac{7945.8}{1000} = 481.14 \text{ K}$$

$$P_{02} = P_{01} \left(\frac{T_{02s}}{T_{01}} \right)^{\frac{k}{k-1}} = 100 \left(\frac{481.14}{300} \right)^{\frac{1.4}{0.4}} = 522.43 \text{ KPa}$$

$$C_{\theta2} = U_2 - W_{\theta2} = 450.26 - 30.31 = 419.95 \text{ m/s}$$

$$C_2 = \sqrt{C_{\theta 2}^2 + C_{r2}^2} = \sqrt{419.95^2 + 17.5^2} = 420.31 \text{ m/s}$$

$$T_2 = T_{02} - \frac{C_2^2}{2C_p} = 489.09 - \frac{420.31^2}{2 \times 1000} = 400.76 \text{ K}$$

$$P_2 = P_{02} \left(\frac{T_2}{T_{02}} \right)^{\frac{k}{k-1}} = 522.43 \left(\frac{400.76}{489.09} \right)^{\frac{1.4}{0.4}} = 260.17 \text{ kPa}$$

$$\rho_2 = \frac{P_2}{RT_2} = \frac{260.17}{0.287 \times 400.76} = 2.26 \text{ Kg/m}^3$$

$$\eta_v = \frac{\dot{m}}{\dot{m}_0} \rightarrow \dot{m}_0 = \frac{2}{0.95} = 2.1 \text{ Kg/s}$$

$$B_2 = \frac{\dot{m}_0}{\rho_2 C_{2r} \pi D_2} = \frac{2.1}{2.26 \times 17.5 \times \pi \times 0.4897} = 3.45 \times 10^{-2} \text{ m}$$

b) Potencia mecánica

$$\dot{W}_{mec} = \frac{\dot{W}_{ideal}}{\eta_c} = \frac{\dot{m} C_p (T_{03s} - T_{01})}{\eta_c} = \frac{2 \times 1000 \times (475.15 - 300)}{0.8448} = \frac{350.3 \text{ KW}}{0.8448}$$

$$\dot{W}_{mec} = 414.65 \text{ KW}$$

O también:

$$\dot{W}_{mec} = \frac{\dot{W}_{rotor}}{\eta_{mec}} = \frac{\dot{m}_0 (T_{03} - T_{01})}{\eta_{mec}} = \frac{2.1 \times 1000 \times (489.09 - 300)}{0.96} = 414.65 \text{ W}$$

6.4.2. Eficiencias de las Turbomáquinas Generadoras Hidráulicas.

La Fig. 6.7 ilustra el intercambio de potencia entre el fluido y la máquina en bombas y ventiladores.

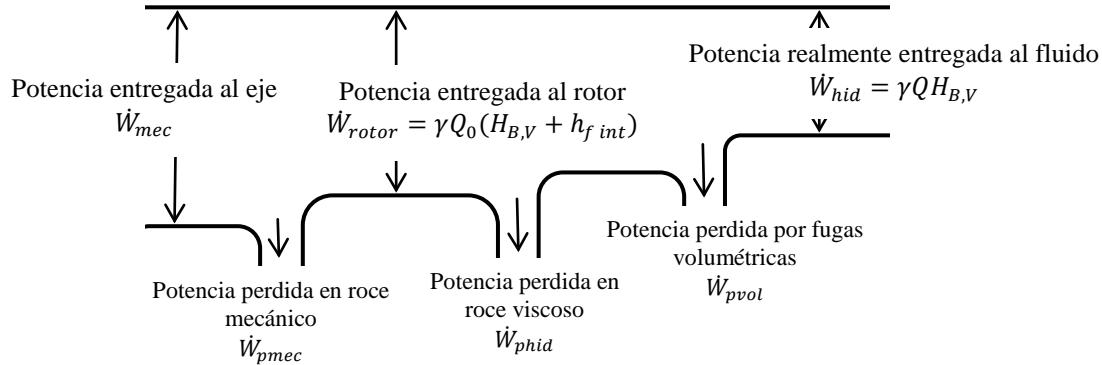


Figura 6.7. Esquema de intercambio de potencia en bombas y ventiladores.

6.4.2.1. Eficiencia interna. η_i .

En referencia a la Fig. 6.7 se tiene:

$$\eta_i = \frac{\text{Potencia real entregada al fluido}}{\text{Potencia entregada al rotor}} = \frac{\dot{W}_{hid}}{\dot{W}_{rotor}} = \frac{Q H_{B,V}}{Q_0 (H_{B,V} + h_{fint})} \quad (6.29)$$

6.4.2.2. Eficiencia volumétrica, η_v .

$$\eta_v = \frac{Q}{Q_0} \quad (6.30)$$

6.4.2.3 Eficiencia hidráulica, η_h .

$$\eta_h = \frac{\dot{W}/Q}{\dot{W}_r/Q_0} = \frac{H_{B,V}}{(H_{B,V} + h_{fint})} = \frac{H_{B,V}}{1/g(U_2 C_{\theta 2} - U_1 C_{\theta 1})} \quad (6.31)$$

Sustituyendo η_v y η_h en la definición de eficiencia interna se tiene:

$$\eta_i = \eta_v \eta_h \quad (6.32)$$

Por lo tanto, la eficiencia interna es igual a la eficiencia hidráulica si no existen fugas de recirculación.

6.4.2.4. Eficiencia mecánica, η_m .

En referencia a la Fig. 6.7 se tiene:

$$\eta_m = \frac{\text{Potencia entregada al rotor}}{\text{Potencia entregada al eje}} = \frac{\dot{W}_{rotor}}{\dot{W}_{mec}} \quad (6.33)$$

6.3.1.6. Eficiencia global, η_T .

Se define en referencia a la Fig. 6.7 como:

$$\eta_{B,V} = \frac{\text{Potencia real entregada al fluido}}{\text{Potencia entregada al eje}} = \frac{\dot{W}_{rotor}}{\dot{W}_{mec}} \quad (6.34)$$

Sustituyendo η_v , η_h y η_m en la ecuación (6.34) se tiene:

$$\eta_{B,V} = \eta_v \eta_h \eta_m \quad (6.35)$$

$$\eta_{B,V} = \eta_i \eta_m \quad (6.36)$$

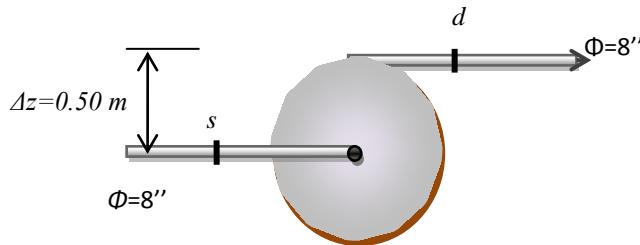
Ejemplo 6.5.

Las bridas de descarga y succión en una bomba centrífuga están separadas por una altura de 0.5 m y ambas tuberías son de 8'' de diámetro. Un vacuómetro y un manómetro conectados en la brida de succión y descarga marcan presiones equivalentes a -3.5 m y 26 m cuando se bombea agua. La geometría de diseño del rotor de la bomba es: ancho de salida 1.5 cm; diámetro de salida 30 cm; ángulo de álabe a la salida 30°.

Cuando la bomba gira a 1750 RPM, el rendimiento hidráulico, volumétrico y mecánico en el punto de diseño es de 80%, 98% y 95% respectivamente y la entrada a los álabes está diseñada para máxima transferencia de energía. Si la bomba debe operar en el punto de mejor eficiencia, calcular suponiendo conducción perfecta sin incidencia:

- a) La altura de bombeo, H_B .
- b) La altura del rotor, H_{rotor} , o altura de Euler.
- c) El caudal manejado por la bomba en lps.
- d) La potencia en el motor de accionamiento en KW.
- e) El porcentaje de difusión que debe efectuarse sobre la velocidad absoluta a la descarga del rotor para reducirla al valor de la velocidad en la brida de descarga.
- a) Altura de bombeo

Aplicando Bernoulli entre la brida de succión y descarga de la bomba se tiene:



$$H_B = \left(\frac{P_d - P_s}{\gamma} \right) + \left(\frac{V_d^2 - V_s^2}{2g} \right) + (z_d - z_s) = \left(\frac{P_d - P_s}{\gamma} \right) + \Delta z$$

$$H_B = 26 \text{ m} - (-3.5) \text{ m} + 0.5 \text{ m} = 30 \text{ m}$$

- b) Altura de Euler

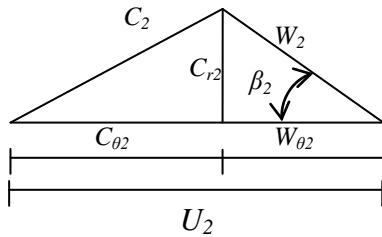
$$\eta_h = \frac{H_B}{H_{rotor}} \Rightarrow H_{rotor} = \frac{H_B}{\eta_h} = \frac{30 \text{ m}}{0.8} = 37.5 \text{ m}$$

- c) Caudal manejado por la bomba

$$Q_0 = C_{r2} \pi D_2 B_2 \Rightarrow C_{r2} = \tan \beta_2 (U_2 - C_{\theta2})$$

$$U_2 = \pi D_2 N / 60 = 3.1416 \times 0.3 \times 1750 / 60$$

$$U_2 = 27.49 \frac{m}{s}$$



$$H_{rotor} = \frac{(U_2 C_{\theta 2} - U_1 C_{\theta 1})}{g} = \frac{U_2 C_{\theta 2}}{g} \quad (\text{Para máxima transferencia de energía})$$

$$C_{\theta 2} = g \frac{H_{rotor}}{U_2} = 9.81 \times \frac{37.5}{27.49} = 13.38 \text{ m/s}$$

Por lo tanto se tiene que:

$$C_{r2} = \tan \beta_2 (U_2 - C_{\theta 2}) = \tan 30^\circ (27.49 - 13.38) = 8.146 \text{ m/s}$$

$$Q_0 = C_{r2} \pi D_2 B_2 = 8.146 \frac{m}{s} \times \pi \times 0.3m \times 0.015m = 0.115 \text{ m}^3/\text{s} = 115 \text{ lps}$$

$$Q = Q_0 \times \eta_v = 115 \text{ lps} \times 0.98 = 113 \text{ lps}$$

d) Potencia mecánica

$$\dot{W}_{mec} = \dot{W}/\eta_B = \gamma Q H_B / \eta_v \eta_h \eta_m = 9810 \frac{N}{m^3} \times 0.113 \frac{m^3}{s} \times 30 \text{ m} / (0.8 \times 0.98 \times 0.95) = 44.65 \text{ KW}$$

e) Porcentaje de difusión

$$C_2 = (C_{r2}^2 + C_{\theta 2}^2)^{1/2} = (8.146^2 + 13.38^2)^{1/2} = 15.67 \text{ m/s}$$

$$V_d = \frac{Q}{A_d} = \frac{113 \times 10^{-3} \frac{m^3}{s}}{\frac{\pi (8 \times 2.5/100)^2 m^2}{4}} = 3.6 \text{ m/s}$$

$$\%Dif = \left(\frac{C_2 - V_d}{C_2} \right) \times 100 = \left(\frac{15.67 - 3.6}{15.67} \right) \times 100 = 77\%$$

Ejemplo 6.6.

Una bomba axial provista de un estator de descarga, radio de tope 60 cm, radio de raíz 10 cm, gira a 2250 RPM. La velocidad del flujo de agua que entra axial, es 3 m/s. La bomba debe vencer una diferencia de cota de 10 m y las pérdidas de un gran tramo de longitud de tubería y accesorios de 58 m de agua con un rendimiento hidráulico de 85%.

Calcular:

- a) El flujo volumétrico a través del rotor si la bomba tiene un rendimiento global y mecánico de 78 y 97% respectivamente.
- b) Grado de reacción.
- c) Potencia mecánica

a) Caudal en el rotor

$$Q = C_{1z} \pi (r_t^2 - r_r^2) = 3 \times \pi (0.6^2 - 0.1^2) = 3.30 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\eta_v = \frac{\eta_B}{\eta_h \eta_{mec}} = \frac{0.78}{0.85 \times 0.97} = 0.946$$

$$Q_o = \frac{Q}{\eta_v} = \frac{3.30}{0.946} = 3.5 \text{ m}^3/\text{s}$$

b) Grado de reacción

$$H_B = \Delta z + h_{f1-2} = 10m + 58m = 68m$$

$$H_{rotor} = \frac{H_B}{\eta_h} = \frac{68}{0.85} = 80m$$

$$D_m = \frac{1.2 + 0.2}{2} = 0.7m$$

$$U = \frac{\pi D_m N}{60} = \frac{\pi 0.70 \times 2250}{60} = 82.47 \text{ m/s}$$

$$\begin{aligned}
 W_1 &= \sqrt{3^2 + 82.47^2} = 82.52 \text{ m/s} \\
 C_{\theta 2} &= \frac{gH_{rotor}}{U} = \frac{9.81 \times 80}{82.47} = 9.51 \text{ m/s} \\
 W_2 &= \sqrt{3^2 + (82.47 - 9.51)^2} = 73.02 \text{ m/s} \\
 H_p &= \frac{W_1^2 - W_2^2}{g} = \frac{82.52^2 - 73.02^2}{9.81} = 75.31 \text{ m} \\
 Gr &= \frac{H_p}{H_{rotor}} = \frac{75.31}{80} = 0.94
 \end{aligned}$$

c) Potencia Mecánica

$$\dot{W}_{mec} = \frac{\gamma Q H_B}{\eta_B} = \frac{9790.38 \times 3.3 \times 68}{0.78} = 2816.617 \text{ KW}$$

6.5. Eficiencia Politrópica de Compresores y Turbinas Térmicas.

Esta eficiencia es una abstracción matemática donde se supone que la compresión o expansión ocurre en una serie de pasos infinitesimales. Se define la eficiencia politrópica o del escalonamiento infinitesimal como la eficiencia adiabática total-a-total de uno de estos pasos. A diferencia de la eficiencia adiabática interna de la máquina, la eficiencia politrópica es independiente de la relación de presiones entre la entrada y salida de la máquina y por lo tanto, da una mejor idea de la perfección de su diseño. Se pueden comparar dos máquinas que efectúan diferentes relaciones de presión a través de sus eficiencias politrópicas. Estrictamente, la eficiencia de un escalonamiento finito nunca es igual a la eficiencia de un escalonamiento infinitesimal; sin embargo, estas dos eficiencias se aproximan cuando la máquina está conformada por muchos escalonamientos en serie.

6.5.1. Eficiencia Politrópica de Compresores. η_{pc} .

La Fig. 6.8 compara la trayectoria real de la compresión con una serie de compresiones infinitesimales ideales. La cantidad dh_{0S} en la Fig. 6.9 es la elevación de entalpía total en el proceso isentrópico infinitesimal y dh_0 es la elevación de entalpía total en el proceso real infinitesimal.

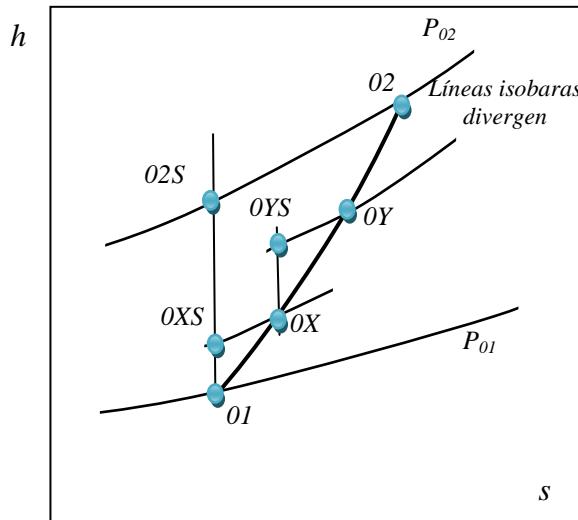


Figura 6.8. Proceso de compresión mediante escalonamientos infinitesimales

La eficiencia adiabática de la etapa infinitesimal es igual a la eficiencia politrópica, η_{pc} del compresor (todas las etapas infinitesimales tienen la misma eficiencia adiabática).

$$\begin{aligned}
 \eta_{pc} &= \frac{h_{0XS} - h_{01}}{h_{0X} - h_{01}} = \frac{h_{0YS} - h_{0X}}{h_{0Y} - h_{0X}} = \dots \\
 h_{02} - h_{01} &= (h_{0X} - h_{01}) + (h_{0Y} - h_{0X}) + \dots
 \end{aligned}$$

$$h_{02S} - h_{01} \neq (h_{0XS} - h_{01}) + (h_{0YS} - h_{0X}) + \dots$$

$$(h_{0XS} - h_{01}) + (h_{0YS} - h_{0X}) + \dots = h_{02P} - h_{01}$$

$$h_{02P} - h_{01} > h_{02S} - h_{01} \quad (\text{Por la divergencia de las líneas isóbaras})$$

$$\eta_{pc} = \frac{h_{02P} - h_{01}}{h_{02} - h_{01}} \quad (6.37)$$

$$\eta_{0-0c} = \frac{h_{02S} - h_{01}}{h_{02} - h_{01}} \quad (6.38)$$

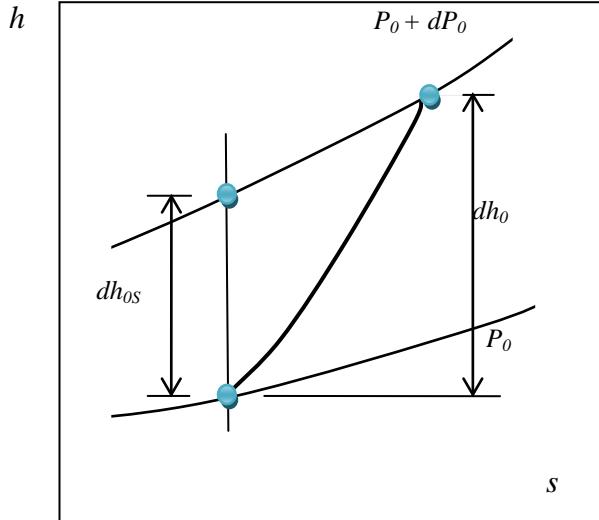


Figura 3.9. Variación diferencial de estado en un proceso de compresión

$$\eta_{pc} = \frac{dh_{0s}}{dh_0} \quad (6.39)$$

$$T_0 ds = dh_0 - v_0 dP_0$$

Si $ds = 0$, entonces $dh_0 = dh_{0s}$

$$dh_{0s} = v_0 dP_0$$

Si el fluido es un gas perfecto,

$$dh_0 = C_p dT_0; \quad P_0 v_0 = R T_0 \quad \text{entonces} \quad v_0 = \frac{R T_0}{P_0}$$

$$\eta_{pc} = \frac{v_0 dP_0}{C_p dT_0} = \frac{R T_0 dP_0}{P_0 C_p dT_0}$$

$$C_p = \frac{k R}{k - 1}$$

$$\frac{dT_0}{T_0} = \frac{R (k - 1) dP_0}{R k \eta_{pc} P_0} = \frac{(k - 1) dP_0}{k \eta_{pc} P_0}$$

$$\ln \frac{T_{02}}{T_{01}} = \frac{k - 1}{k \eta_{pc}} \ln \frac{P_{02}}{P_{01}}; \quad \frac{T_{02}}{T_{01}} = \left(\frac{P_{02}}{P_{01}} \right)^{\left(\frac{k-1}{k \eta_{pc}} \right)}; \quad \frac{T_{02S}}{T_{01}} = \left(\frac{P_{02}}{P_{01}} \right)^{\left(\frac{k-1}{k} \right)}$$

$$\eta_{0-0c} = \frac{T_{02S} - T_{01}}{T_{02} - T_{01}} = \frac{T_{01} \left(\frac{T_{02S}}{T_{01}} - 1 \right)}{T_{01} \left(\frac{T_{02}}{T_{01}} - 1 \right)}$$

$$\eta_{0-0c} = \frac{\left(\frac{P_{02}}{P_{01}} \right)^{\left(\frac{k-1}{k} \right)} - 1}{\left(\frac{P_{02}}{P_{01}} \right)^{\left(\frac{k-1}{k \eta_{pc}} \right)} - 1} \quad (6.40)$$

La ec. (6.40) se grafica en la Fig. 6.10 para $k=1.4$, donde se puede observar que el rendimiento politrópico η_{pc} siempre es mayor que el rendimiento adiabático total a total del compresor η_{0-0c} .

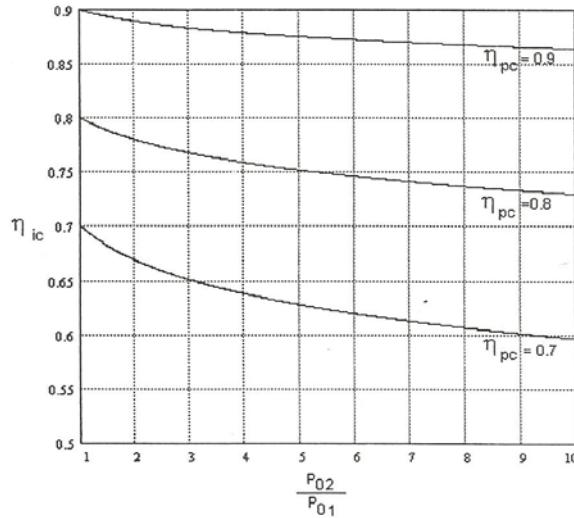


Figura 6.10. Relación entre el rendimiento adiabático total a total y el rendimiento politrópico para un compresor en función de la relación de compresión

6.5.2. Eficiencia Politrópica de Turbinas. η_{pt} .

$$\eta_{pt} = \frac{dh_0}{dh_{0S}} = \frac{C_p dT_0}{v_0 dP_0} = \frac{P_0 dT_0}{R T_0 dP_0} \quad (6.41)$$

$$\frac{dT_0}{T_0} = \frac{R (k-1) \eta_{pt} P_0}{R k dP_0} = \frac{(k-1) \eta_{pt} P_0}{k dP_0} \Rightarrow \ln \frac{T_{02}}{T_{01}} = \frac{(k-1) \eta_{pt}}{k} \ln \frac{P_{02}}{P_{01}}$$

$$\frac{T_{02}}{T_{01}} = \left(\frac{P_{02}}{P_{01}} \right)^{\left(\frac{(k-1) \eta_{pt}}{k} \right)}; \quad \frac{T_{02S}}{T_{01}} = \left(\frac{P_{02}}{P_{01}} \right)^{\left(\frac{k-1}{k} \right)}$$

$$\eta_{0-0t} = \frac{T_{01} - T_{02}}{T_{01} - T_{02S}} = \frac{T_{01} \left(1 - \frac{T_{02}}{T_{01}} \right)}{T_{01} \left(1 - \frac{T_{02S}}{T_{01}} \right)} = \frac{1 - \left(\frac{P_{02}}{P_{01}} \right)^{\left(\frac{(k-1) \eta_{pt}}{k} \right)}}{1 - \left(\frac{P_{02}}{P_{01}} \right)^{\left(\frac{k-1}{k} \right)}} \quad (6.42)$$

La ec. (6.42) se grafica en la Fig. 6.11 para $k=1.4$, donde se puede observar que el rendimiento politrópico η_{pt} siempre es mayor que el rendimiento adiabático total a total de la turbina η_{0-0t} .

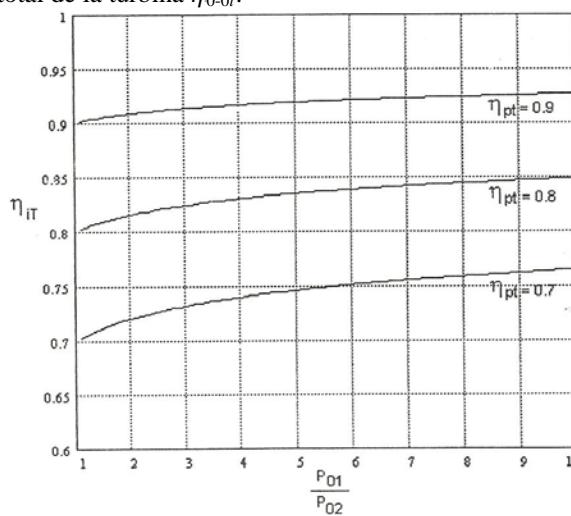


Figura 6.11. Relación entre el rendimiento adiabático interno y el rendimiento politrópico para una turbina en función de la relación de presiones

6.6. Influencia del número de etapas sobre la eficiencia adiabática o isentrópica de Compresores y Turbinas Térmicas.

6.6.1. Compresores.

$$\eta_{cm} = \frac{(P_r)^{\left(\frac{m(k-1)}{k}\right)} - 1}{\left(1 + \frac{1}{\eta_{0-0c}} \left((P_r)^{\left(\frac{(k-1)}{k}\right)} - 1 \right)\right)^m - 1} \quad (6.43)$$

Donde:

- P_r = Relación de presiones totales de una etapa = $P_0 \text{ salida}/P_0 \text{ entrada}$
- m = Número de etapas
- η_{0-0c} = Eficiencia adiabática o isentrópica total-a-total de una etapa
- η_{cm} = Eficiencia adiabática o isentrópica total-a-total de una máquina con m etapas

Si m es elevado, η_{cm} tiende a ser igual a η_{pc} .

6.6.2. Turbinas.

$$\eta_{tm} = \frac{1 - \left(1 - \eta_{0-0t} \left(\frac{(P_r)^{\left(\frac{(k-1)}{k}\right)} - 1}{(P_r)^{\left(\frac{(k-1)}{k}\right)}} \right) \right)^m}{\left(\frac{(P_r)^{\left(\frac{m(k-1)}{k}\right)} - 1}{(P_r)^{\left(\frac{(m(k-1))}{k}\right)}} \right)} \quad (6.44)$$

Donde:

- P_r = Relación de presiones totales de una etapa = $P_0 \text{ salida}/P_0 \text{ entrada}$
- m = Número de etapas
- η_{0-0t} = Eficiencia adiabática o isentrópica total-a-total de una etapa
- η_{tm} = Eficiencia adiabática o isentrópica total-a-total de una máquina con m etapas

Si m es elevado, η_{tm} tiende a ser igual a η_{pt} .

6.7. Factor de Recalentamiento en Turbinas de Vapor.

En turbinas de vapor no se pueden usar las relaciones de gases perfectos, ya que el vapor no se comporta como tal. Para medir la ineficiencia de la expansión completa se usa el factor de recalentamiento, R_H .

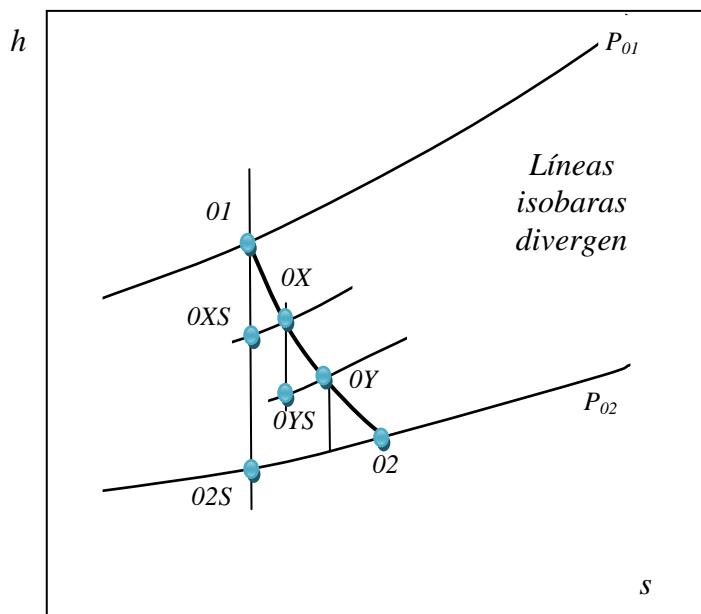


Figura 6.12. Proceso de expansión a través de una turbina adiabática

$$\begin{aligned}
 R_H &= [(h_{01} - h_{0XS}) + (h_{0X} - h_{0YS}) + \dots] / (h_{01} - h_{02S}) \\
 R_H &= \sum \Delta h_{0S} / (h_{01} - h_{02S}) \\
 \sum \Delta h_{0S} &> (h_{01} - h_{02S}) \quad \text{Debido a la divergencia de las líneas isobaras} \\
 \text{Por lo tanto, } R_H &> 1; 1.03 \geq R_H \geq 1.0 \\
 \eta_{0-ot} &= \frac{h_{01} - h_{02}}{h_{01} - h_{02S}} = \frac{h_{01} - h_{02}}{\sum \Delta h_{0S}} \frac{\sum \Delta h_{0S}}{h_{01} - h_{02S}} \\
 \eta_{0-ot} &= \eta_{pt} R_H
 \end{aligned} \tag{6.45}$$

Ejemplo 6.7.

Un compresor consta de 16 escalonamientos diseñados para producir cada uno la misma relación de presiones totales. La relación de compresión del compresor es 6.3. Cada escalonamiento tiene una eficiencia total-a-total de 89.5%. La relación de calores específicos es $k=1.4$. Calcular:

- La eficiencia adiabática total-a-total del compresor
- La eficiencia politrópica del compresor

$$m = 16 \quad \frac{P_{02}}{P_{01}} = 6.3 \quad \eta_{0-oc} = 89.5\% \quad k = 1.4$$

- La eficiencia adiabática total-a-total

$$\begin{aligned}
 P_r^m &= 6.3 \Rightarrow P_r = 6.3^{\frac{1}{16}} = 1.122 \\
 (k-1)/k &= (1.4-1)/1.4 = 0.286; \quad m(k-1)/k = 16(1.4-1)/1.4 = 4.571 \\
 P_r^{(k-1)/k} &= 1.122^{0.286} = 1.033; \quad P_r^{m(k-1)/k} = 1.122^{4.571} = 1.692
 \end{aligned}$$

$$\eta_{cm} = \frac{(P_r) \left(\frac{m(k-1)}{k} \right) - 1}{\left(1 + \frac{1}{\eta_{0-oc}} \left((P_r) \left(\frac{(k-1)}{k} \right) - 1 \right) \right)^m - 1} = \frac{1.692 - 1}{\left(1 + \frac{(1.033 - 1)}{0.895} \right)^{16} - 1} = 88.23\%$$

- Eficiencia politrópica

$$\eta_{pc} = ?$$

$$\begin{aligned}
 0.8823 &= \frac{6.3^{0.286} - 1}{6.3^{\left(\frac{0.286}{\eta_{pc}}\right)} - 1} \\
 6.3^{\left(\frac{0.286}{\eta_{pc}}\right)} - 1 &= \frac{6.3^{0.286} - 1}{0.8823} = 0.785 \Rightarrow 6.3^{\left(\frac{0.286}{\eta_{pc}}\right)} = 1.785 \\
 (0.286/\eta_{pc}) \ln 6.3 &= \ln 1.785 \Rightarrow 0.286/\eta_{pc} = 0.315 \\
 \eta_{pc} &= 90.83\%
 \end{aligned}$$

Ejemplo 6.8.

En una turbina de gas se produce una expansión de un gas ($k=1.35$ y $P.M.=28.0 \text{ Kgm/Kg mol}$) desde una presión total de 0.6 MPa abs hasta una presión total de 0.1 MPa abs. La temperatura total de entrada es de 1100 K. Hay tres escalonamientos, cada uno de los cuales tiene la misma relación de presiones totales y la misma eficiencia adiabática total-a-total. La eficiencia interna total-a-total de la turbina es de 85.0%. Calcular:

- La eficiencia adiabática total-a-total de cada escalonamiento
- La eficiencia politrópica de la máquina

$$\begin{aligned}
 P.M. &= 28.0 \frac{\text{Kgm}}{\text{Kg mol}} \quad k = 1.35 \quad m = 3 \quad \eta_{tm} = 85\% \\
 P_{01} &= 0.6 \text{ MPa abs} \quad P_{02} = 0.1 \text{ MPa abs} \quad T_{01} = 1100 \text{ K}
 \end{aligned}$$

- Eficiencia adiabática total-a-total de cada escalonamiento

$$\eta_{0-ot} = ?$$

$$\begin{aligned}
 P_{01}/P_{02} &= 0.6/0.1 = 6 \Rightarrow P_r^m = 6 \Rightarrow P_r = 6^{\frac{1}{3}} = 1.817 \\
 (k-1)/k &= (1.35-1)/1.35 = 0.259; \quad m(k-1)/k = 3 \times 0.259 = 0.778; \\
 P_r^{(k-1)/k} &= 1.817^{0.259} = 1.167; \quad P_r^{m(k-1)/k} = 1.817^{0.778} = 1.591
 \end{aligned}$$

$$\eta_{tm} = \frac{1 - \left(1 - \eta_{0-0t} \left(\frac{0.167}{1.167}\right)\right)^3}{\left(\frac{0.591}{1.591}\right)} \Rightarrow \left(\frac{0.591}{1.591}\right) 0.85 = 1 - \left(1 - \eta_{0-0t} \left(\frac{0.167}{1.167}\right)\right)^3$$

$$(1 - 0.143 \eta_{0-0t})^3 = 1 - 0.316 \Rightarrow (1 - 0.143 \eta_{0-0t})^3 = 0.881$$

$$\eta_{0-0t} = 0.119 / 0.143 = 83.08\%$$

b) Eficiencia politrópica de la máquina $\eta_{pt} = ?$

$$0.85 = \frac{1 - \left(\frac{1}{6}\right)^{(0.259 \eta_{pt})}}{1 - \left(\frac{1}{6}\right)^{(0.259)}} \Rightarrow 0.316 = 1 - \left(\frac{1}{6}\right)^{(0.259 \eta_{pt})}$$

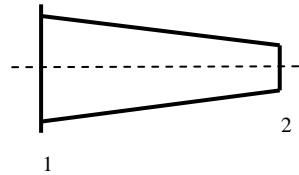
$$\left(\frac{1}{6}\right)^{(0.259 \eta_{pt})} = 0.684 \Rightarrow (0.254 \eta_{pt}) \ln(1/6) = \ln 0.684 \\ 0.254 \eta_{pt} = 0.212 \Rightarrow \eta_{pt} = 83.32\%$$

6.8. Eficiencias de Componentes de Turbomáquinas.

6.8.1. Eficiencia de la Tubería, η_N .

El flujo en tuberías se acelera como resultado de la caída en presión estática. Ejemplos:

- Ducto de entrada a toda turbomáquina.
- Corona fija de álabes o estator en turbinas de varias etapas
- Corona de tuberías a la entrada de turbinas.



Aplicando la primera ley de la Termodinámica entre la entrada y salida de la tubería se tiene:

$$h_{01} + q_{1-2} + w_{1-2} = h_{02} \quad (6.46)$$

$$q_{1-2} = 0; \quad w_{1-2} = 0; \quad h_{01} = h_{02}; \quad h_0 = h + \frac{c^2}{2}; \quad h_1 + \frac{c_1^2}{2} = h_2 + \frac{c_2^2}{2}$$

$$h_1 - h_2 = \frac{1}{2}(c_2^2 - c_1^2) \quad (6.47)$$

$$h_1 - h_{2s} = \frac{1}{2}(c_{2s}^2 - c_1^2) \quad (6.48)$$

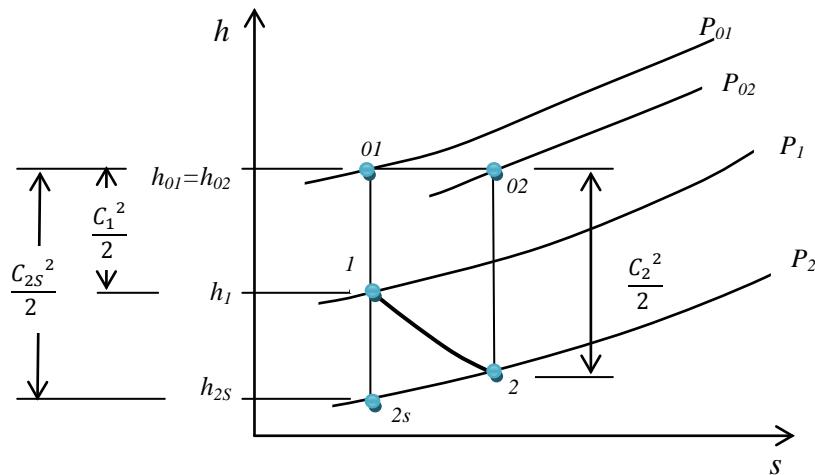


Figura 6.13. Diagrama h - s del proceso de expansión en una tubería

$h_{01} = h_{02}$ Por ser un flujo adiabático y sin intercambio de trabajo
 $P_{02} < P_{01}$ Por las pérdidas de presión debido a irreversibilidades

$$\begin{aligned}
 P_1 > P_2 & \quad \text{Función de la tobera} \\
 C_1 < C_2 & \quad \text{Función de la tobera} \\
 \eta_N = \frac{h_1 - h_2}{h_1 - h_{2s}} &= \frac{C_2^2 - C_1^2}{C_{2s}^2 - C_1^2} \tag{6.49}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T ds = dh - v dP; \\
 \text{Si el fluido es incompresible} &\Rightarrow \rho = 1/v = \text{constante}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h_1 - h_{2s} &= \frac{P_1 - P_2}{\rho} \\
 h_1 - h_2 &= 1/2(C_2^2 - C_1^2) \tag{6.50}
 \end{aligned}$$

$$\frac{C^2}{2} = \frac{P_0 - P}{\rho}; \quad \frac{C_2^2 - C_1^2}{2} = \frac{P_{02} - P_2}{\rho} - \frac{P_{01} - P_1}{\rho};$$

$$\frac{C_2^2 - C_1^2}{2} = \frac{P_{02} - P_{01}}{\rho} - \frac{P_1 - P_2}{\rho} \tag{6.51}$$

$$\eta_N = \frac{\frac{P_{02} - P_{01}}{\rho} - \frac{P_1 - P_2}{\rho}}{\frac{P_1 - P_2}{\rho}} \tag{6.52}$$

Por lo tanto, para flujo incompresible se tiene:

$$\eta_N = 1 - \frac{P_{01} - P_{02}}{P_1 - P_2} \tag{6.53}$$

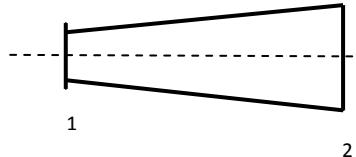
6.8.2. Eficiencia del Difusor, η_D .

La presión estática aumenta en difusores como resultado de la desaceleración del flujo. Ejemplos:

- Ducto de descarga en turbinas industriales y de producción de electricidad.
- Corona fija de álabes en compresores axiales de varias etapas.
- Difusores a la salida del rotor en compresores centrífugos.

Aplicando la primera ley de la Termodinámica entre la entrada y salida de la tobera se tiene:

$$h_{01} \pm q_{1-2} \pm w_{1-2} = h_{02} \tag{6.54}$$



$$\begin{aligned}
 q_{1-2} = 0; \quad w_{1-2} = 0; \quad h_{01} = h_{02} \\
 h_2 - h_1 = \frac{1}{2}(C_1^2 - C_2^2) \tag{6.55}
 \end{aligned}$$

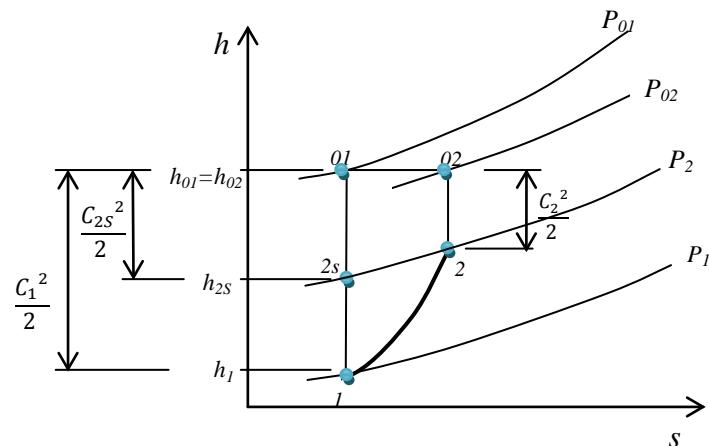


Figura 3.14. Diagrama h - s del proceso en el difusor

$h_{01} = h_{02}$ Por ser un flujo adiabático y sin intercambio de trabajo

$P_{02} < P_{01}$ Por las pérdidas de presión debido a irreversibilidades

$P_2 > P_1$ Función del difusor

$C_2 < C_1$ Función del difusor

$$h_{2S} - h_1 = \frac{1}{2} (C_1^2 - C_{2S}^2) \quad (6.56)$$

$$\eta_D = \frac{h_{2S} - h_1}{h_2 - h_1} = \frac{C_1^2 - C_{2S}^2}{C_1^2 - C_2^2} \quad (6.57)$$

$$T ds = dh - v dP ; \quad ds = 0 \Rightarrow dh_S = v dP$$

Si el fluido es incompresible $\Rightarrow \rho = 1/v = \text{constante}$

$$h_{2S} - h_1 = \frac{P_2 - P_1}{\rho} \quad P_0 = P + \frac{\rho C^2}{2}$$

$$h_2 - h_1 = 1/2 (C_1^2 - C_2^2) \quad (6.58)$$

$$\eta_D = \frac{2(P_2 - P_1)}{\rho(C_1^2 - C_2^2)} \quad (6.59)$$

$$\frac{C_1^2 - C_2^2}{2} = \frac{P_{01} - P_1}{\rho} - \frac{P_{02} - P_2}{\rho} \quad (6.60)$$

$$\frac{C_1^2 - C_2^2}{2} = \frac{P_{01} - P_{02}}{\rho} + \frac{P_2 - P_1}{\rho}$$

$$\eta_D = \frac{\frac{P_2 - P_1}{\rho}}{\frac{P_{01} - P_{02}}{\rho} + \frac{P_2 - P_1}{\rho}} \quad (6.61)$$

Por lo tanto, para flujo incompresible se tiene:

$$\eta_D = \frac{1}{1 + \frac{P_{01} - P_{02}}{P_2 - P_1}} \quad (6.62)$$

6.9. Geometría óptima de difusores planos y cónicos.

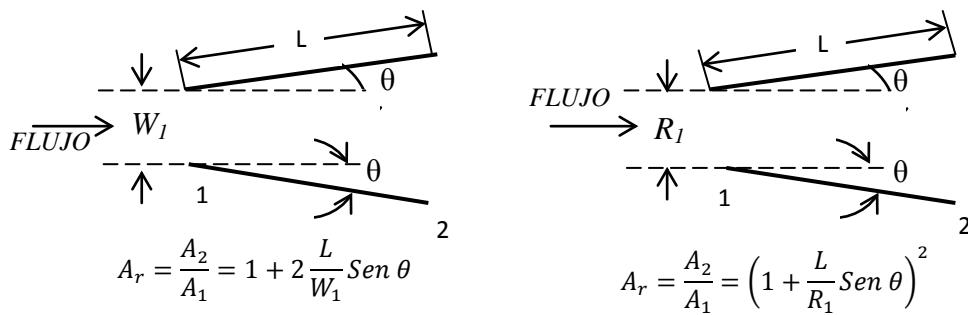
La difusión o desaceleración del fluido es una característica esencial de la mayoría de las turbomáquinas y tiene como objetivo la conversión eficiente de la energía cinética a energía de presión. La dificultad proviene de los dos siguientes hechos:

1.- La capa límite es propensa a desprenderse si la relación de difusión es demasiado rápida, ocasionando grandes pérdidas de presión total.

2.- Por otro lado, si la relación de difusión es muy baja el fluido está expuesto al contacto con las paredes sólidas durante un tramo excesivamente largo y las pérdidas de presión total por fricción llegan a ser predominantes.

Para efectos de diseño tiene que existir, evidentemente, una relación de difusión óptima para la cual los dos efectos quedan minimizados.

La ec. (6.62) para la eficiencia del difusor expresa que para un máximo rendimiento, la pérdida de presión total debe ser mínima para un aumento dado de presión estática.



a) Difusor Bidimensional

b) Difusor Cónico

Figura 6.15. Geometrías de difusores subsónicos y relaciones de áreas

El problema que se plantea más frecuentemente es la necesidad de una recuperación máxima de presión en la dirección del flujo para una longitud determinada de difusor, independientemente de la relación de área $A_r = \frac{A_2}{A_1}$. Esta condición conduce a una

geometría de difusor diferente a la necesaria para máximo rendimiento y se puede demostrar por medio de las consideraciones siguientes:

Para un flujo incompresible a través de un difusor, la ecuación de la energía se puede escribir:

$$\frac{P_1}{\rho} + \frac{C_1^2}{2} = \frac{P_2}{\rho} + \frac{C_2^2}{2} + \frac{\Delta P_0}{\rho} \quad (6.63)$$

Donde la pérdida de presión total ΔP_0 es igual a $(P_{01} - P_{02})$

Se puede definir un coeficiente de aumento de presión como:

$$C_P = \frac{P_2 - P_1}{q_1} \quad (6.64)$$

Donde:

$$q_1 = \frac{1}{2} \rho C_1^2 \quad (6.65)$$

De la ecuación (6.63) se puede obtener el coeficiente ideal de aumento de presión haciendo $\Delta P_0 = 0$:

$$C_{Pi} = 1 - \left(\frac{C_2^2}{C_1^2} \right) \quad (6.66)$$

De este modo, la ecuación (6.63) se puede escribir como:

$$C_P = C_{Pi} - \frac{\Delta P_0}{q_1} \quad (6.67)$$

La ecuación del rendimiento del difusor resulta en:

$$\eta_D = \frac{C_P}{C_{Pi}} \quad (6.68)$$

Y

$$\ln \eta_D = \ln C_P - \ln C_{Pi} \quad (6.69)$$

Derivando la ecuación (6.69) con respecto al ángulo de difusión θ y haciendo el resultado igual a cero, se obtiene la condición para máximo rendimiento:

$$\frac{1}{C_P} \frac{\partial C_P}{\partial \theta} = \frac{1}{C_{Pi}} \frac{\partial C_{Pi}}{\partial \theta} \quad (6.70)$$

Desde luego C_P no puede ser máximo cuando η_D tiene su máximo valor.

Sustituyendo la ecuación (6.67) en la ecuación (6.70) se obtiene:

$$\frac{\partial C_P}{\partial \theta} = \frac{\partial \Delta P_0}{\partial \theta} q_1 \quad (6.71)$$

A medida que el ángulo del difusor aumenta más allá de la divergencia que da máximo rendimiento, la elevación real de presión continuará creciendo hasta que las pérdidas adicionales de presión total equilibren la ganancia teórica de recuperación de presión producida por el aumento de la relación de áreas.

La Fig. 6.16 muestra un gráfico típico de diseño para difusores de paredes rectas, en el cual aparecen las líneas de rendimiento óptimo ($\gamma-\gamma$) y de recuperación óptima ($\alpha-\alpha$) para L/W_1 constante. La línea ($\alpha-\alpha$) indica aproximadamente el ángulo de divergencia 2θ , para cada valor de L/W_1 , por encima del cual ocurre un gran desprendimiento de la capa límite y el flujo se torna inestable.

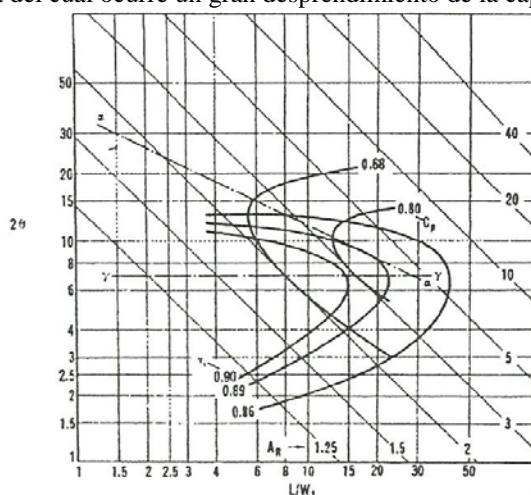
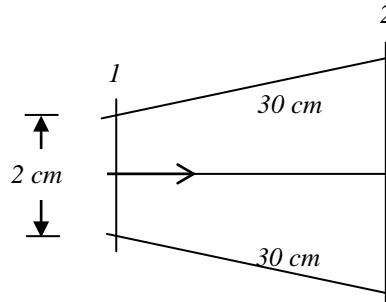


Figura 6.16. Curvas típicas para diseño de difusores de paredes rectas

Ejemplo 6.9.

En el difusor de agua de paredes rectas que se esquematiza, la presión total de entrada es 121.2 KPa abs y la velocidad de entrada es 5 m/s. Calcular:



- a) La presión estática de entrada

$$P_{01} = P_1 + \frac{1}{2} \rho C_1^2 \Rightarrow P_1 = P_{01} - \frac{1}{2} \rho C_1^2$$

$$P_1 = 121.2 \text{ KPa} - \frac{1}{2} \left(\frac{1000}{1000} \right) 5^2 = 121.2 - 12.5 = 108.7 \text{ KPa abs}$$

- b) Presión estática máxima obtenible en 2

Con $L/W_1 = 30/2 = 15$ y con máxima recuperación de presión, de la línea $\alpha - \alpha$ se lee en la Fig. 6.16, $C_p = 0.83$

$$C_p = \frac{P_2 - P_1}{q_1} \quad q_1 = \frac{1}{2} \rho C_1^2$$

$$C_p = \frac{P_2 - P_{01} + \frac{1}{2} \rho C_1^2}{\frac{1}{2} \rho C_1^2} = \frac{P_2 - P_{01}}{\frac{1}{2} \rho C_1^2} + 1$$

$$P_2 = (C_p - 1) \frac{1}{2} \rho C_1^2 + P_{01} = (0.83 - 1) \frac{1}{2} \left(\frac{1000}{1000} \right) \frac{Kgm}{m^3} 5^2 \frac{m^2}{s^2} + 121.2 \text{ KPa}$$

$$P_2 = 121.2 \text{ KPa} - 2.125 \text{ KPa} = 119.08 \text{ KPa abs}$$

- c) Relación de áreas.

En la Fig. 6.16 $A_R = 3.4$.

- d) Ángulo de divergencia.

En la Fig. 6.16 (20°) $\cong 9^\circ$; $\theta = 4.5^\circ$

- e) Eficiencia del difusor. En la Fig. 3.16 $\eta_D \cong 0.89$.

- f) Velocidad de salida.

$$\eta_D = \frac{2(P_2 - P_1)}{\rho(C_2^2 - C_1^2)}$$

$$C_2^2 = C_1^2 - \frac{2(P_2 - P_1)}{\rho \eta_D} = 5^2 \frac{m^2}{s^2} - \frac{2(119.08 - 108.7)1000 \frac{Kg}{m^3}}{1000 \frac{Kg}{m^3} 0.89}$$

$$C_2^2 = 25 \frac{m^2}{s^2} - 23.33 \frac{m^2}{s^2} = 1.67 \frac{m^2}{s^2}$$

$$C_2 = 1.29 \frac{m}{s}$$

- g) Perdidas de presión total

$$\Delta P_0 = (C_{pi} - C_p)q_1$$

$$C_{pi} = 1 - \left(\frac{C_2^2}{C_1^2} \right) = 1 - \left(\frac{1.29^2}{5^2} \right) = 0.933$$

$$\Delta P_0 = (0.933 - 0.83) \frac{1}{2} \left(\frac{1000}{1000} \right) \frac{Kg}{m^3} 5^2 \frac{m^2}{s^2}$$

$$\Delta P_0 = 1.29 \text{ KPa abs}$$

6.10. Problemas.

- 6.1 Una turbina Francis aprovecha un salto geodésico de 200 m y un caudal que sale por el inyector de $2.2 \text{ m}^3/\text{s}$. Las pérdidas en la tubería forzada se estiman en unos 20 m. El rendimiento mecánico es 97% y el rotor recibe $2 \text{ m}^3/\text{s}$ girando a 300 RPM con un diámetro de rotor de 2 m. La componente de la velocidad absoluta que produce intercambio de energía entre fluido y rotor es 45 m/s y el fluido sale en dirección radial.
- Calcular el rendimiento hidráulico
 - Calcular el rendimiento interno
 - Potencia disponible en el fluido
 - Potencia perdida en roce viscoso
 - Potencia perdida debido a fuga volumétrica
 - Potencia perdida en roce mecánico
 - Potencia aprovechada de la turbina
- 6.2 Un compresor de aire adiabático va a ser accionado por una turbina de vapor adiabática acoplada directamente, la cual acciona también a un generador. El vapor entra a la turbina a condiciones totales 12.5 MPa y 500°C a una relación de 28 Kg/s y sale a una presión total de 10 KPa y calidad 0.92. El rendimiento volumétrico de la turbina es 95 % y la eficiencia mecánica 98%. La presión estática en el ducto de descarga de la turbina indicada por un manómetro es -93.1 KPa . El aire entra al compresor de las condiciones atmosféricas 98 KPa y 295 K a razón de 10 Kg/s y sale a 1 MPa y 650 K . La eficiencia mecánica del compresor es 98%.
- Calcule la potencia neta que la turbina entrega al generador.
 - Calcule el rendimiento hidráulico y la eficiencia interna o adiabática total-a-estática de la turbina.
 - La potencia perdida por fugas volumétricas de la turbina.
 - La eficiencia interna o adiabática del compresor.
- 6.3 Una turbina de gas A tiene una relación de presiones totales de 4, una eficiencia adiabática basada en condiciones totales de 86% y una velocidad en la entrada de 134 m/s . La turbina de gas B tiene una presión estática en la entrada de 606 KPa abs , una temperatura estática de 245°C y una velocidad de 100 m/s . ¿Cuál turbina es más eficiente? ¿Qué presión mediría un manómetro colocado en el ducto de entrada de ambas turbinas?. Las condiciones en la descarga para ambas turbinas son: $P_{02} = 50 \text{ KPa}$ y $T_{02} = 40^\circ\text{C}$.
- 6.4 Un compresor axial consta de 16 etapas diseñadas cada una para producir la misma relación de presiones totales. La relación de compresión del compresor es de 6.3 y cada etapa tiene una eficiencia adiabática total-a-total de 89.5%. Calcular:
- La eficiencia isentrópica total-a-total de la maquina.
 - La eficiencia politrópica de la maquina.
 - Recalcular (a) y (b) para 9 etapas.
- 6.5 Un compresor toma aire atmosférico a 101 KPa y 20°C . La velocidad de aire a la entrada del rotor es de 134 m/s . Si la presión estática a la descarga es de 395 KPa abs , la temperatura estática es 196°C y la velocidad del aire es 113 m/s , calcular:
- La eficiencia adiabática de la maquina basada en valores estáticos.
 - La eficiencia adiabática de la maquina basada en valores totales.
- No existen pérdidas en el ducto de entrada hasta el rotor.
- 6.5 Un compresor A tiene una relación de presiones totales de 4, una eficiencia adiabática basada en condiciones totales de 86% y una velocidad de salida de 134 m/s . El compresor B tienen una presión estática a la salida de 606 KPa abs , una temperatura estática de 245°C y una velocidad de 100 m/s . Cuál compresor es más eficiente?. Qué presión mediría un manómetro colocado en el ducto de descarga de ambos compresores?. Las condiciones ambientales son 101 KPa y 20°C .
- 6.7 En una turbina de vapor las condiciones totales en la entrada son de 10 MPa abs y 800 K . Las condiciones estáticas en la salida son de 2 MPa abs y 600 K . La velocidad media en la salida es de 30 m/s . Suponiendo que el vapor se comporta como un gas perfecto de peso molecular 18 Kgm/Kg mol y $k = 1.33$, calcular:
- La eficiencia isentrópica total-a-total.
 - La eficiencia isentrópica total-a-estática.
 - La eficiencia politrópica.
 - El factor e recalentamiento.

6.8 En una turbina de vapor las condiciones totales en la entrada son de 10 MPa abs y 800 K . Las condiciones estáticas en la salida son de 2 MPa abs y 600 K . Hay tres escalonamientos, cada uno de los cuales produce el mismo trabajo específico. Usando un diagrama de Mollier para vapor, determinar la eficiencia isentrópica total-a-total de cada escalonamiento. Suponga que la trayectoria de los estados reales sobre este diagrama es una línea recta uniendo las condiciones terminales.

Capítulo 7

Rotalpía y Fluidodinámica de las Turbomáquinas con deslizamiento, rendimiento volumétrico y espesor de álabes

- 7.1. Introducción.
- 7.2. Aspectos comunes a Turbomáquinas Generadoras Radiales.
 - 7.2.1. Rotalpía I.
 - 7.2.2. Deslizamiento, $\Delta C\theta$, y factor de deslizamiento, μ .
 - 7.2.3. Espesor de los alabes, e .
 - 7.2.4. Grado de reacción, Gr .
 - 7.2.5. Coeficientes adimensionales de flujo, ϕ , y de carga, ψ .
- 7.3. Bombas y Ventiladores de flujo radial.
- 7.4. Problemas

Capítulo 7

Rotalpía y Fluidodinámica de las Turbomáquinas con deslizamiento, rendimiento volumétrico y espesor de álabes

7.1. Introducción.

Se aplica la teoría desarrollada en los Capítulos anteriores al análisis y diseño real de las Turbomáquinas Generadoras Radiales o Centrifugas: bombas, ventiladores y compresores. Se estudian inicialmente aspectos importantes comunes: Rotalpía, deslizamiento, espesor de los alabes y grado de reacción. Posteriormente se trata cada tipo de máquina por separado.

7.2. Aspectos comunes a Turbomáquinas Generadoras Radiales.

7.2.1. Rotalpía.

El trabajo específico ejecutado sobre el fluido por el rotor es igual al incremento de entalpia total a través de la máquina y se expresa también por la ecuación de Euler para Turbomáquinas Generadoras Radiales como:

$$\omega_{1-2} = (U_2 C_{\theta 2} - U_1 C_{\theta 1}) = h_{02} - h_{01} \quad (7.1)$$

La entalpia total se escribe en el Sistema Internacional de unidades como:

$$h_0 = h + \frac{C^2}{2}, \text{ entonces:}$$

$$h_1 + \frac{C_1^2}{2} - U_1 C_{\theta 1} = h_2 + \frac{C_2^2}{2} - U_2 C_{\theta 2} = I \quad (7.2)$$

La función I se denomina Rotalpía y tiene el mismo valor a la entrada y salida del impulsor y también es constante para el flujo relativo en cualquier punto dentro del impulsor. Esta es una propiedad fundamental del flujo relativo cuando existe un cambio de radio en el impulsor y se escribe en forma general como:

$$I = h + \frac{C^2}{2} - UC_{\theta} \quad (7.3)$$

La Fig. 7.1 señala la Rotalpía en un proceso de compresión incluyendo el ducto de entrada (0 -1), el impulsor (1-2) y el difusor (2-3).

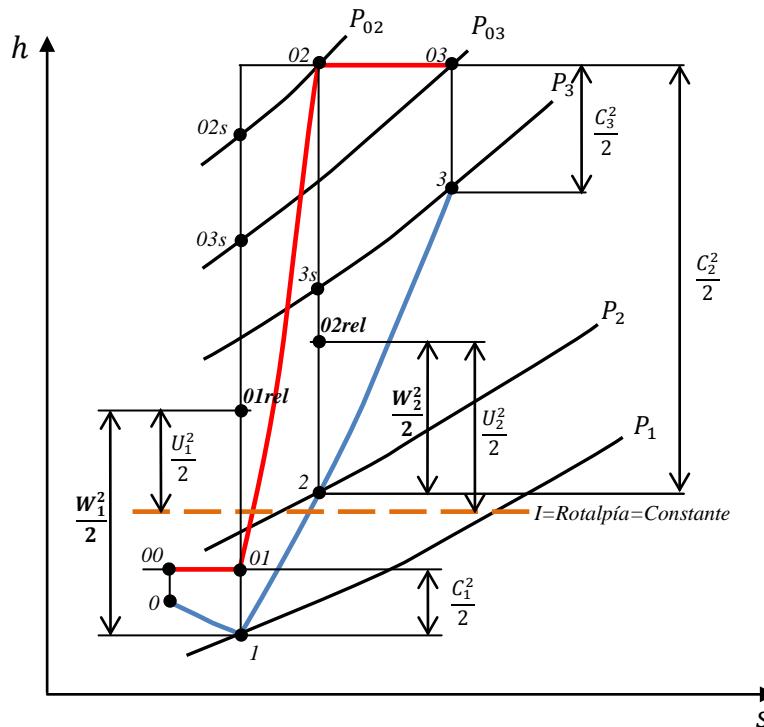


Figura 7.1. Diagrama de Mollier para una etapa completa de compresor centrífugo

Eficiencia adiabática total a total del rotor:

$$\eta_r = \frac{h_{02s} - h_{01}}{h_{02} - h_{01}} \quad (7.4)$$

Eficiencia adiabática total a total del Compresor:

$$\eta_C = \frac{h_{03s} - h_{01}}{h_{03} - h_{01}} \quad (7.5)$$

Eficiencia del difusor:

$$\eta_d = \frac{h_{3s} - h_2}{h_3 - h_2} \quad (7.6)$$

La velocidad absoluta C tiene en general tres componentes: C_r , C_θ , C_z en las direcciones radial, tangencial y axial respectivamente. Entonces:

$$C^2 = C_r^2 + C_\theta^2 + C_z^2$$

Las ec.(7.3) puede escribirse como:

$$I = h + \frac{C_r^2 + C_\theta^2 + C_z^2 - 2UC_\theta}{2}$$

Sumando y restando $1/2 U^2$ resulta:

$$I = h + \frac{(U - C_\theta)^2 + C_r^2 + C_z^2 - U^2}{2}$$

En base al triángulo de velocidades para Turbomáquinas generadoras radiales, se tiene que $(U - C_\theta = W_\theta)$ y conjuntamente con

$W^2 = C_r^2 + W_\theta^2 + C_z^2$ se puede escribir como:

$$I = h + \frac{W^2 - U^2}{2} \quad (7.7)$$

La entalpia total relativa se escribe en el S.I. como $h_{0rel} = h + \frac{W^2}{2}$, entonces:

$$I = h_{0rel} - \frac{U^2}{2} \quad (7.8)$$

Escribiendo la ec. (7.7) entre la entrada y salida del impulsor resulta:

$$\begin{aligned} h_2 + \frac{W_2^2 - U_2^2}{2} &= h_1 + \frac{W_1^2 - U_1^2}{2} \\ h_2 - h_1 &= \frac{1}{2}(U_2^2 - U_1^2) + \frac{1}{2}(W_1^2 - W_2^2) \end{aligned} \quad (7.9)$$

Esta expresión explica el gran incremento de entalpia estática (y presión estática) que ocurre en un impulsor centrífugo comparado con uno axial. El término $\frac{1}{2}(W_1^2 - W_2^2)$ es la contribución por difusión de la velocidad relativa y existe también en un impulsor axial. El término $\frac{1}{2}(U_2^2 - U_1^2)$ es la contribución por la acción centrífuga y es nula en impulsores axiales debido a que las líneas de corriente permanecen aproximadamente paralelas al eje antes y después del impulsor.

En bombas, ventiladores y compresores centrífugos se acostumbra diseñar para máxima transferencia de energía en el impulsor; es decir, $C_{\theta1} = 0$. La ec. (7.1) en el caso de compresores y turbinas es entonces:

$$\omega_{1-2} = U_2 C_{\theta2} = h_{02} - h_{01} \quad (7.10)$$

En el caso de bombas y ventiladores:

$$H_r = 1/g(U_2 C_{\theta2}) \quad (7.11)$$

La altura intercambiada por el rotor, H_r , se denomina también altura ideal, H_i , ya que sería igual al incremento total de altura que experimentaría el fluido a través de la máquina si no existieran perdidas internas por fricción hidráulica.

En algunos casos puede ser necesario impartir “pre rotación” ($C_\theta \neq 0$) al flujo entrando al impulsor para reducir una velocidad relativa elevada, que podría causar problemas con el número de Mach en compresores y efectos de cavitación en bombas. El método usado normalmente para establecer “pre rotación” en el sentido de rotación de la maquina, requiere la instalación de un fila de alabes guías estacionarios a la entrada el rotor.

7.2.2 Deslizamiento, ΔC_θ y factor de deslizamiento μ .

Aun en flujo sin viscosidad y sin fricción, el ángulo de salida del fluido, β_2 , es en general diferente del ángulo del alabe, β'_2 , debido al deslizamiento del fluido que se manifiesta reduciendo C_θ en la ecuación de Euler de las Turbomáquinas. A continuación se estudia una de las posibles explicaciones que se han dado de este fenómeno.

La Fig. 7.2 muestra la distribución de presión en los canales del impulsor debido a la rotación de los alabes. Sobre el lado de ataque de los alabes existe una región de alta presión, mientras que sobre el lado posterior existe una región de baja presión y por lo tanto, la presión cambia de un lado a otro en los canales del impulsor. La velocidad del fluido responde a esta distribución de presión, de tal forma que sobre el lado de baja presión la velocidad aumenta y sobre el lado de alta presión la velocidad disminuye,

resultando en una distribución no uniforme de velocidades en cualquier radio del impulsor. La dirección media del flujo saliendo del impulsor es entonces β_2 y no β_2' como se supone en la situación de deslizamiento nulo o conducción perfecta del fluido.

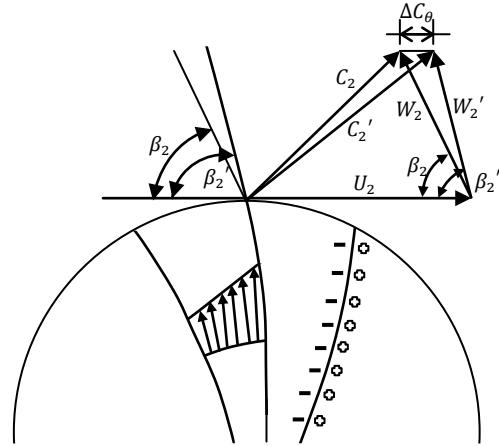


Figura 7.2. Ilustración del fenómeno de deslizamiento

En el triángulo de velocidades de la Fig. 7.2 se observa que $C_{\theta 2}'$ se reduce a $C_{\theta 2}$ en una cantidad ΔC_{θ} definida como deslizamiento. El factor de deslizamiento a su vez se define como:

$$\mu = \frac{C_{\theta 2}}{C_{\theta 2}'} \quad (7.12)$$

El verdadero ángulo de flujo β_2 es menor que el ángulo del alabe β_2' porque la componente radial C_{2r} es igual en ambos triángulos, ya que esta componente depende solamente de la relación entre el gasto volumétrico y el área disponible para el flujo.

Se han realizado numerosos intentos para correlacionar el factor de deslizamiento con los parámetros de diseño del rotor. Las correlaciones publicadas más sencillas y prácticas son:

Stodola:

$$\mu = 1 - \frac{\frac{\pi}{Z} \operatorname{sen} \beta_2'}{1 - \left(\frac{C_{2m}}{U_2} \right) \operatorname{cot} \beta_2'} \quad (7.13)$$

Stanitz:

$$\mu = 1 - \frac{0.63 \frac{\pi}{Z}}{1 - \left(\frac{C_{2m}}{U_2} \right) \operatorname{cot} \beta_2'} \quad (7.14)$$

En ambas formulas, Z es el número de alabes y se puede observar que el factor de deslizamiento se acerca a 1 cuando el número de alabes tiende a infinito. Se recomienda la ecuación de Stodola cuando el ángulo del alabe, β_2' , está en el intervalo de 20° a 30° . La ecuación de Stanitz da buenos resultados en compresores cuando el ángulo es igual a 90° .

Para este caso se puede escribir la ec. (7.14) como:

$$\mu = 1 - \frac{2}{Z} \quad (7.15)$$

Incluyendo el factor de deslizamiento en el trabajo específico intercambiado con el impulsor, ec. (7.10) se obtiene:

$$\omega_{1-2} = \omega_C = U_2 C_{\theta 2} = U_2 (U_2 - C_{r2} \operatorname{cot} \beta_2) \quad (7.16)$$

$$\omega_C = \mu U_2 C'_{\theta 2} = \mu U_2 (U_2 - C_{r2} \operatorname{cot} \beta_2') \quad (7.17)$$

$$H_{r_{B,V}} = H_{i_{B,V}} = \frac{\mu U_2}{g} (U_2 - C_{r2} \cot \beta'_2) \quad (7.18)$$

Ejemplo 7.1.

El impulsor de una bomba centrífuga tiene alabes inclinados hacia atrás, formando un ángulo de 30° con la tangente al círculo de salida. El ancho de los alabes a la salida es de 20 mm y el diámetro externo del impulsor es de 250 mm rotando a 1750 RPM . El caudal a través de la bomba es de 28 lps y el número de alabes es de 8. Determinar la altura teórica desarrollada por el impulsor bajo condiciones de máxima transferencia de energía y la altura de bombeo si la eficiencia hidráulica se estima en 86%. Determinar además la eficiencia total y la potencia mecánica para una eficiencia mecánica de 95% y una eficiencia volumétrica de 100%.

Datos:

$$\beta'_2 = 30^\circ, B_2 = 20 \text{ mm}, D_2 = 250 \text{ mm}, N = 1750 \text{ RPM}, Q = 28 \text{ lps}, Z = 8, C_1 = C_{1m}, \eta_h = 86\%, \eta_{mec} = 95\%, \eta_{vol} = 100\%$$

Calcular:

$$H_{rotor}, H_B, \eta_B, \dot{W}_{mec}$$

$$U_2 = \pi D_2 N / 60 = \pi 0.25 \text{ m } 1750 / 60 \text{ s} = 22.91 \text{ m/s}$$

$$Q_2 = \pi D_2 B_2 C_{2m} \Rightarrow C_{2m} = \frac{Q_2}{(\pi D_2 B_2)} = \frac{0.028 \text{ m}^3/\text{s}}{(\pi 0.25 \text{ m } 0.02 \text{ m})}$$

$$C_{2m} = 1.78 \text{ m/s}$$

$$\mu = 1 - \frac{\frac{\pi}{Z} \operatorname{sen} \beta'_2}{1 - \left(\frac{C_{2m}}{U_2} \right) \cot \beta'_2} = 1 - \frac{\frac{\pi}{8} \operatorname{sen} 30^\circ}{1 - \left(\frac{1.78}{22.91} \right) \cot 30^\circ} = 1 - 0.227 = 0.773$$

$$H_{rotor} = H_{i_B} = \frac{\mu U_2}{g} (U_2 - C_{2m} \cot \beta'_2)$$

$$H_{rotor} = H_{i_B} = \frac{0.773 \times 22.91 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \left(22.91 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 1.78 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cot 30^\circ \right) = 35.79 \text{ m}$$

$$H_B = H_{i_B} \times \eta_h = 35.79 \text{ m} \times 0.86 = 30.78 \text{ m}$$

$$\dot{W}_h = \gamma Q H_B = 9810 \text{ N/m}^3 \times 0.028 \text{ m}^3/\text{s} \times 30.78 \text{ m} = 8.45 \text{ KW}$$

$$\eta_t = \eta_h \times \eta_V \times \eta_m = 0.86 \times 0.95 \times 1 = 0.817$$

$$\dot{W}_{mec} = \frac{\dot{W}_h}{\eta_t} = \frac{8.45 \text{ KW}}{0.817} = 10.35 \text{ KW}$$

7.2.3 Espesor de los alabes, e .

Como ya se explico en el Capítulo 6, el flujo másico de entrada es igual al de salida de la máquina si se desprecian las pequeñas fugas al exterior de la máquina. Sin embargo, en turbomáquinas generadoras el *flujo másico que pasa por el impulsor*, \dot{m}_0 , tiene que ser la suma del *flujo másico de la máquina*, \dot{m} , más el *flujo másico de recirculación*, \dot{m}_f :

$$\dot{m}_0 = \dot{m} + \dot{m}_f \quad (7.19)$$

Para calcular la componente meridional de la velocidad a la salida del impulsor, se debe considerar que existe una velocidad meridional en el rotor para la que se debe usar el flujo másico que cruza el impulsor y el espesor de los alabes C_{2mi} , y, una velocidad meridional que se calcula inmediatamente después de la descarga del rotor usando el flujo másico de la máquina y sin considerar el espesor de los alabes C_{2m} .

$$C_{2mi} = \frac{\dot{m}_0}{\rho_2 2 \pi r_2 B_2 (1-e_2)} \quad (7.20)$$

Donde e_2 es la fracción del área cubierta por los extremos de los alabes y que no está disponible para pasar flujo. El factor $(1 - e_2)$ es la fracción descubierta del área de flujo.

$$C_{2m} = \frac{\dot{m}}{\rho_2 2 \pi r_2 B_2} \quad (7.21)$$

Usando la ecuación para el rendimiento volumétrico de una turbomáquina térmica generadora se tiene:

$$\eta_V = \frac{\dot{m}}{\dot{m}_0} = \frac{C_{2m} \rho_2 2 \pi r_2 B_2}{C_{2mi} \rho_2 2 \pi r_2 B_2 (1 - e_2)}$$

$$\eta_V = \frac{C_{2m}}{C_{2mi} (1 - e_2)}$$

$$C_{2mi} = \frac{C_{2m}}{\eta_V (1 - e_2)} \quad (7.22)$$

De la ec. (7.22) se puede ver que $C_{2mi} > C_{2m}$, lo que quiere decir que ocurre un incremento en la velocidad meridional dentro del rotor como consecuencia de considerar el rendimiento volumétrico y la reducción de área debido al espesor de los álabes.

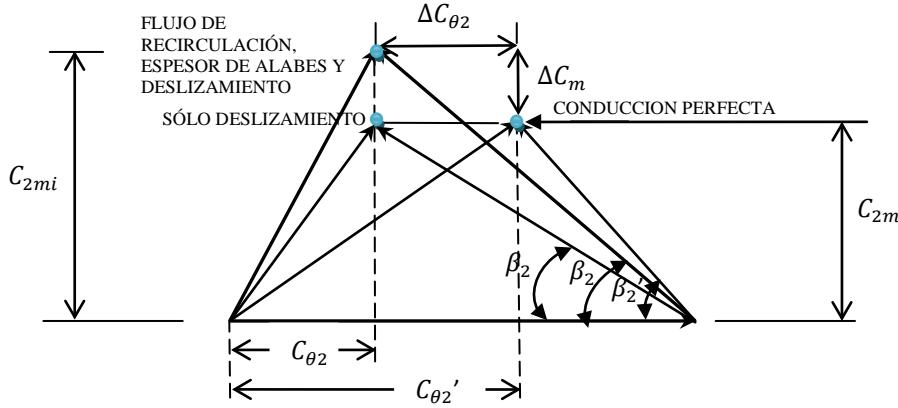


Figura 7.3. Efectos del flujo de recirculación, el deslizamiento y el espesor de álabes a la salida del impulsor

El triángulo de velocidades a la salida del impulsor se ve afectado entonces por el deslizamiento, el flujo másico de recirculación y el espesor de los álabes. La Fig. 7.3 ilustra estos efectos.

En la figura 7.3 se puede observar que se muestran dos ángulos β_2 , este representa el ángulo real del flujo, uno considerando sólo deslizamiento y el otro con deslizamiento, espesor de los álabes y rendimiento volumétrico diferente de la unidad.

Para calcular la componente meridional de la velocidad a la entrada del impulsor también se debe diferenciar dicha velocidad inmediatamente antes del rotor C_{1m} , y en la entrada al rotor, C_{1mi} :

$$C_{1mi} = \frac{\dot{m}_0}{\rho_1 2 \pi r_1 B_1 (1 - e_1)}$$

Donde e_1 es la fracción del área cubierta por los extremos de los álabes y que no está disponible para pasar flujo. El factor $(1 - e_1)$ es la fracción descubierta del área de flujo. La Fig. 7.4 ilustra este efecto.

$$C_{1m} = \frac{\dot{m}}{\rho_1 2 \pi r_1 B_1} \quad (7.23)$$

El rendimiento volumétrico en términos de los flujos másicos calculados con los datos de la entrada al rotor se tiene:

$$\eta_V = \frac{\dot{m}}{\dot{m}_0} = \frac{C_{1m}}{C_{1mi} (1 - e_1)}$$

$$C_{1mi} = \frac{C_{1m}}{\eta_V (1 - e_1)} \quad (7.24)$$

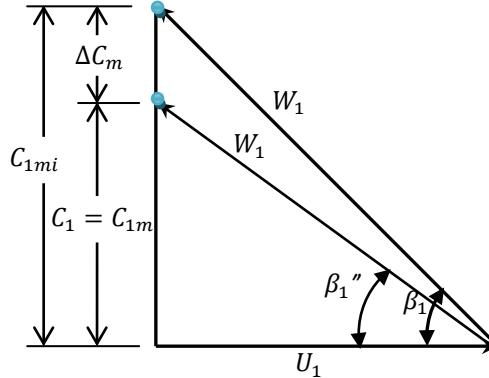


Figura 7.4. Efecto del espesor de álabes y el flujo de recirculación del rotor a la entrada del impulsor

7.2.4 Grado de Reacción, Gr .

El trabajo específico intercambiado en el rodete es la suma del cambio de entalpia estática y energía cinética del fluido:

$$w_{1-2} = h_{02} - h_{01} = (h_2 - h_1) + \frac{C_2^2 - C_1^2}{2} \quad (7.24)$$

Se define el grado de reacción como la fracción del trabajo específico debida al cambio de entalpia estática:

$$Gr = \frac{h_2 - h_1}{w_{1-2}} \quad (7.25)$$

De la ec. (7.9) se deduce que:

$$Gr = \frac{(U_2^2 - U_1^2) - (W_2^2 - W_1^2)}{(U_2^2 - U_1^2) + (C_2^2 - C_1^2) - (W_2^2 - W_1^2)} \quad (7.26)$$

Para turbomáquinas generadoras hidráulicas se usa a menudo una definición alternativa del grado de reacción:

$$Gr = \frac{(P_2 - P_1)/\rho}{w_{1-2}} \quad (7.27)$$

Las definiciones dadas por las ecs. (7.25) y (7.27) coinciden para flujo isentropico ya que:

$$h_2 - h_1 = \int_1^2 T \, ds + \int_1^2 dP/\rho = (P_2 - P_1)/\rho \quad (7.28)$$

Sin embargo, ambas definiciones dan resultados diferentes si el flujo no es isentrópico.

Un grado de reacción entre 0.5 y 1.0 implica que mas de la mitad de la energía transferida por el rodamiento se manifiesta como un aumento de la energía de compresión y efectos térmicos de fricción y menos de la mitad como un aumento de la energía cinética del fluido. Un grado de reacción entre 0 y 0.5 implica que mas de la mitad de la energía se transfiere en forma de energía cinética. Teóricamente es posible un grado de reacción mayor que 1.0, lo cual implica que hay una reducción de la energía cinética cuando el fluido pasa por el rotor.

Teóricamente se lograría un grado de reacción negativo con un aumento de la energía cinética y una reducción de la energía de compresión.

7.2.5 Coeficientes adimensionales de flujo, ϕ , y de carga, ψ .

Se introducen los coeficientes adimensionales de flujo, calculados con el flujo máscico de la máquina \dot{m} , ϕ_1 y ϕ_2 , son parámetros que relacionan la velocidad meridional C_{1m} y C_{2m} (inmediatamente antes y después de la descarga del rotor respectivamente) con la velocidad tangencial del rotor:

$$\phi_1 = C_{1m}/U_1 \quad \phi_2 = C_{2m}/U_2 \quad (7.29)$$

y el coeficiente adimensional de carga:

$$\psi = \frac{w_{1-2}}{U_2^2} = \mu(1 - \phi_2 C_{tg}\beta'_2) = 1 - \frac{C_{2mi}}{U_2} C_{tg}\beta_2 \quad (7.30)$$

Cuando el flujo de recirculación y el espesor de los álabes se pueden despreciar se tiene:

$$\psi = \frac{w_{1-2}}{U_2^2} = \mu(1 - \phi_2 C_{tg}\beta'_2)1 - \phi_2 C_{tg}\beta_2 \quad (7.31)$$

7.3 Bombas y ventiladores de flujo radial

A manera de repaso de lo presentado en el capítulo 1, se pretende aclarar el cálculo detallado de la altura de pérdidas internas de este tipo de turbomáquinas hidráulicas generadoras, definiéndose una eficiencia de difusión. Para las bombas y ventiladores de flujo radial, en algunos diseños el fluido entra a la embocadura haciendo una vuelta a la dirección radial en un canal sin álabes y está en contacto con los álabes sólo en la parte radial de su trayectoria, estas bombas son de flujo radial puro. En otros diseños el fluido hace contacto con los álabes antes de llegar a una trayectoria puramente radial, pero debido a que las condiciones en la salida son determinantes y allí el flujo es radial, el análisis es aplicable. Cuando el fluido sale del rodamiento puede pasar a un difusor radial con o sin álabes fijos, el propósito es convertir la energía cinética del fluido en energía de compresión. No todas las bombas o ventiladores cuentan con este difusor. El fluido pasa del difusor radial o directamente del rodamiento a una voluta en forma de caracol que sirve para colectar el fluido y producir un efecto adicional de difusión, o sea, aumento de presión. De la voluta el fluido descarga a un difusor cónico que aumenta más la presión, reduciendo la velocidad.

La ecuación de energía aplicada entre la entrada (1) y la salida (2) nos permite calcular la altura de bombeo H_B

$$H_B = \frac{P_2 - P_1}{\gamma} + \frac{V_2^2 - V_1^2}{\gamma} + (z_2 - z_1) \quad (7.32)$$

En donde no se han considerado la altura de pérdidas internas del rotor y difusor (h_{fint}) de la máquina. Esta altura representa la energía por unidad de peso útil entre la entrada y salida de la bomba. Es la energía por unidad de peso mínima del rodete sobre el fluido para producir la carga realizada por la bomba.

La altura en el rotor definida como la altura o carga teórica de la bomba (también llamada altura de Euler), esta dada por la relación:

$$H_{rotor} = H_B + h_{fint} \quad (7.33)$$

Esta altura es la carga máxima alcanzable en la bomba si toda la energía transmitida al fluido fuera convertida en energía útil y ninguna parte en energía térmica.

h_{fint} es la suma de las pérdidas hidráulicas internas de la bomba y abarca las pérdidas en la embocadura, el rodete, la voluta y el difusor o difusores.

La relación entre la altura de la bomba y la altura en el rotor define el rendimiento hidráulico de la bomba:

$$\eta_h = \frac{H_B}{H_{rotor}} \quad (7.34)$$

Para caracterizar las pérdidas en los procesos de difusión que ocurren entre la salida del rodete y la entrada al conducto de presión se introduce una eficiencia de difusión:

$$\eta_D = \frac{P_2 - P_2'}{(P_2 - P_2')_{ideal}} \quad (7.35)$$

Donde P_2 es la presión en la salida de la bomba (entrada a la conducción de presión) y P_2' es la presión a la salida del rodete. Planteando la ecuación de energía entre estos puntos se tiene:

$$\frac{P_2'}{\gamma} + \frac{C_2^2}{2g} - h_{fdifusión} = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g}$$

$$P_2 - P_2' = \rho \left(\frac{C_2^2 - V_2^2}{2} \right) - \gamma h_{fdifusión} \quad (7.36)$$

Para el proceso ideal $h_{fdifusión}$ sería igual a cero. Entonces en términos de velocidades

$$\eta_D = \frac{C_2^2 - V_2^2 - 2g h_{fdifusión}}{C_2^2 - V_2^2} \quad (7.37)$$

O en términos de presiones y velocidades:

$$\eta_D = \frac{2(P_2 - P_2')}{\rho(C_2^2 - V_2^2)} \quad (7.38)$$

Despejando las pérdidas:

$$h_{fdifusión} = (1 - \eta_D)(C_2^2 - V_2^2)/2g \quad (7.39)$$

h_{fr} representa las pérdidas hidráulicas en la embocadura y el rodete. Las pérdidas internas de la máquina será la suma de las dos anteriores:

$$h_{fint} = h_{fr} + h_{fdifusión} \quad (7.40)$$

Ejemplo 7.2.

Se especifican los siguientes datos para una bomba de flujo radial para agua:

Caudal de agua	0.1 m^3/s
Velocidad de rotación	1125 rpm
Coeficiente de flujo a la salida	0.1
Diametro exterior del impulsor	46 cm
Diametro del ojo del impulsor	18 cm
Angulo de los alabes a la salida	25°

Velocidad meridional constante a través del rotor

Entrada radial del líquido al impulsor

Pérdidas hidráulicas en la embocadura y el rodete

10% de H_i

Eficiencia del difusor

50%

Eficiencia mecánica

97%

Diametro de descarga del difusor de la bomba

15 cm

Considerando sólo el efecto de deslizamiento, calcular:

- Ancho del alabe en la salida y en la entrada.
- Ángulo de los álabes en la entrada.
- La altura teórica.
- Ángulo real del flujo en la salida
- Altura real de bombeo.
- Eficiencia hidráulica.
- Eficiencia interna.
- Potencia mecánica requerida.

-
- i) Grado de reacción.
j) Triángulos de velocidades

- a) Ancho del álabe en la salida y en la entrada.

$$U_2 = \pi D_2 N / 60 = \pi 0.46 m 1125 / 60 s = 27.10 m/s$$

$$C_{2m} = \phi_2 U_2 = 0.1 \times 27.10 m/s = 2.71 m/s$$

$$Q = \pi D_2 B_2 C_{2m}; \quad C_{2m} = C_{2mi}$$

$$B_2 = \frac{Q}{\pi D_2 C_{2m}} = \frac{0.1}{\pi \times 0.46 \times 2.71} = 2.55 cm$$

$$\text{Con } C_{1m} = C_{2m}$$

$$B_1 = \frac{Q}{\pi D_1 C_{1m}} = \frac{0.1}{\pi \times 0.18 \times 2.71} = 6.53 cm$$

- b) Ángulo de los alabes en la entrada

$$U_1 = \pi D_1 N / 60 = \pi 0.18 m 1125 / 60 s = 10.60 m/s$$

$$\tan \beta_1' = \frac{C_{1m}}{U_1} = \frac{2.71}{10.60} \Rightarrow \beta_1' = 14.34^\circ$$

- c) La altura teórica o ideal es la altura del rotor considerando deslizamiento

$$\mu = 1 - \frac{\frac{\pi}{Z} \sin \beta_2'}{1 - \left(\frac{C_{2m}}{U_2} \right) \cot \beta_2'} = 1 - \frac{\frac{\pi}{6} \sin 25}{1 - \left(\frac{2.71}{27.10} \right) \cot 25} = 1 - 0.282 = 0.718$$

$$H_{rotor} = H_i = \frac{w_{1-2}}{g} = \frac{U_2 C_{\theta 2}}{g} = \frac{\mu U_2}{g} (U_2 - C_{2m} \cot \beta_2')$$

$$H_{rotor} = H_i = \frac{0.718 \times 27.10 \frac{m}{s}}{9.81 \frac{m}{s^2}} \left(27.10 \frac{m}{s} - 2.71 \cot 25^\circ \right)$$

$$H_r = H_i = 42.22 m$$

- d) Ángulo β_2 =?

$$C_{\theta 2} = \mu (U_2 - C_{2m} \cot \beta_2') = 0.718 (27.10 - 2.71 \cot 25^\circ) = 15.29 m/s$$

$$W_{\theta 2} = U_2 - C_{\theta 2} = 27.10 - 15.29 = 11.81 m/s$$

$$\beta_2 = \arctan \left(\frac{C_{2m}}{W_{\theta 2}} \right) = \arctan \left(\frac{2.71}{11.81} \right) = 12.92^\circ$$

- e) Altura de bombeo

Pérdidas hidráulicas en la embocadura y el rodetes iguales al 10% de la altura ideal:

$$h_{fr} = 0.1 \times 42.22 m = 4.22 m$$

Pérdidas hidráulicas en el difusor:

$$h_{fdifusión} = (1 - \eta_D) (C_2^2 - V_2^2) / 2g$$

$$C_2 = \sqrt{C_{2m}^2 + C_{\theta 2}^2} = \sqrt{2.71^2 + 15.29^2} = 15.53 m/s$$

$$V_2 = \frac{4Q}{\pi \times d^2} = \frac{4 \times 0.1 m^3/s}{\pi \times 0.15^2 m^2} = 5.66 m/s$$

$$h_{fdifusión} = (1 - 0.5) (15.53^2 - 5.66^2) / (2 \times 9.81) = 5.33 m$$

$$h_{fint} = 4.22 + 5.33 = 9.55 m$$

$$H_B = H_{rotor} - h_{fint} = 42.22 - 9.55 = 32.67 m$$

- k) Eficiencia hidráulica.

$$\eta_h = \frac{H_B}{H_{rotor}} \times 100 = \frac{32.67}{42.22} \times 100 = 77.38\%$$

- l) Eficiencia interna.

$$\eta_i = \eta_h = 77.38\% \quad \text{ya que } \eta_V = 100\%$$

m) Potencia mecánica requerida.

$$\dot{W}_{mec} = \left(\frac{\gamma Q H_B}{\eta_i \eta_m} \right) = \left(\frac{9810 \text{ N/m}^3 \times 0.1 \text{ m}^3/\text{s} \times 32.67 \text{ m}}{0.7738 \times 0.97} \right) = 42.699 \text{ KW}$$

n) Grado de reacción.

$$Gr = \frac{w_p}{w_{1-2}} = \frac{H_p}{H_{rotor}}$$

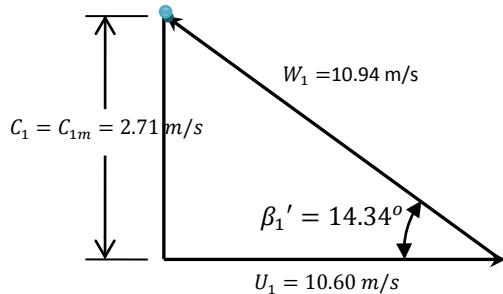
$$H_p = \frac{1}{g} (U_2^2 - U_1^2) - (W_2^2 - W_1^2) = H_{rotor} - \frac{1}{g} (C_2^2 - C_1^2)$$

$$H_p = 42.22 - \frac{1}{9.81} (15.53^2 - 2.71^2) = 18.38 \text{ m}$$

$$Gr = \frac{18.38}{42.22} = 0.4353$$

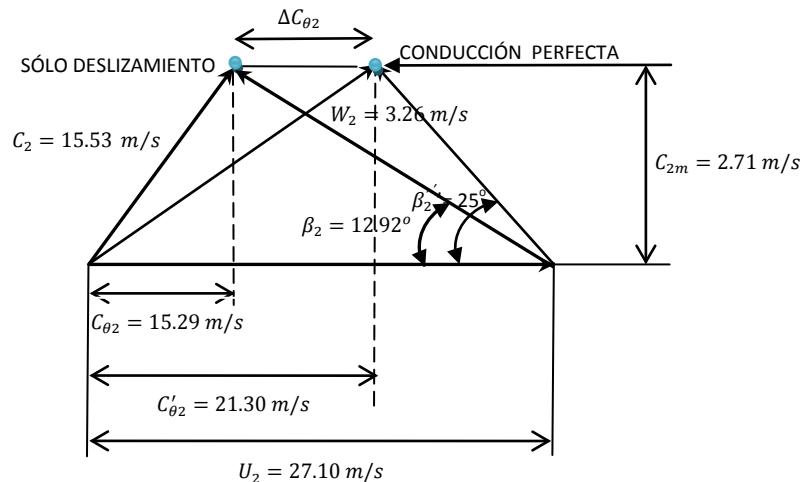
j) Triángulos de velocidades

$$W_1 = \sqrt{C_1^2 + U_1^2} = \sqrt{2.71^2 + 10.60^2} = 10.94 \text{ m/s}$$



$$C'_{\theta 2} = \frac{C_{\theta 2}}{\mu} = \frac{15.29}{0.718} = 21.30 \text{ m/s}$$

$$W_2 = \sqrt{2.71^2 + (27.10 - 15.29)^2} = 3.26 \text{ m/s}$$



Ejemplo 7.3.

Si en el **problema 7.2** se considera el deslizamiento, el espesor de los álabes y la eficiencia volumétrica de la bomba y se tienen los siguientes datos adicionales:

Número de alabes	6
Fracción del área de salida cubierta por alabes	0.05
Fracción del área de entrada cubierta por alabes	0.10
Eficiencia volumétrica	98%

Calcular:

- a) Ancho del alabe en la salida y en la entrada.
- b) Ángulo de los alabes en la entrada.
- c) La altura teórica y ángulo real del flujo en la salida.
- d) Altura real de bombeo.
- e) Eficiencia hidráulica.
- f) Eficiencia interna.
- g) Potencia mecánica requerida.
- h) Grado de reacción.

- a) Ancho del impulsor a la entrada B_1 y salida B_2

$$U_2 = \pi D_2 N / 60 = \pi 0.46 m 1125 / 60 s = 27.10 m/s$$

$$C_{2m} = \phi_2 U_2 = 0.1 \times 27.10 m/s = 2.71 m/s$$

$$Q_0 = \pi D_2 B_2 (1 - e_2) C_{2mi}; \quad Q = \pi D_2 B_2 C_{2m};$$

$$\eta_V = \frac{Q}{Q_0} = \frac{C_{2m}}{(1 - e_2) C_{2mi}}$$

$$C_{2mi} = \frac{C_{2m}}{\eta_V (1 - e_2)} = \frac{2.71}{0.98 (1 - 0.05)} = 2.91 \frac{m}{s}$$

$$Q_0 = \frac{Q}{\eta_V} = \frac{0.1}{0.98} = 0.102 m^3/s$$

$$B_2 = \frac{Q_0}{\pi D_2 (1 - e_2) C_{2mi}} = \frac{0.102}{\pi \times 0.46 (1 - 0.05) 2.91} = 2.55 cm$$

$$B_2 = \frac{Q}{\pi D_2 C_{2m}} = \frac{0.1}{\pi \times 0.46 \times 2.71} = 2.55 cm$$

$$Q_0 = \pi D_1 B_1 (1 - e_1) C_{1mi}; \quad Q = \pi D_1 B_1 C_{1m};$$

$$C_{1m} = C_{2m} = 2.71 m/s$$

$$C_{1mi} = \frac{C_{1m}}{\eta_V (1 - e_1)} = \frac{2.71}{0.98 (1 - 0.10)} = 3.07 m/s$$

$$B_1 = \frac{Q_0}{\pi D_1 (1 - e_1) C_{1mi}} = \frac{0.102}{\pi \times 0.18 (1 - 0.10) 3.07} = 6.53 cm$$

$$B_1 = \frac{Q}{\pi D_1 C_{1m}} = \frac{0.1}{\pi \times 0.18 \times 2.71} = 6.53 cm$$

- b) Ángulo de los alabes en la entrada

$$U_1 = \pi D_1 N / 60 = \pi 0.18 m 1125 / 60 s = 10.60 m/s$$

$$\tan \beta_1 = \frac{C_{1mi}}{U_1} = \frac{3.07}{10.60} \Rightarrow \beta_1 = 16.15^\circ$$

$$\tan \beta_1' = \frac{C_{1m}}{U_1} = \frac{2.71}{10.60} \Rightarrow \beta_1' = 14.34^\circ$$

- c) La altura teórica o ideal es la altura del rotor

$$\mu = 1 - \frac{\frac{\pi}{2} \operatorname{sen} \beta_2'}{1 - \left(\frac{C_{2m}}{U_2} \right) \cot \beta_2'} = 1 - \frac{\frac{\pi}{6} \operatorname{sen} 25}{1 - \left(\frac{2.71}{27.10} \right) \cot 25} = 1 - 0.282 = 0.718$$

$$H_{rotor} = H_i = \frac{W_{1-2}}{g} = \frac{U_2 C_{\theta 2}}{g} = \frac{\mu U_2}{g} (U_2 - C_{2m} \cot \beta_2')$$

$$H_{rotor} = H_i = \frac{0.718 \times 27.10 \frac{m}{s}}{9.81 \frac{m}{s^2}} \left(27.10 \frac{m}{s} - 2.71 \cot 25^\circ \right)$$

$$H_r = H_i = 42.23 m$$

$$H_{rotor} = H_i = \frac{w_{1-2}}{g} = \frac{U_2 C_{\theta 2}}{g} = \frac{U_2}{g} (U_2 - C_{2mi} \cot \beta_2)$$

$$C_{\theta 2} = \mu (U_2 - C_{2m} \cot \beta'_2) = 0.718(27.10 - 2.71 \times \cot 25^\circ) = 15.29 \text{ m/s}$$

$$\beta_2 = \arctan \left(\frac{C_{2mi}}{U_2 - C_{\theta 2}} \right) = \arctan \left(\frac{2.91}{27.10 - 15.29} \right) = 13.84^\circ$$

$$H_{rotor} = \frac{27.10}{9.81} (27.10 - 2.91 \cot 13.84^\circ) = 42.23 \text{ m}$$

d) Altura real de bombeo

Pérdidas hidráulicas en la embocadura y el rodete iguales al 10% de la altura ideal:

$$h_{fr} = 0.1 \times 42.23 \text{ m} = 4.22 \text{ m}$$

Pérdidas hidráulicas en el difusor:

$$h_{fdifusión} = (1 - \eta_D) (C_2^2 - V_2^2) / 2g$$

$$C_2 = \sqrt{C_{2m}^2 + C_{\theta 2}^2} = \sqrt{2.71^2 + 15.29^2} = 15.53 \text{ m/s}$$

$$V_2 = \frac{4Q}{\pi \times d^2} = \frac{4 \times 0.1 \text{ m}^3/\text{s}}{\pi \times 0.15^2 \text{ m}^2} = 5.66 \text{ m/s}$$

$$h_{fdifusión} = (1 - 0.5)(15.53^2 - 5.66^2) / (2 \times 9.81) = 5.33 \text{ m}$$

$$h_{fint} = 4.22 + 5.33 = 9.55 \text{ m}$$

$$H_B = H_{rotor} - h_{fint} = 42.22 - 9.55 = 32.67 \text{ m}$$

e) Eficiencia hidráulica

$$\eta_h = \frac{H_B}{H_{rotor}} \times 100 = \frac{32.67}{42.22} \times 100 = 77.40\%$$

f) Eficiencia Interna

$$\eta_i = \eta_h \eta_v = 0.774 \times 0.98 \times 100 = 75.85\%$$

g) Potencia Mecánica

$$\dot{W}_{mec} = \left(\frac{\gamma Q H_B}{\eta_i \eta_m} \right) = \left(\frac{9810 \text{ N/m}^3 \times 0.1 \text{ m}^3/\text{s} \times 32.67 \text{ m}}{0.7585 \times 0.97} \right) = 43.560 \text{ KW}$$

h) Grado de reacción

$$Gr = \frac{w_p}{w_{1-2}} = \frac{H_p}{H_{rotor}}$$

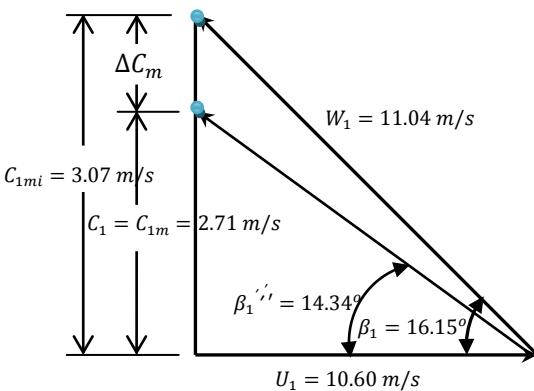
$$H_p = \frac{1}{g} [(U_2^2 - U_1^2) - (W_2^2 - W_1^2)] = H_{rotor} - \frac{1}{g} (C_2^2 - C_1^2)$$

$$H_p = 42.22 - \frac{1}{9.81} (15.53^2 - 2.71^2) = 18.38 \text{ m}$$

$$Gr = \frac{18.38}{42.22} = 0.4353$$

i) Triángulos de velocidades

$$W_1 = \sqrt{C_{1mi}^2 + U_1^2} = \sqrt{3.07^2 + 10.60^2} = 11.04 \text{ m/s}$$

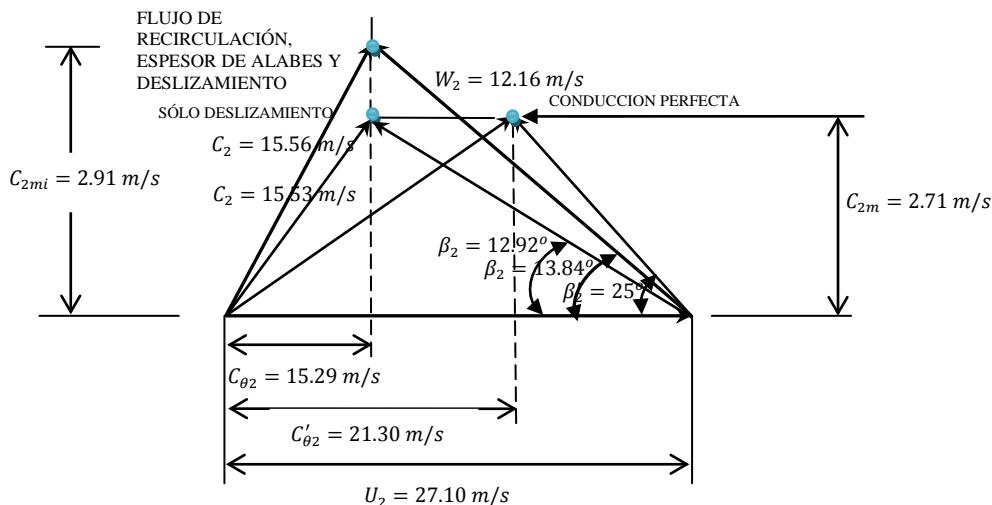


$$C'_{\theta 2} = \frac{15.29}{0.718} = 21.30 \text{ m/s}$$

$C_2 = \sqrt{2.91^2 + 15.29^2} = 15.56 \text{ m/s}$ velocidad absoluta antes de salir del rotor

$C_2 = 15.53 \text{ m/s}$ velocidad absoluta en la salida inmediatamente después del rotor

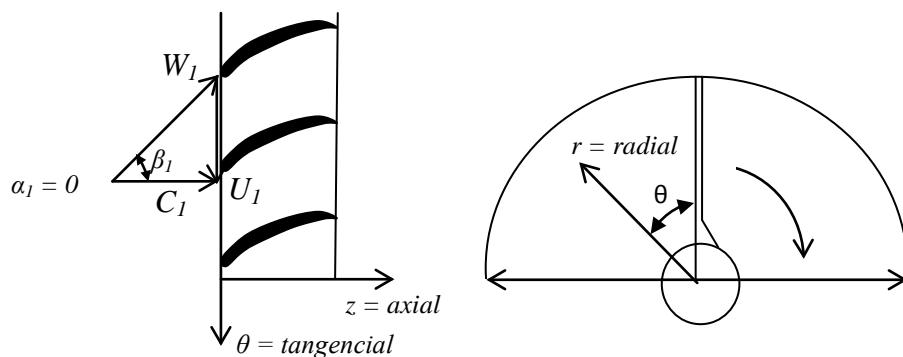
$$W_2 = \sqrt{2.91^2 + (27.10 - 15.29)^2} = 12.16 \text{ m/s}$$



7.4 Problemas

7.1 Aire a una temperatura ambiente de $22^\circ C$ y presión atmosférica normal ($\gamma = 1.4$, $C_p = 1.005 \text{ KJ/Kg } ^\circ C$, $R = 287 \text{ J/Kg } ^\circ C$) entra en la dirección axial al impulsor de un compresor centrífugo de alabe radial. El impulsor rota a 15000 RPM , la relación de presión total es 4, la eficiencia adiabática es 84%, la eficiencia másica es 2 Kg/s , la eficiencia mecánica es 97% y rendimiento volumétrico 95%. La fracción de área cubierta en la salida 0.10. El número de álabe es 12. Calcular:

- Diámetro de salida del impulsor.
- Triángulo de velocidades en la salida y ancho del rotor B_2 , si las pérdidas de presión total en el compresor ocurren 60% en el rotor y 40% en el difusor y el coeficiente de flujo en la salida es 0.3.
- Número de Mach en la descarga del rotor.
- Porcentaje de difusión sobre la velocidad absoluta de descarga del rotor, si la velocidad del aire comprimido a la salida del compresor no debe exceder 100 m/s .
- Diámetro y número de Mach en la brida descarga del compresor.
- Potencia del motor de accionamiento en KW .
- Si los diámetros del ojo del impulsor en el tope y la raíz son de 12 cm y 6 cm respectivamente, calcular el grado de reacción.



7.2 Aire a una temperatura ambiente de 27°C y 100 kPa entra al impulsor de un compresor centrífugo en la dirección axial. La relación de presión total es 5, la eficiencia global es 84.48%, el flujo másico es 2 Kg/s , la eficiencia mecánica 96% y el rendimiento volumétrico 96%. El diámetro del impulsor es 48.97 cm. La fracción de área cubierta en la salida 0.10 y en la entrada 0.15. El número de álabes es 12. Determinar:

- El régimen de revoluciones del impulsor, si en la salida: el ángulo del alabe es 30° y el coeficiente de flujo en la salida es 0.35.
- Ancho del rotor B_2 si 57% de las pérdidas hidráulicas ocurren en el rotor.
- Potencia del motor de accionamiento.
- Si el radio de tope en la entrada es 18 cm y el de raíz 10 cm dibuje los triángulos de velocidades en la entrada y salida del rotor con sus respectivas direcciones y magnitudes de ángulos y velocidades.

Use las siguientes propiedades en el problema:

$k=1.4$, $C_p=1 \text{ KJ/KgK}$, $R=287 \text{ J/KgK}$ y la densidad del aire en la entrada al rotor del compresor es 1 kg/m^3 .

7.3 Una bomba prototipo manejará un caudal de $3.5 \text{ pie}^3/\text{s}$, con una altura de bombeo de 300 pies girando a 1760 RPM . El rendimiento mecánico se estima en 95%. La línea de succión del sistema tiene 100 pies de longitud y es de acero con rugosidad 0.00015 pies . Use criterios de pre-diseño requeridos y calcule:

Diámetro del rotor.

Si el ancho del álabe es constante e igual a 1 pulg y el diámetro de entrada al rotor es 0.82 pies y se tiene máxima transferencia de energía, calcular el ángulo de descarga del álabe y el grado de reacción de la bomba.

Si la bomba tiene 6 álabes calcule el ángulo real de flujo considerando deslizamiento y dibuje el triángulo de velocidades.

7.4 Una bomba centrifuga de alabe radial con radio de entrada 2 cm y de salida 7 cm, ancho del alabe en la salida 0.4 cm . Se tiene máxima transferencia de energía. El agua entra con una velocidad absoluta de 8 pies/s , la velocidad de giro es 3460 RPM , el rendimiento global, mecánico y volumétrico: 75%, 95% y 97% respectivamente. El número de álabes del rotor es 6. La fracción de área descubierta en la salida es 0.90 y en la entrada 0.85. La bomba está diseñada de manera que la velocidad radial permanece constante. Dibuje los triángulos de velocidades en la entrada y en la salida del rotor con sus respectivas velocidades, ángulos y magnitudes. Calcular: Caudal, Altura de bombeo, Potencia mecánica, Grado de reacción. La eficiencia del difusor de la bomba si el diámetro de descarga de la bomba es 2 pulg y el 70% de las pérdidas internas de la bomba ocurre en la embocadura y el rotor.

Capítulo 8

Bombas en serie y en paralelo

8.1 Introducción

8.2 Bombas en serie

 8.2.1 Bombas iguales acopladas en serie.

 8.2.2 Bombas diferentes acopladas en serie.

8.3 Bombas en paralelo

 8.3.1 Bombas iguales acopladas en paralelo

 8.3.2 Bombas diferentes acopladas en paralelo

8.4 Problemas

Capítulo 8
Bombas en serie y en paralelo

8.1 Introducción

En este capítulo se indaga sobre el funcionamiento de las bombas conectadas en serie y paralelo, selección de la bomba más adecuada y el número de bombas necesarias para satisfacer la demanda de un sistema. Hay casos en que las necesidades de un sistema exigen que varíen la carga o el gasto, así como los requerimientos de succión y descarga; y una sola bomba tal vez no podría satisfacerlas. En estas situaciones, las bombas pueden disponerse ya sea en serie o en paralelo para ofrecer una operación más eficiente.

8.2. Bombas en serie

Este tipo de acoplamiento se emplea en casos en los cuales se desea elevar un mismo caudal a distintas alturas, o para impulsar un determinado caudal, venciendo grandes resistencias debidas a grandes longitudes de las conducciones (líquidos industriales: petróleo, gasolina, etc.), si bien es relativamente pequeño el desnivel geométrico a vencer.

Esta manera de acoplar las bombas es poco frecuente y no debe confundirse con el caso de tener dos o más estaciones de bombeo escalonadas, como por ejemplo, en un sistema de abastecimiento de agua, o en largas conducciones de combustible, en los cuales la descarga de una bomba se recibe en un depósito elevado con respecto al anterior, desde donde aspira la siguiente unidad, para impulsar al fluido hasta el próximo depósito, y, así, sucesivamente. En este último caso los caudales impulsados individualmente no necesariamente tienen que ser iguales, asimismo, tampoco se requiere que las bombas estén funcionando a la vez.

Cuando dos bombas que operan independientemente, se conectan de tal forma que la descarga de la bomba B_1 se introduce en la succión de la bomba B_2 , se dice que están conectadas en serie tal como se muestra en la figura 8.1. Por continuidad, el caudal que pasa por la bomba B_1 , es el mismo que pasa por la bomba B_2 y como el impulsor adiciona energía, la carga total del sistema será la suma de las cargas que proporciona cada una de las bombas.

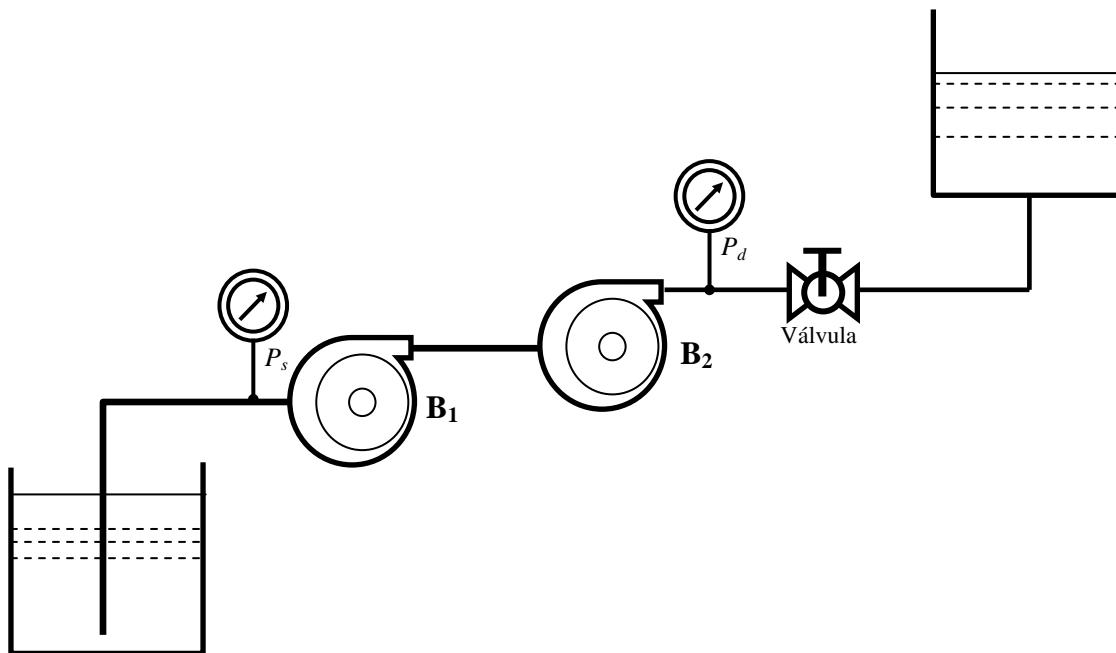


Figura 8.1. Esquema de bombas en serie

Como se muestra en la figura las bombas están conectadas en serie, por lo tanto:

$$Q = Q_1 = Q_2 \quad (8.1)$$

Y la carga total del sistema será:

$$H_t = H_1 + H_2 \quad (8.2)$$

H_1 y H_2 son respectivamente las alturas que proporcionan las bombas B_1 y B_2 , conectadas en serie.

Aplicando la ecuación de Bernoulli entre el punto de succión, antes de la bomba B_1 y el punto de descarga, después de la bomba B_2 se tiene:

$$\frac{P_s}{\gamma} + \frac{V_s^2}{2g} + z_s + H_t = \frac{P_d}{\gamma} + \frac{V_d^2}{2g} + z_d$$

Donde $z_s = z_d = 0$. Al despejar H_t de la ecuación se obtiene:

$$H_t = \frac{(P_d - P_s)}{\gamma} + \frac{V_d^2 - V_s^2}{2g} \quad (8.3)$$

Se debe tener en cuenta que si en el sistema existen pérdidas por fricción o accesorios éstas se le sumará al valor de H_t .

$$H_t = \frac{(P_d - P_s)}{\gamma} + \frac{V_d^2 - V_s^2}{2g} + h_f \quad (8.4)$$

Eficiencia de un sistema conectado con N bombas en serie:

$$\eta_{NB} = \frac{\dot{W}_{hid}}{\Sigma \dot{W}_{mec}} \quad (8.5)$$

$$\eta_{NB} = \frac{\gamma H_t Q}{\Sigma \dot{W}_{mec}} \quad (8.6)$$

Donde:

$H_t = \Sigma H$: Es la suma de las cargas individuales a través de cada bomba

Q : Caudal del sistema

$\Sigma \dot{W}_{mec}$: Es la suma de las potencias individuales que cada bomba requiere para su funcionamiento.

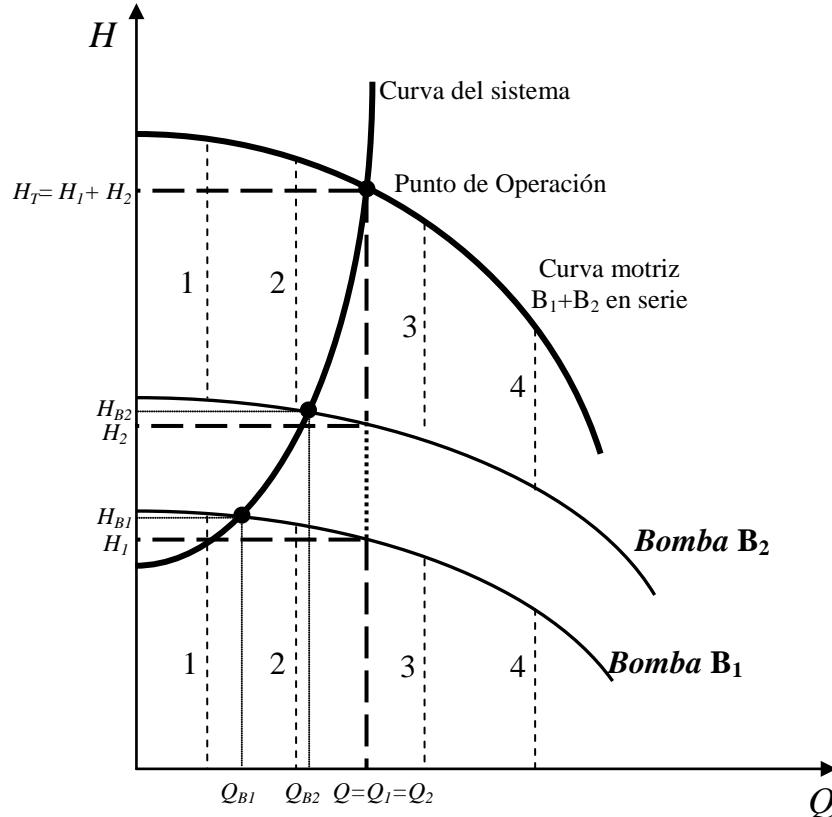


Figura 8.2. Curva de funcionamiento de bombas en serie

La figura 8.2, muestra un sistema en serie de dos bombas (B_1 y B_2), donde el punto de operación requerido es tal, que la bomba B_1 sola no puede suministrar la altura necesaria, porque su carga es menor a la carga necesaria en el punto de operación, debido a esto, se conecta en serie la bomba B_2 , para poder conseguir una carga mayor que según el punto de operación.

La curva característica H vs. Q de bombas o rodetes en serie se obtiene a partir de las correspondientes curvas H vs. Q de las bombas o rodetes que conformen el conjunto acoplado de bombas, sumando las alturas, para igualdad de caudales. Ello se traduce en que la curva H vs. Q resultante tendrá una pendiente acusada, mucho mayor que las de las curvas individuales.

De la figura 8.2, para obtener la *curva característica combinada* se procederá de la siguiente manera:

Manteniendo constante el caudal, se toma el valor de carga del punto 1 correspondiente a la bomba B_1 , y este mismo valor de carga se colocará a partir de la bomba B_2 , se hará el mismo procedimiento para los puntos 2, 3 y 4. Con los puntos ubicados, éstos se unirán para formar la curva combinada del sistema conformado por las bombas B_1 y B_2 conectadas en serie. De la figura 8.2, se puede observar que en el acoplamiento en serie, la bomba B_1 maneja una altura de bombeo H_1 y la bomba B_2 maneja una altura H_2 , éstas difieren de las alturas H_{B1} y H_{B2} que manejan las bombas funcionando individualmente. La altura total H_T del acoplamiento en serie, es menor que la suma de las alturas de las bombas funcionando desacopladas (H_{B1} y H_{B2}), es decir, $H_T < H_{B1} + H_{B2}$. Por continuidad, cada una de las bombas B_1 y B_2 conectadas en serie impulsa un caudal Q más grande respecto al caudal de cualquiera de las bombas funcionando individualmente (Q_{B1} y Q_{B2}).

8.2.1 Bombas iguales acopladas en serie

En este caso, la carga que aportará cada bomba al sistema será:

$$H = \frac{H_t}{N} \quad (8.7)$$

N : Es el número de bombas en serie que tenga el sistema. Analíticamente la *curva característica combinada* de funcionamiento del sistema con N bombas **iguales** en serie será:

$$H_t = N(A + BQ + CQ^2) \quad (8.8)$$

Tanto la curva de eficiencia de la bomba como la curva de eficiencia del conjunto en serie, sería:

$$\eta_B = \eta_{NB} = DQ + EQ^2 \quad (8.9)$$

Gráficamente los valores de A , B , C , D y E se pueden obtener mediante ajustes a partir de las curvas características, usando el método de mínimos cuadrados, como se muestra más adelante.

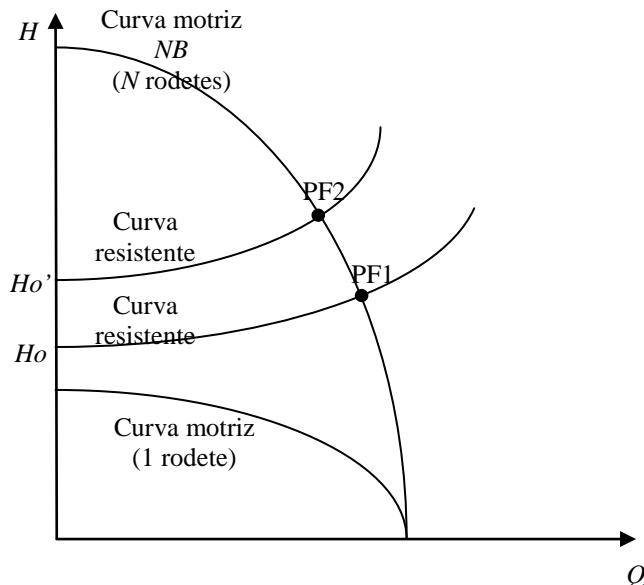


Figura 8.3. Curvas características de un sistema en serie de N bombas iguales.

Las bombas multicelulares o multietapas se pueden considerar como un sistema acoplado en serie, tienen rodetes iguales, las curvas características H vs. Q y η vs. Q son también idénticas entre sí y en este caso no se presentan problemas de rangos indeseados de funcionamiento u operación incorrecta, tal como se muestra en la figura 3.

En la figura 8.3 se observa que con una sola bomba no se puede vencer ni la carga estática para $Q=0$, debido al requerimiento de sistema o curva resistente. Con una bomba multietapas usada para el bombeo de agua desde un pozo, la elevada pendiente de la curva motriz resultante hace que las variaciones estacionales importantes del nivel del agua en el pozo (lo cual hace que la altura estática, H_0 , varíe apreciablemente) produzcan pequeñas fluctuaciones del caudal impulsado por la bomba, y de su eficiencia.

La asociación de bombas en serie no es aconsejable en la inyección directa a redes de distribución de agua, dado que una ligera variación en el caudal demandado (inyectado) genera una gran variación en la altura de presión, (P/γ), proporcionada por el sistema de bombeo, causando daños por sobrepresión.

A efectos de evitar las altas presiones a caudales bajos, es aconsejable arrancar el sistema de bombas en serie con la válvula de descarga total o casi totalmente abierta.

8.2.2 Bombas diferentes acopladas en serie

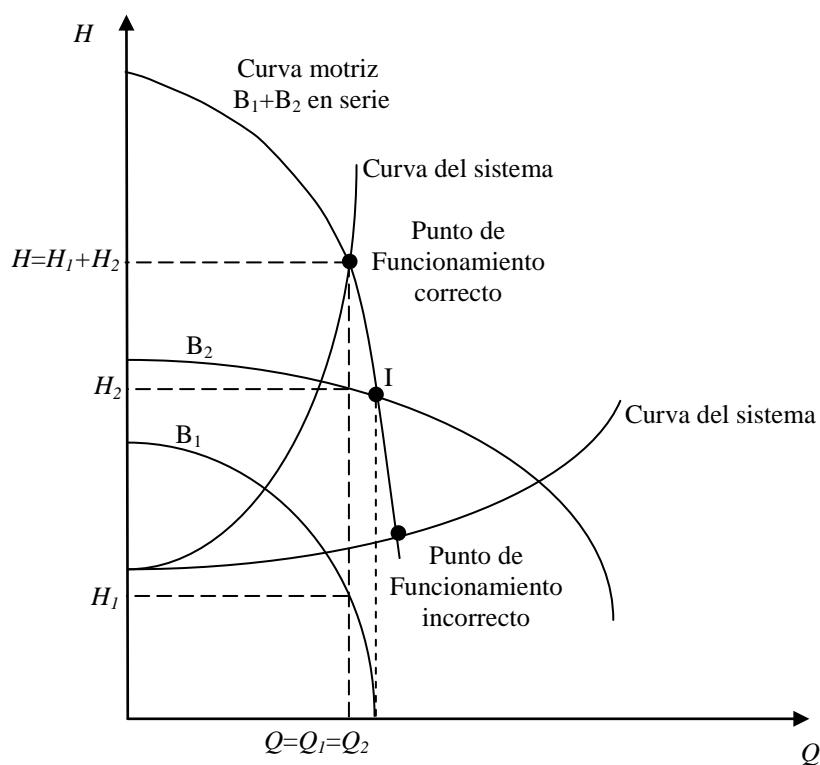


Figura 8.4. Curva característica de dos bombas diferentes acopladas en serie

En la figura 8.4, se tienen dos bombas de características diferentes, conectadas en serie. Ello tiene el inconveniente de que, si el punto de funcionamiento del sistema (punto de intersección entre la curva motriz del acoplamiento en serie ($B_1 + B_2$) con la curva resistente del sistema queda por debajo del punto I, la operación es incorrecta, puesto que el caudal y la altura del acoplamiento serían menores o iguales que los correspondientes a la bomba mayor B_2 .

Además, en estos casos, resulta muy difícil conseguir que todas las bombas trabajen con eficiencias elevadas. Esto, sumado a lo anterior, desmotiva el uso de dos o más bombas diferentes en serie.

Si las bombas son diferentes, la curva característica combinada será:

$$H_t = A + BQ + CQ^2 \quad (8.10)$$

Donde los valores de A , B , y C son el resultado de la suma de los coeficientes correspondientes de las N bombas del sistema, es decir:

$$A = \sum_{i=1}^N A_i; \quad B = \sum_{i=1}^N B_i; \quad C = \sum_{i=1}^N C_i; \quad (8.11)$$

Gráficamente los valores de A , B y C se pueden obtener tomando tres puntos sobre *la curva característica combinada* de las bombas en serie y planteando un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas o usando método de mínimos cuadrados.



Figura 8.5. Bombas multicelulares o multietapas de pozo profundo

8.3. Bombas en paralelo

Cuando se trata de satisfacer las necesidades o demandas de agua, variables en el tiempo, como en sistemas de riego, o en redes de distribución de agua potable, se justifica el acoplamiento de dos o más bombas en paralelo.

Si se tiene una bomba que proporciona una carga adecuada, pero un caudal demasiado bajo, una solución factible consistiría en combinar dos o más bombas similares en paralelo, compartiendo la misma succión y las mismas condiciones de entrada. Una disposición en paralelo se aplicaría también si varía el caudal de demanda, de modo que se dispondrá una bomba para caudales bajos y una segunda bomba para cuando se requieran caudales mayores.

En efecto, el empleo de una sola bomba, para satisfacer los consumos altamente variables con el tiempo, sería factible también, pero antieconómico, puesto que aquella tendría que trabajar con eficiencias muy bajas, correspondientes a los distintos puntos de funcionamiento, dado que las curvas de η vs. Q no son, infelizmente, planas. Por el contrario, el suministro de agua, variable según la demanda, puede garantizarse por medio de una progresiva entrada en funcionamiento de distintos grupos de bombas, conformado por bombas acopladas en paralelo, manteniendo el rendimiento del conjunto dentro de unos valores aceptables.

Cuando esto sucede el caudal total del sistema es la suma de los caudales de las bombas que estén operando a la vez y la carga del sistema es la misma para las bombas.

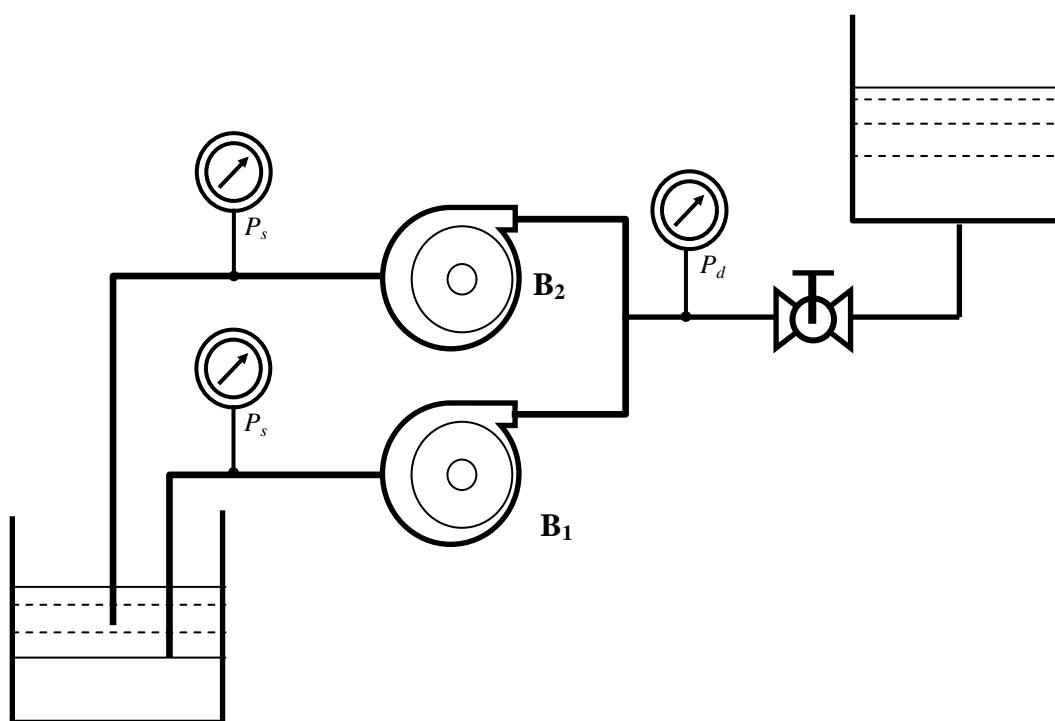


Figura 8.6. Esquema de bombas en paralelo

Como se muestra en la figura las bombas están conectadas en paralelo, por lo tanto:

$$Q_t = Q_1 + Q_2 \quad (8.12)$$

Q_1 y Q_2 son respectivamente los caudales que suministran las bombas B_1 y B_2 conectadas en paralelo.

La carga total del sistema será:

$$H = H_1 = H_2 \quad (8.13)$$

Aplicando la ecuación de Bernoulli entre el punto de succión y el punto de descarga se tiene:

$$\frac{P_s}{\gamma} + \frac{V_s^2}{2g} + z_s + H = \frac{P_d}{\gamma} + \frac{V_d^2}{2g} + z_d \quad (8.14)$$

Donde $z_s = z_d = 0$

Al despejar H de la ecuación se obtiene:

$$H = \frac{(P_d - P_s)}{\gamma} + \frac{V_d^2 - V_s^2}{2g} \quad (8.15)$$

Se debe tener en cuenta que si en el sistema existen pérdidas por fricción o accesorios, éstas se sumarán al valor de H .

$$H = \frac{(P_d - P_s)}{\gamma} + \frac{V_d^2 - V_s^2}{2g} + h_f \quad (8.16)$$

Eficiencia de un sistema con N bombas conectadas en paralelo es:

$$\eta_{NB} = \frac{\dot{W}_{hid}}{\Sigma \dot{W}_{mec}} \quad (8.17)$$

$$\eta_{NB} = \frac{\gamma H Q_t}{\Sigma \dot{W}_{mec}} \quad (8.18)$$

Donde:

H : Carga del sistema

$Q_t = \Sigma Q$: Es la suma de los caudales individuales a través de cada bomba

$\Sigma \dot{W}_{mec}$: Es la suma de las potencias individuales que cada bomba requiere para su funcionamiento.

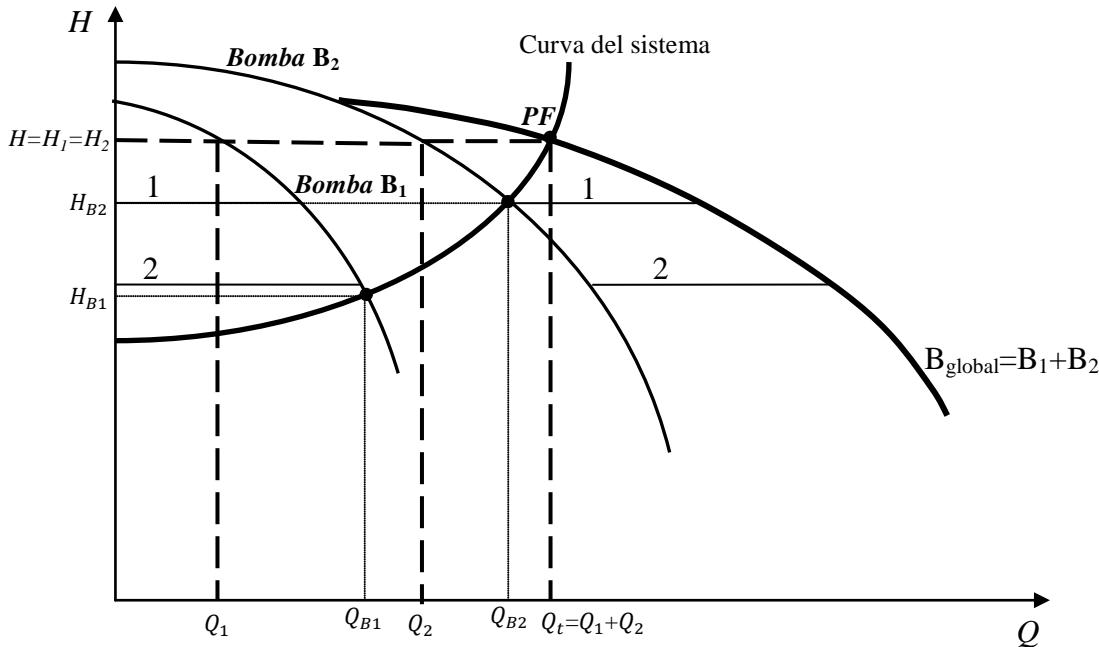


Figura 8.7. Curva de funcionamiento de bombas en paralelo

Para obtener la curva característica de un conjunto de bombas acopladas en paralelo, basta con sumar sus respectivos caudales, para una misma altura o cabeza, a partir de sus correspondientes curvas características de H vs. Q . Ello resulta en unas curvas globales H vs. Q , cada vez más planas, tanto más planas cuanto más bombas en paralelo sean acopladas.

La figura 8.7, muestra un sistema de dos bombas (B_1 y B_2) conectadas en paralelo, donde se observa que sólo la bomba B_1 suministraría un caudal Q_{B1} , el cual sería menor que Q_t que es el necesario para la demanda del sistema, por lo tanto se le conectaría la bomba B_2 en paralelo para suministrar el caudal necesario.

Para obtener la curva combinada se procede de la siguiente manera:

Para una carga constante, se mide el caudal del punto 1 perteneciente a la bomba B_1 y se coloca en la misma dirección sobre la curva de la bomba B_2 y así sucesivamente. Los puntos obtenidos se unen para formar la curva característica combinada de las bombas B_1 y B_2 conectadas en paralelo.

8.3.1 Bombas iguales acopladas en paralelo

Si se tiene un sistema de N bombas iguales conectadas en paralelo los caudales que suministrará cada bomba al sistema será:

$$Q = \frac{Q_t}{N} \quad (8.19)$$

Donde Q será el caudal que suministrará cada bomba al sistema. Analíticamente las curvas de N bombas **iguales** conectadas en paralelo se representan:

$$H = A + B \left(\frac{Q_t}{N} \right) + C \left(\frac{Q_t}{N} \right)^2 \quad (8.20)$$

$$\eta_{NB} = D \left(\frac{Q_t}{N} \right) + E \left(\frac{Q_t}{N} \right)^2 \quad (8.21)$$

Gráficamente los valores de A , B , C , D y E se pueden obtener mediante ajustes a partir de las curvas características, usando el método de mínimos cuadrados.

Para el ajuste de la curva característica de la bomba H_B . vs. Q_B según la ecuación:

$$H_B = A + B Q_B + C Q_B^2$$

La diferencia $[H_B - (A + B Q_B + C Q_B^2)]$ es pequeña, teóricamente nula para cualquier punto; más aún el cuadrado de la misma:

$$[H_B - (A + B Q_B + C Q_B^2)]^2 \quad (8.22)$$

Se toman n puntos reales sobre la curva característica dada, se sustituyen en la expresión anterior y se suman:

$$S = \sum [H_{Bi} - (A + B Q_{Bi} + C Q_{Bi}^2)]^2$$

Derivamos con respecto a A , B y C , e igualamos a cero:

$$\frac{\partial S}{\partial A} = 0 ; \quad \frac{\partial S}{\partial B} = 0 ; \quad \frac{\partial S}{\partial C} = 0$$

$$\sum H_{Bi} - nA - B \sum Q_{Bi} - C \sum Q_{Bi}^2 = 0 \quad (8.23)$$

$$\sum H_{Bi} Q_{Bi} - A \sum Q_{Bi} - B \sum Q_{Bi}^2 - C \sum Q_{Bi}^3 = 0$$

$$\sum H_{Bi} Q_{Bi}^2 - A \sum Q_{Bi}^2 - B \sum Q_{Bi}^3 - C \sum Q_{Bi}^4 = 0$$

El ajuste de la curva característica de la bomba H_B . vs. Q_B , usando mínimos cuadrados, sin considerar el término de primer orden según la ecuación:

$$H_B = A + C Q_B^2 \quad (8.24)$$

$$\sum H_{Bi} - nA - C \sum Q_{Bi}^2 = 0$$

(8.25)

$$\sum H_{Bi} Q_{Bi}^2 - A \sum Q_{Bi}^2 - C \sum Q_{Bi}^4 = 0$$

La curva η . vs. Q_{Bi} puede ajustarse según la ecuación:

$$\eta_B = D Q_B + E Q_B^2 \quad (8.26)$$

También por el método de mínimos cuadrados.

$$S = \sum (\eta_{Bi} - D Q_{Bi} + E Q_{Bi}^2)^2$$

Se toman n puntos reales sobre la curva característica dada η . vs. Q , se sustituyen en la expresión anterior y se suman:

Derivamos con respecto a D y E , e igualamos a cero:

$$\frac{\partial S}{\partial D} = 0 ; \quad \frac{\partial S}{\partial E} = 0 ;$$

$$\sum \eta_{Bi} Q_{Bi} - D \sum Q_{Bi}^2 - E \sum Q_{Bi}^3 = 0 \quad (8.27)$$

$$\sum \eta_{Bi} Q_{Bi}^2 - D \sum Q_{Bi}^3 - E \sum Q_{Bi}^4 = 0$$

Una vez obtenidos los ajustes de las curvas características de la bombas, se obtienen las curvas del sistema acoplado para bombas iguales, ya sea en serie o e paralelo.

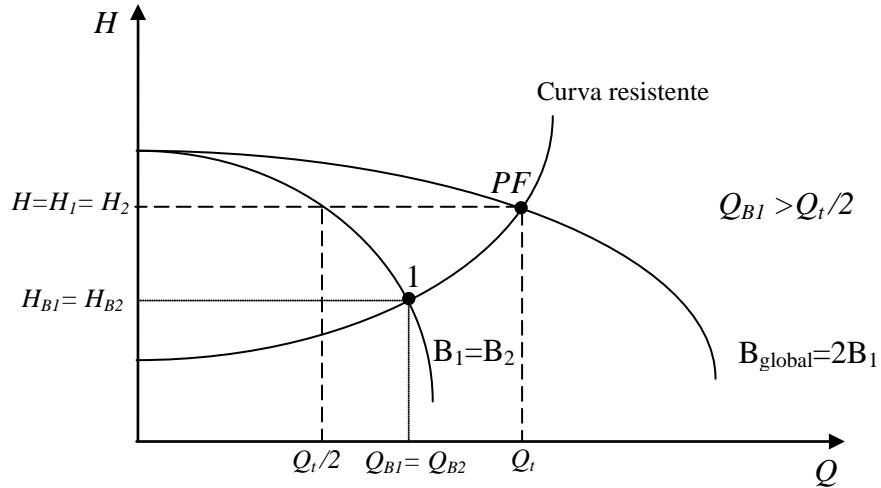


Figura 8.8. Dos bombas idénticas en paralelo

En la Figura 8.8, se muestran las curvas H vs. Q de la bomba B_1 , idéntica a la bomba B_2 , del conjunto acoplado de bombas, $B_{\text{global}}=2B_1$ y de la curva resistente. Obsérvese que el punto de funcionamiento ha pasado del punto 1, correspondiente a una bomba, individualmente, al punto de funcionamiento PF , correspondiente al conjunto acoplado de dos bombas idénticas en paralelo. Obsérvese también que el nuevo caudal que operará cada bomba individualmente trabajando en conjunto es $Q_t/2$, en el punto de funcionamiento PF , será menor que el caudal correspondiente al punto de funcionamiento 1 (Q_{B1} o Q_{B2}). Exceptuando una curva resistente horizontal (además, sin pérdida de carga en la impulsión), siempre se verificará que $Q_t/2 < Q_{B1}$, es decir, $2Q_{B1} > Q_t$, lo que significa que el caudal total impulsado por las dos bombas acopladas en paralelo es, casi siempre, menor que el doble del caudal que aportaría una sola bomba en la misma instalación.

Si se conoce la curva de la bomba B_1 , conocida también como curva motriz $H_{B1} = H(Q_{B1})$. En base a la figura 8.9, si se conectan en paralelo dos (curva motriz $2B_1$) y tres de estas bombas (curva motriz $3B_1$) se tiene:

Una bomba: Curva motriz B_1 ; dos bombas: Curva motriz $2B_1$; tres bombas: Curva motriz $3B_1$

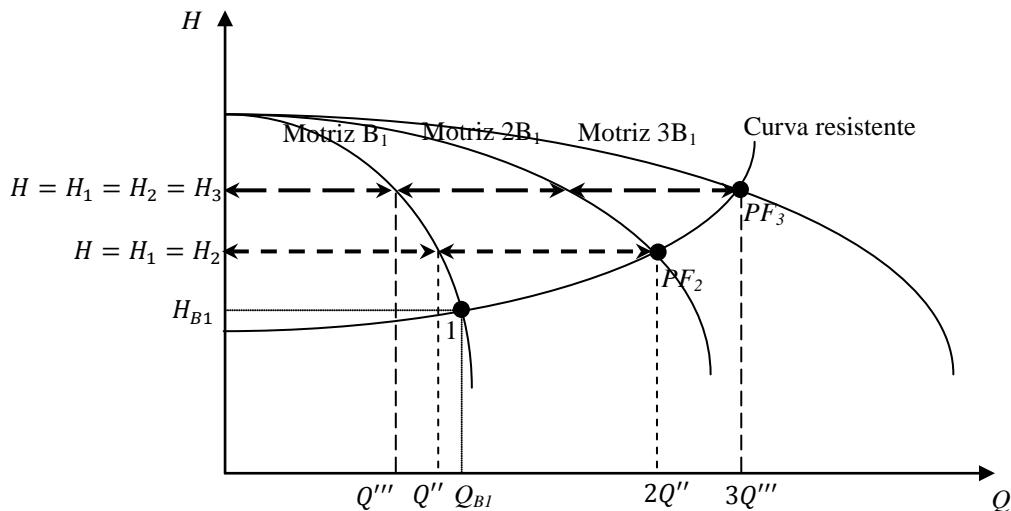


Figura 8.9. Tres bombas idénticas conectadas en paralelo

Donde la curva motriz $3B_1$ sería la *curva característica combinada* de las tres bombas conectadas en paralelo.

El caudal total para dos bombas en paralelo (curva motriz $2B_1$) sería $Q_t = 2Q''$.

El caudal total para las tres bombas en paralelo (curva motriz $3B_1$) sería $Q_t = 3Q'''$.

La ecuación para la curva motriz B_1 : $H_{B1} = A + BQ_{B1} + CQ_{B1}^2$

La ecuación para la curva motriz $2B_1$: $H = A + B \frac{Q_t}{2} + C \left(\frac{Q_t}{2} \right)^2$

La ecuación para la curva motriz $3B_1$: $H = A + B \frac{Q_t}{3} + C \left(\frac{Q_t}{3} \right)^2$

La intersección de la curva del sistema o curva resistente con las curvas motrices, permite obtener los puntos de funcionamiento.

8.3.2 Bombas diferentes acopladas en paralelo:

El tratamiento analítico de bombas acopladas en paralelo es más laborioso, si éstas son distintas. Para N bombas diferentes, las curvas características (ecuaciones H_B vs. Q_B) serían:

$$\begin{aligned} H_{B1} &= A_1 + B_1 Q_{B1} + C_1 Q_{B1}^2 & \eta &= D_1 Q_{B1} + E_1 Q_{B1}^2 \\ H_{B2} &= A_2 + B_2 Q_{B2} + C_2 Q_{B2}^2 & \eta &= D_2 Q_{B2} + E_2 Q_{B2}^2 \end{aligned}$$

$$H_{BN} = A_N + B_N Q_{BN} + C_N Q_{BN}^2 \quad \eta = D_N Q_{BN} + E_N Q_{BN}^2$$

En el acoplamiento de bombas diferentes, cada bomba maneja un caudal Q_i diferente y altura $H = H_i$, igual para todas, es decir, la altura total del conjunto de bombas es $H = H_1 = H_2 = \dots = H_N$. Con la altura conocida se obtendrán los caudales impulsados de cada bomba del sistema, despejando los caudales de las respectivas ecuaciones H_B vs. Q_B :

$$Q_1 = f_1(H_1); \quad Q_2 = f_2(H_2); \quad \dots; \quad \dots; \quad Q_N = f_N(H_N);$$

En general:

$$Q_i = \frac{-B_i \pm \sqrt{B_i^2 - 4C_i(A_i - H_i)}}{2C_i} \quad (8.28)$$

Luego se sustituyen en la ecuación de balance de masa para calcular el caudal total:

$$Q_t = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_N$$

O sea:

$$Q_t = f_1(H_1) + f_2(H_2) + \dots + f_N(H_N) \quad (8.29)$$

El tratamiento analítico de las eficiencias requiere el cálculo previo del punto de funcionamiento de cada bomba, individualmente, empleando sus respectivas curvas.

Supóngase, ahora, que se tienen dos bombas que se han de instalar acopladas en paralelo, descargando a una misma línea de impulsión simple. Supóngase, también, que, a la salida de cada bomba, existe una válvula de retención o anti retorno. Bajo estas consideraciones, se pueden presentar dos casos:

Caso 1: Las dos bombas tienen curvas características H vs. Q distintas, pero igual altura a válvula cerrada ($H_{B1} = H_{B2}$, para $Q = 0$)

En este caso, el problema se resuelve del mismo modo que en el caso de bombas idénticas, la curva característica del conjunto acoplado de bombas se obtiene sumando caudales correspondientes a iguales alturas suministradas por las dos bombas. Nuevamente, en este caso, el caudal total impulsado por el conjunto es menor que la suma de los caudales que respectivamente impulsarían las dos bombas, consideradas individualmente instaladas en el sistema.

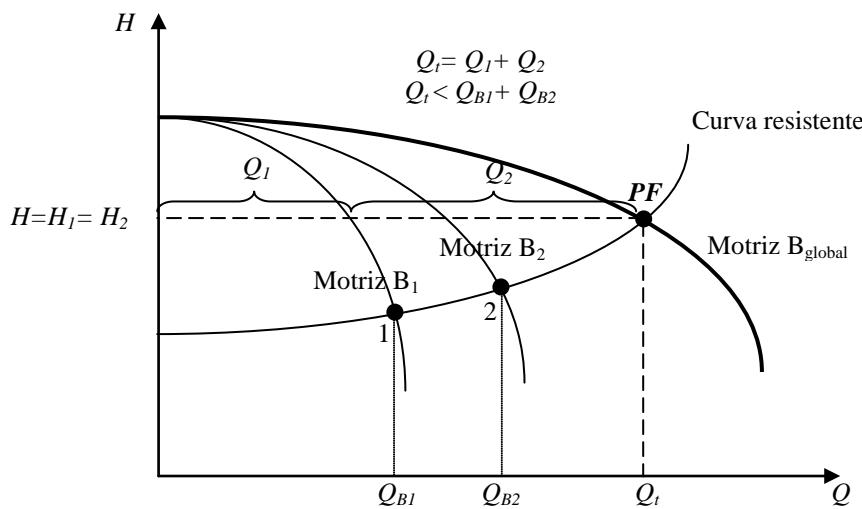


Figura 8.10. Dos bombas acopladas en paralelo con curvas características H vs. Q distintas, pero igual altura a válvula cerrada

Caso 2: Las dos bombas presentan curvas características absolutamente distintas

En este caso, la curva resultante presenta una porción común (tramo 1: T_1) con la curva de la bomba de mayor altura H , a válvula cerrada ($Q = 0$), como se muestra en la Figura 8.11. En dicho tramo, bajo ninguna circunstancia, se permitiría trabajar el conjunto acoplado, puesto que la bomba B_1 no puede operar en dicha zona y, en consecuencia, el acoplamiento en paralelo no tendría objeto. Ello es una razón poderosa para que, en la práctica, los acoplamientos de bombas en paralelo se hagan con bombas idénticas.

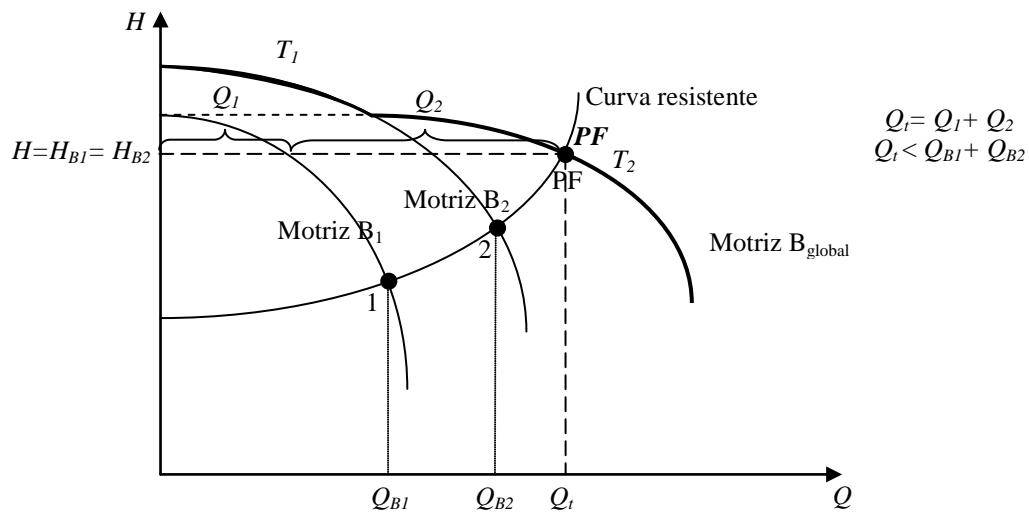


Figura 8.11. Dos bombas acopladas en paralelo con curvas características H vs. Q distintas

Se reitera que el análisis matemático de eficiencias y potencias de cada una de las bombas del grupo requiere del desglose del caudal total en los caudales parciales, Q_i , en función de las correspondientes alturas H_i . Una vez conocido el punto de funcionamiento del sistema, PF , y los caudales individuales, Q_1 y Q_2 , se recurre a las curvas de eficiencia y de potencia correspondientes a cada bomba.

$$H = A + BQ_t + CQ_t^2$$

Gráficamente, los valores de A , B y C se obtienen planteando un sistema de tres ecuaciones, (se toman tres puntos sobre la curva característica combinada de las bombas conectadas en paralelo), o usando el método de mínimos cuadrados.

Ejemplo 8.1

Se bombea agua entre dos depósitos a través de una tubería con las características siguientes $D=250\text{ mm}$, $L=45\text{ m}$, $f=0.027$, $\sum K=2.2$. La curva característica de la bomba de flujo radial se aproxima con la ecuación:

$$H_{B1} = 20.5 + 10.7Q_{B1} - 100Q_{B1}^2$$

Donde H esta en metros y Q está en $\frac{m^3}{s}$.

Determine la descarga Q y la carga de la bomba H para las siguientes situaciones:

- a) $z_2-z_1=15\text{ m}$, con una bomba funcionando.
- b) $z_2-z_1=15\text{ m}$, con dos bombas idénticas operando en paralelo.
- c) $z_2-z_1=25\text{ m}$.

a) Primero desarrollamos la curva de demanda del sistema

$$H = (z_2 - z_1) + \left(f \frac{L}{D} + \sum K\right) \frac{Q^2}{2gA^2}$$

$$H = 15 + \left(0.027 \frac{45}{0.25} + 2.2\right) \frac{Q^2}{2 \times 9.81 \left(\frac{\pi}{4} \times 0.25^2\right)^2}$$

$$H = 15 + 149.336Q^2$$

Para encontrar el punto de operación, igualamos la curva característica de la bomba y la curva de demanda del sistema.

$$15 + 149.336Q_{B1}^2 = 20.5 + 10.7Q_{B1} - 100Q_{B1}^2$$

Reducimos y despejamos Q así:

$$249.336Q_{B1}^2 - 10.7Q_{B1} - 5.5 = 0$$

$$Q_{B1} = \frac{10.7 \pm \sqrt{10.7^2 - 4 \times 249.336 \times (-5.5)}}{2 \times 249.336}$$

$$Q_{B1} = 0.1715 \text{ } m^3/\text{s}$$

Utilizamos la curva de demanda del sistema, calculamos H

$$H_{B1} = 15 + 149.336x(0.1715)^2$$

$$H_{B1} = 19.39 \text{ m}$$

b) Para dos bombas *iguales* en paralelo la curva característica es:

$$H = 20.5 + 10.7 \frac{Q_t}{2} - 100 \left(\frac{Q_t}{2}\right)^2$$

$$H = 20.5 + 5.35Q_t - 25Q_t^2$$

Igualamos las curvas y despejamos Q_t

$$15 + 149.336Q_t^2 = 20.5 + 5.35Q_t - 25Q_t^2$$

$$174.336Q_t^2 - 5.35Q_t - 5.5 = 0$$

$$Q_t = \frac{5.35 \pm \sqrt{5.35^2 - 4 \times 174.336 \times (-5.5)}}{2 \times 174.336}$$

$$Q_t = 0.1936 \text{ } m^3/\text{s}$$

$$Q_1 = Q_2 = \frac{Q_t}{2} = 0.0968 \text{ } m^3/\text{s} < Q_{B1}$$

Utilizando la curva de demanda del sistema calculamos H

$$H = 15 + 149.336x(0.1936)^2$$

$$H = 20.59 \text{ m}$$

- c) Ya que $z_2 - z_1$ es mayor que la carga de cierre para una sola bomba (es decir, $25 > 20.5\text{m}$) es necesario operar con dos bombas en serie.

La curva característica combinada para dos bombas iguales es:

$$H_t = 2x(20.5 + 10.7Q - 100Q^2)$$

$$H_t = 41 + 21.4Q - 200Q^2$$

La curva de demanda del sistema se modifica ya que $z_2 - z_1 = 25 \text{ m}$; se convierte en

$$H = 25 + 149.336Q^2$$

Igualamos las curvas características y despejamos Q

$$25 + 149.336Q^2 = 41 + 21.4Q - 200Q^2$$

$$349.336Q^2 - 21.4Q - 16 = 0$$

$$Q = \frac{21.4 \pm \sqrt{21.4^2 - 4 \times 349.336 \times (-16)}}{2 \times 349.336}$$

$$Q = 0.2468 \text{ m}^3/\text{s}$$

Sustituyendo en la curva del sistema:

$$H_t = 25 + 149.336x(0.2468)^2$$

$$H_t = 34.09 \text{ m}$$

$$H_1 = H_2 = \frac{H_t}{2} = 17.045 \text{ m}$$

Ejemplo 8.2

En un sistema de riego se instalan tres bombas iguales en paralelo, la curva motriz o curva característica de la bomba es la siguiente:

$$H_{B1} = 86 - 86.4Q_{B1}^2$$

Y la curva resistente es:

$$H = 48 + 3Q^2$$

Las unidades de las curvas en el sistema internacional.

Calcúlese los puntos de funcionamiento y las potencias mecánicas para:

- a) una sola bomba $\eta_{B1} = 0.79$,
- b) dos bombas $\eta_{2B1} = 0.82$
- c) tres bombas trabajando $\eta_{3B1} = 0.84$

- a) El punto de funcionamiento se obtiene interceptando la curva motriz con la curva resistente:

$$86 - 86.4Q_{B1}^2 = 48 + 3Q_{B1}$$

$$Q_{B1} = 0.65 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

Sustituyendo este caudal en cualquiera de las curvas motriz o resistente se obtiene la altura:

$$H_{B1} = 49.3 \text{ m}$$

$$\dot{W}_{mec} = \frac{\dot{W}_{hid}}{\eta_{B1}} = \frac{\gamma Q_{B1} H_{B1}}{\eta_{B1}} = \frac{998 \times 9.81 \times 0.65 \times 49.3}{0.79} = 397.13 \text{ KW}$$

- b) Con dos bombas en paralelo:

$$H = 86 - 86.4(\frac{Q_t}{2})^2 = 86 - 21.6Q_t^2$$

La intercepción de esta curva con la curva resistente da el punto de funcionamiento

$$86 - 21.6Q_t^2 = 48 + 3Q_t^2$$

$$Q_t = 1.24 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$H = H_1 = H_2 = 52.8 \text{ m}$$

$$\sum \dot{W}_{mec} = \frac{\dot{W}_{hid}}{\eta_{2B1}} = \frac{\gamma Q_t H}{\eta_{2B1}} = \frac{998 \times 9.81 \times 1.24 \times 52.8}{0.82} = 781.702 \text{ KW}$$

Cada motor de bomba tiene que proporcionar una potencia mecánica de 390.85 KW.

c) Con tres bombas en paralelo

$$H = 86 - 86.4(\frac{Q_t}{3})^2 = 86 - 9.6Q_t^2$$

La intercepción de esta curva con la curva resistente da el punto de funcionamiento

$$86 - 9.6Q_t^2 = 48 + 3Q_t^2$$

$$Q_t = 1.74 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$H = H_1 = H_2 = H_3 = 57 \text{ m}$$

$$\sum \dot{W}_{mec} = \frac{\dot{W}_{hid}}{\eta_{3B1}} = \frac{\gamma Q_t H}{\eta_{3B1}} = \frac{998 \times 9.81 \times 1.74 \times 57}{0.84} = 1155.96 \text{ KW}$$

Cada motor de bomba tiene que proporcionar una potencia mecánica de 385.32 KW.

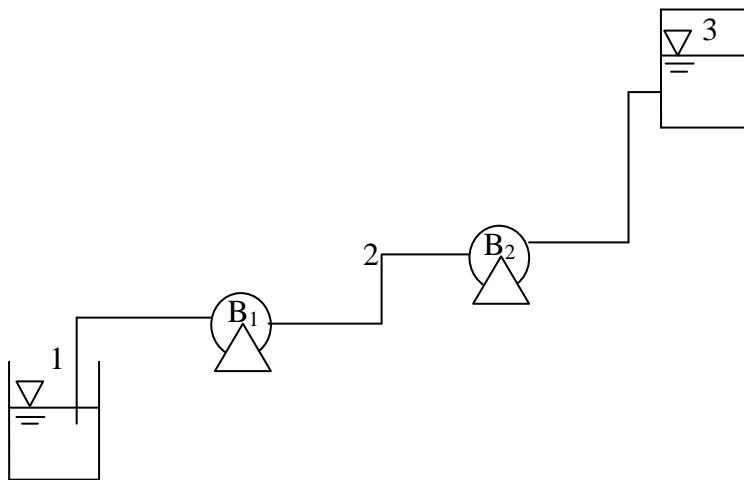
La potencia de los motores debe ser capaz de proporcionar la máxima potencia demandada, que es la potencia mecánica de una sola bomba funcionando en el sistema, caso a.

Ejemplo 8.3

Se tiene una instalación de bombeo que necesita una elevada altura manométrica y se ha decidido utilizar dos bombas iguales conectadas en serie. Las características de la línea se presentan a continuación:

Caudal: $30 \text{ m}^3/\text{h}$

Densidad: 1000 Kg/m^3



Sistema en serie de dos bombas iguales

Tubería de aspiración: $D = 4 \text{ pulg}$ y $h_f = 0.5 \text{ m}$

Tubería de descarga: $D = 3 \text{ pulg}$ y $h_f = 6 \text{ m}$

Presión de vapor 2337 Pa.

Punto 1: Altura 0 metros, presión 1 bar

Punto 2: Altura 4 metros

Punto 3: Altura 100 metros, presión 2,5 bar

Si las bombas giran a 3600 RPM, estimar:

-
- a) El valor de la carga total e individual de las bombas.
 b) Potencia mecánica si las bombas tienen una eficiencia global de 75% .
 c) Verificar si existen problemas de cavitación en las bombas.

a) Se aplicara Bernoulli entre los puntos 1 y 3:

$$\frac{P_1}{\gamma} + z_1 + \frac{V_1^2}{2g} + H_t - h_{f1-3} = \frac{P_3}{\gamma} + z_3 + \frac{V_3^2}{2g}$$

$$V_1 = V_3 \cong 0$$

Se Despeja H_t de la ecuación de Bernoulli.

$$H_t = \frac{P_3 - P_1}{\gamma} + (z_3 - z_1) + h_f$$

$$H_t = \frac{(2.5-1)*10^5}{9.81*1000} + (100 - 0) + 6.5 = 121.79m$$

Como son dos bombas iguales y están en serie:

$$H_1 = H_2 = \frac{H_t}{2} = 60.89 m$$

b) Potencias mecánicas

Para una sola bomba la potencia requerida sería:

$$\dot{W}_{hid} = \rho g Q_t H$$

La potencia mecánica de cada bomba será:

$$\dot{W}_{mec} = \frac{\dot{W}_{hid}}{\eta_B} = \frac{1000 \times 9.81 \times (30 \times \frac{1}{3600}) \times 60.89}{0.75} = \frac{4.978}{0.75} KW = 6.637 KW$$

La potencia mecánica total para el sistema planteado será:

$$\sum W_{mec} = 2W_{mec} = 2 \times 6.637 KW = 13.275 KW$$

Para la bomba B₁:

Bernoulli entre 1 y la succión de la bomba B₁

$$-h_{f1-s} = H + h_1$$

$$h_1 = -h_{f1-s} - H$$

$$NPSH = H + Ha - Hv$$

$$H = NPSH - Ha + Hv$$

Como **no se tiene la curva de NPSH** de la bomba, se puede usar el valor empírico de $S=2.95$ para calcular un valor de $NPSH$ con el que comienza la cavitación.

$$NPSH = \frac{1}{g} \left(\frac{\pi N Q^{1/2}}{30S} \right)^{4/3} = \frac{1}{9.81} \left(\frac{\pi \times 3600 \times 0.00833^{1/2}}{30 \times 2.95} \right)^{4/3} = 2.696 m$$

$$Ha = \frac{P_{atm}}{\gamma} = \frac{100000}{9.81 \times 1000} = 10,194 m$$

$$Hv = \frac{P_v}{\gamma} = \frac{2337}{9.81 \times 1000} = 0,238 m$$

$$H = 2.696 - 10,194 + 0,238 = -7,26 m$$

$$h_1 = -h_{f1-s} - H = -0.5 + 7.26 = 6.76 m$$

La bomba B1 está en aspiración y a una altura menor que 6.76 m, por lo tanto no cavitará, ya que la velocidad específica de succión será mucho menor que 2.95.

Para la bomba B2:

Bernoulli entre 1 y la succión de la bomba B₂

$$-h_{f1-s} + H_1 = H + h_2$$

Suponiendo el caso crítico donde $h_{f1-s} = 6 \text{ m}$

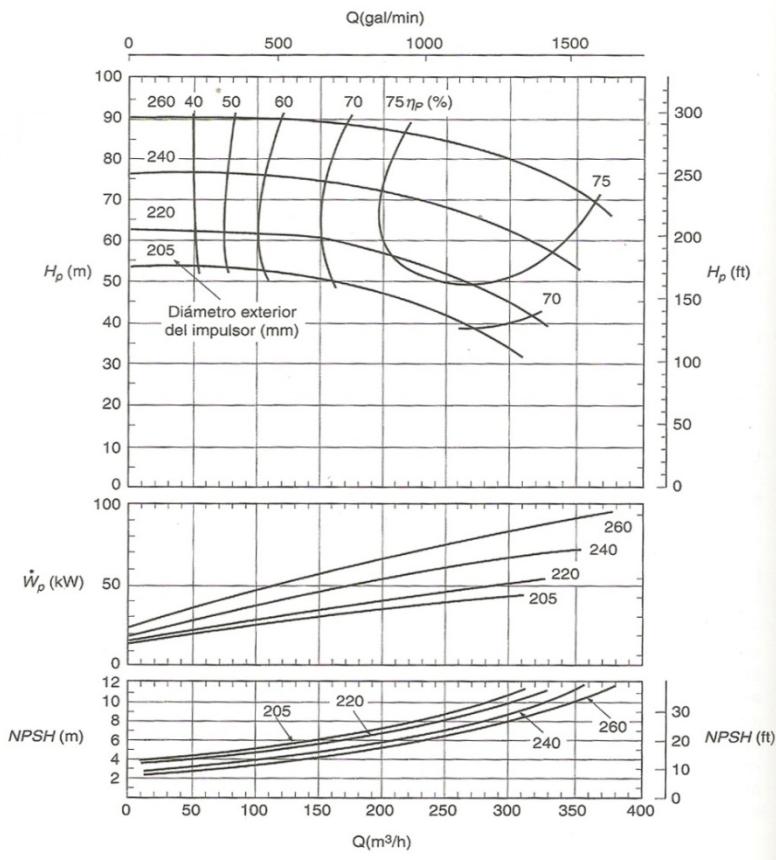
$$H = -h_{f1-s} + H_1 - h_2 = -6 + 60.89 - 4 = 50.89 \text{ m}$$

$$NPSH = H + Ha - Hv = 50.89 + 10.194 - 0.238 = 60.846 \text{ m}$$

$$S = \frac{\pi N Q^{1/2}}{30(gNPSH)^{3/4}} = \frac{\pi \times 3600 \times 0.00833^{1/2}}{30(9.81 \times 60.846)^{3/4}} = 0.28 < 2.95 \text{ No ocurre cavitación.}$$

Ejercicio 8.4

Se bombará petróleo crudo ($DR=0.86$, $\nu = 0.000019 \text{ m}^2/\text{s}$) a través de 5 Km de una tubería de hierro colado de 450 mm de diámetro. El aumento de altitud entre el extremo corriente arriba y el extremo corriente abajo es de 180 m. Si una bomba con la que se cuenta es la máquina de flujo radial de 240 mm de diámetro de la figura. ¿Cuántas bombas en serie se necesitan para lograr la operación más eficiente? calcule la potencia mecánica requerida.



Planteando Bernoulli

$$\frac{P_1}{\gamma} + z_1 + \frac{V_1^2}{2g} + H_t = \frac{P_2}{\gamma} + z_2 + \frac{V_2^2}{2g} + h_f$$

$$V_1 = V_2 = 0$$

$$P_1 = P_2 = P_{atm}$$

$$H_t = (z_2 - z_1) + h_f$$

$$h_f = f \frac{L V^2}{D 2g}$$

$$h_f = \frac{8fL}{g\pi^2 D^5} Q^2$$

Se selecciona del grafico el punto de mayor eficiencia.

$$\eta_{B1} = \eta_{NB1} = 0.80 \text{ con } N \text{ bombas iguales}$$

$$Q = 275 \text{ m}^3/\text{s} = 0.0764 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$H_{B1} = 65 \text{ m}$$

$$V = \frac{4x0.0764}{\pi x 0.45^2} = 0.48 \text{ m/s}$$

$$Re_D = \frac{0.48x0.45}{0.000019} = 11368.42$$

$$\frac{e}{D} = \frac{0.26}{450} = 0.00057$$

$$f = 0.03$$

$$h_f = \frac{8x0.03x5000}{9.81x\pi^2x0.45^5} 0.0764^2 = 3.92 \text{ m}$$

$$H_t = 180 + 3.92 = 183.92 \text{ m}$$

Para saber la cantidad de bombas en serie necesarias se divide la altura de bombeo obtenida por la ecuación de Bernoulli entre la altura de bombeo perteneciente al punto de mayor eficiencia de la bomba seleccionada de la figura 6.

$$\frac{H_t}{H_{B1}} = \frac{183.92}{65} = 2.83 \quad \text{Es necesario instalar tres bombas en serie para operar de forma eficiente.}$$

La potencia mecánica requerida es:

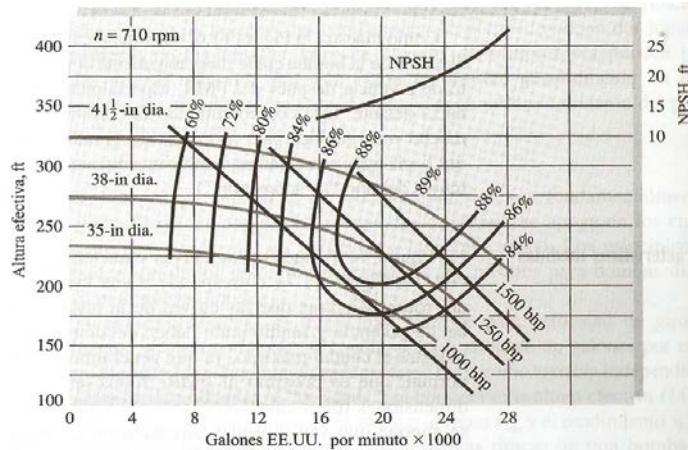
$$H_t = 3x65 = 195 \text{ m}$$

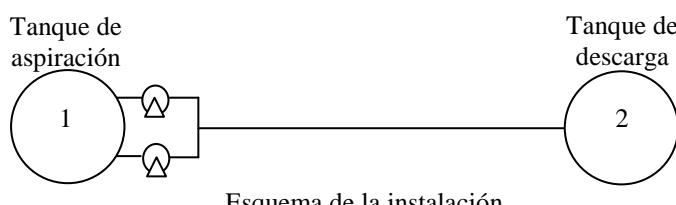
$$\eta_{3B1} = \frac{\rho g H_t Q}{\Sigma W_{mec}}$$

$$\Sigma W_{mec} = \frac{860x9.81x195x0.0764}{0.8} = 157.111 \text{ KW}$$

Ejercicio 8.5

Las dos bombas de 35 pulg de la figura están combinadas en paralelo para mover agua a 60°F a través de 1550 pies de conducto horizontal. Si la $f=0.025$, ¿Cuál es el diámetro del conducto que asegure un caudal de 35000 gal/min? ¿Cuál es la eficiencia del sistema en paralelo?





$$Q_t = 35000 \frac{\text{gal}}{\text{min}} = 78 \frac{\text{pie}^3}{\text{s}}$$

Aplicando Bernoulli tenemos:

$$\frac{P_1}{\gamma} + z_1 + \frac{V_1^2}{2g} + H - h_{f1-2} = \frac{P_2}{\gamma} + z_2 + \frac{V_2^2}{2g}$$

$$P_1 = P_2 = 0$$

$$V_1 = V_2 = 0$$

Como la tubería es horizontal $\Delta z = 0$

$$H = h_{f1-2}$$

Dejando la ecuación de pérdidas en función del caudal se tiene:

$$h_f = \frac{8fL}{g\pi^2 D^5} Q_t^2$$

$$H = \frac{8x0,025x1550}{32,2x\pi^2xD^5} 78^2$$

$$H = \frac{5934.65}{D^5}$$

Sabemos que cuando se tiene un sistema de bombeo en paralelo

$$Q_t = Q_1 + Q_2$$

Como las bombas son iguales:

$$Q_t = 2Q$$

Por lo tanto el caudal que impulsa cada bomba será:

$$Q = Q_1 = Q_2 = \frac{Q_t}{2}$$

Entonces para el caudal que exige el ejercicio se tiene:

$$Q = \frac{35000 \text{ gal/min}}{2} = 17500 \frac{\text{gal}}{\text{min}} = 39 \frac{\text{pie}^3}{\text{s}}$$

Evaluando un caudal de $17500 \frac{\text{gal}}{\text{min}}$ en la curva de la bomba de 35 pulg. Se tiene una altura aproximada de $H = 199 \text{ pies}$

Teniendo el valor de carga se calcula el diámetro requerido para que el ducto cumpla con las especificaciones dadas.

$$H = \frac{5934.65}{D^5}$$

$$D = \left(\frac{5934.65}{199} \right)^{1/5} = 1,97 \text{ pies}$$

El diámetro para que el ducto cumpla con las especificaciones dadas tiene que ser $D=1,97 \text{ pies}$.

Para calcular la eficiencia del sistema de dos bombas iguales en paralelo, ajustamos la curva de eficiencia de la bomba de 35 pulg según la siguiente ecuación:

$$\eta_B = DQ_B + EQ_B^2$$

Luego la curva de eficiencia del sistema será:

$$\eta_{NB} = D \left(\frac{Q_t}{N} \right) + E \left(\frac{Q_t}{N} \right)^2$$

Con $N=2$, y se calcula la eficiencia del sistema.

Tomando 8 puntos de eficiencia versus caudal para la bomba de 35 pulgadas se tiene:

$Q_{Bi}(x10^3)$	$\frac{gal}{min}$	η_{Bi}	$\eta_{Bi}Q_{Bi}$	$\eta_{Bi}Q_{Bi}^2$	Q_{Bi}^2	Q_{Bi}^3	Q_{Bi}^4
6.5	60	390	2535	42.25	274.625	1785.0625	
9	72	648	5832	81	729	6561	
11.5	80	920	10580	132.25	1520.875	17490.0625	
13.5	84	1134	15309	182.25	2460.375	33215.0625	
16	86	1376	22016	256	4096	65536	
17.5	87	1522.5	26643.75	306.25	5359.375	93789.0625	
20.5	86	1763	36141.5	420.25	8615.125	176610.0625	
22	84	1848	40656	484	10648	234256	
Σ		9601.50	159713.25	1904.25	33703.375	629242.3125	

$$9601.50 - Dx1904.25 - Ex33703.375 = 0$$

$$159713.25 - Dx33703.375 - Ex629242.3125 = 0$$

$$D = 10.5716; \quad E = -0.312418$$

$$\eta_B = 10.5716Q_B - 0.312418Q_B^2$$

Curva de eficiencia del sistema en paralelo:

$$\eta_{2B} = 10.5716 \left(\frac{Q_t}{2} \right) - 0.312418 \left(\frac{Q_t}{2} \right)^2$$

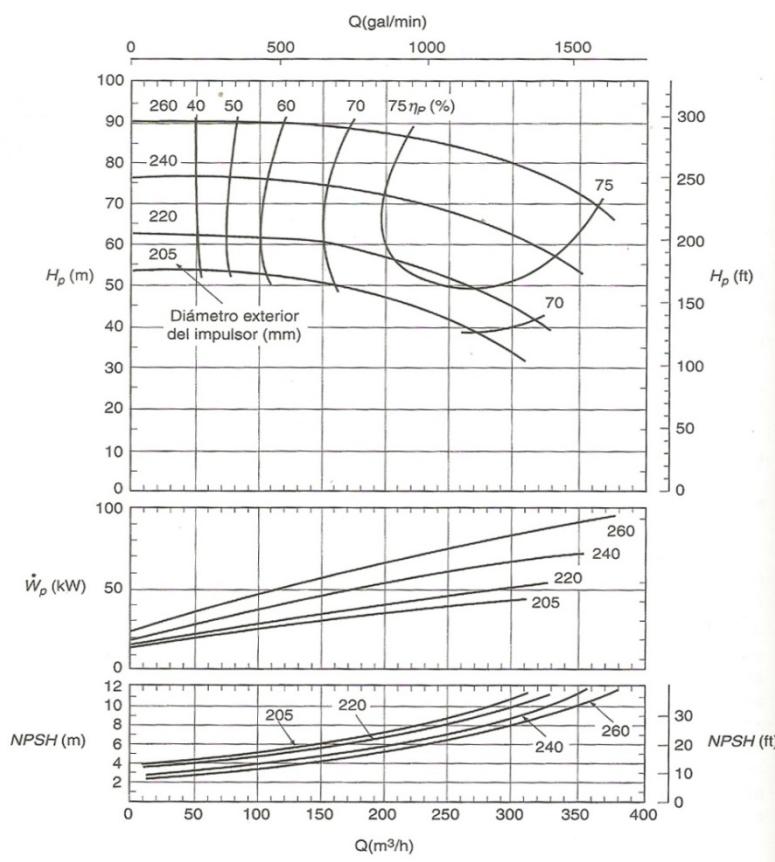
$$\eta_{2B} = 5.2858Q_t - 0.0781Q_t^2$$

Con $Q_t = 35 (x10^3) gal/min$

$$\eta_{2B} = 89.33 \%$$

8.4. Problemas

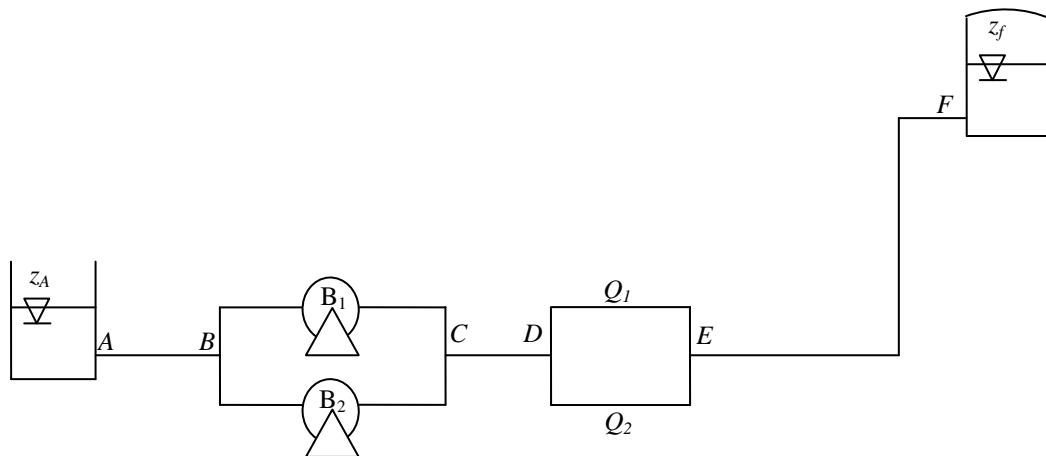
8.1 La bomba de 240 mm de diámetro que se presenta en la figura, se usa para bombear agua en un sistema de tuberías cuya curva de demanda es $H = 50 + 250Q^2$, donde Q esta en m^3/s . Calcule el caudal de descarga, el aporte de potencia requerido y la $NPSH$ requerida para dos bombas en paralelo.



8.2 Se bombeará petróleo crudo ($DR=0.86$ a $20^\circ C$) a través de 3 millas de una tubería de hierro colado de 20 pulg. de diámetro. El aumento de altitud entre el extremo corriente arriba y el extremo corriente abajo es de 700 pies. Si una bomba con la que se cuenta es la máquina de flujo radial de 205 mm de diámetro de la figura del problema 1, ¿cuántas bombas en serie se necesitan para lograr la operación más eficiente? Calcule la potencia mecánica requerida.

8.3 Una bomba funcionando en una determinada instalación proporciona $25 l/s$ a 45 m de altura manométrica. Los valores de diseño de la bomba que se indican en su placa son: $Q = 20 l/s$, $H = 48 m$, $N = 1450 RPM$. A continuación se instala una bomba igual a la anterior y en serie proporcionando en la misma instalación $37 l/s$ a 56 m de altura manométrica. Se pide calcular las expresiones analíticas de las curvas características de la bomba, de la instalación en serie y de la curva resistente.

8.4 Dado el sistema representado en la figura, determine el punto de funcionamiento de las bombas. Deben despreciarse las pérdidas secundarias.



Datos

$$H = 100 + 50Q_t - 150Q_t^2$$

$$z_A = 130 \text{ m}, z_f = 200 \text{ m}$$

$$\varepsilon = 0.00016 \text{ m}$$

$$v = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$L_{AB} = 25 \text{ m} \quad D_{AB} = 0.3 \text{ m}$$

$$L_{BC} = 0$$

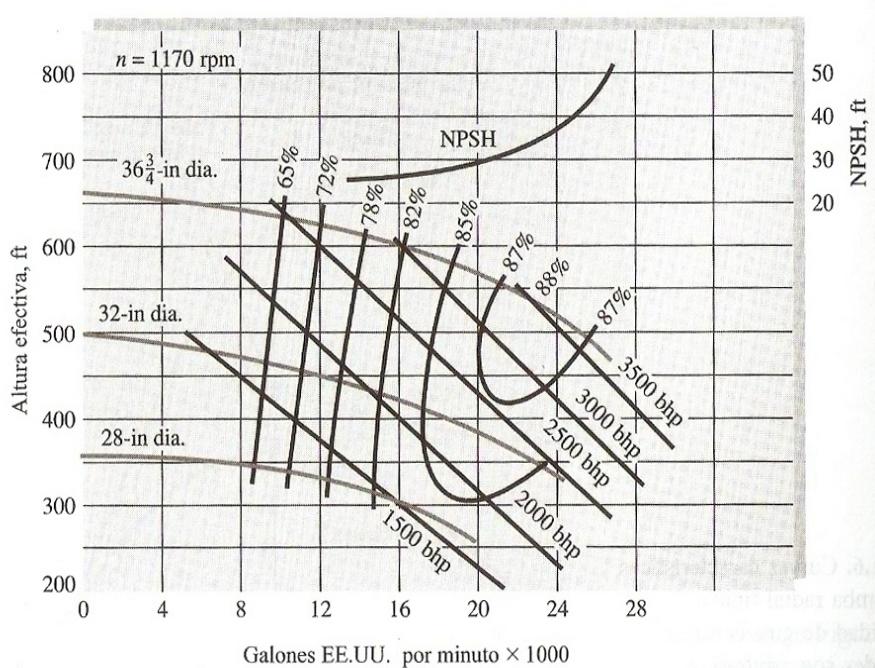
$$L_{CD} = 150 \text{ m} \quad D_{CD} = 0.3 \text{ m}$$

$$L_1 = 70 \text{ m} \quad D_1 = 0.25 \text{ m}$$

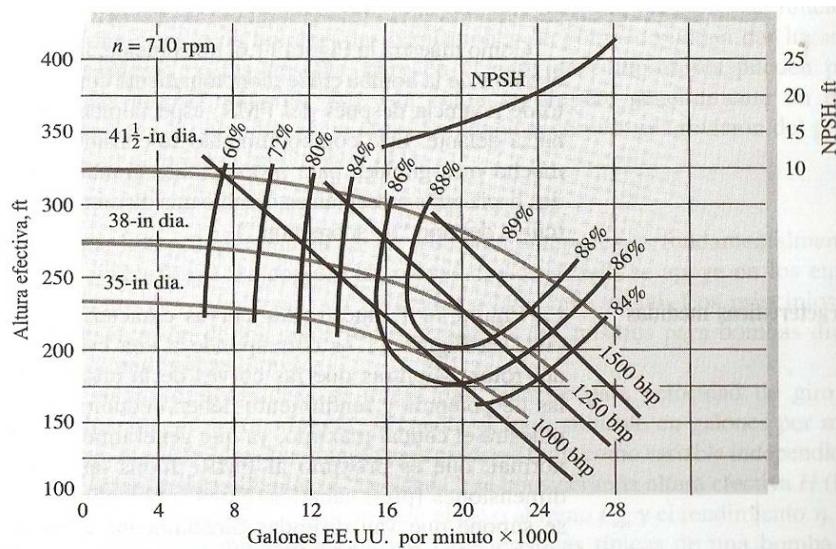
$$L_2 = 50 \text{ m} \quad D_2 = 0.25 \text{ m}$$

$$L_{EF} = 270 \text{ m} \quad D_{EF} = 0.3 \text{ m}$$

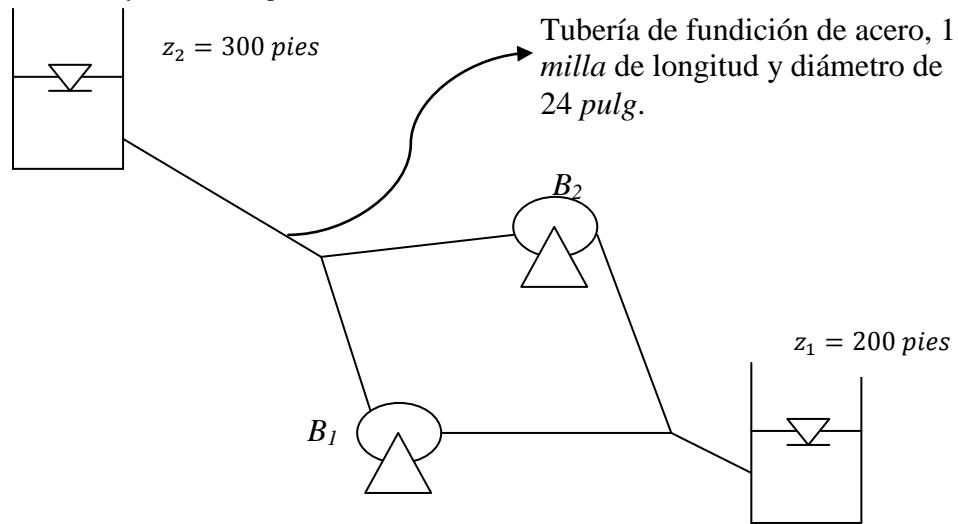
8.5 La bomba de 28 pulg. de la figura, se emplea a 1170 RPM en un sistema cuya curva de carga es $H(\text{pies}) = 100 + 1.5Q_t^2$, con Q_t en miles de galones de agua por minuto. Encuentre el caudal suministrado y la potencia mecánica requerida para: Una bomba, dos bombas en paralelo, y dos bombas en serie. ¿Cuál es la mejor configuración?



8.6 Las dos bombas de 38 pulg. de la figura, están combinadas en paralelo para mover agua a $60^{\circ}F$ a través de 1300 pies de conducto horizontal. Si la $f=0,021$, ¿Cuál es el diámetro del conducto que asegure un caudal de 45000 gal/min para $N=710$?



8.7 Las dos bombas de 35 pulg. de la figura del problema 6, están instaladas en paralelo en el sistema que se muestra, despreciando las otras pérdidas para agua a $20^{\circ}C$ estime el caudal y la potencia requerida si a) ambas bombas están funcionando y b) una bomba está funcionando y la otra esta parada.



8.8 La bomba de 32 pulg, de la figura del problema 5, se emplea a 1170 RPM en un sistema cuya curva de carga es $H(\text{pies}) = 100 + 1.5Q_t^2$, con Q en miles de galones de agua por minuto. Encuentre el caudal suministrado y la potencia en el eje requerida para a) una bomba, b) dos bombas en paralelo, c) dos bombas en serie y d) una bomba esta parada y la otra funcionando.

8.9 Dos bombas de 32 pulg. de la figura del problema 5, van a ser colocadas en serie a 1170 RPM para subir agua mediante un conducto vertical de 500 pies de hierro fundido. ¿Cuál debería ser el diámetro del conducto para el funcionamiento más eficiente? Desprecie las pérdidas menores.

Bibliografía

- Alarcón, Gabriel. Turbomáquinas. Publicaciones de La Facultad de Ingeniería. Universidad de Los Andes. Mérida, Venezuela. Sf.
- Fox, Robert y MacDonald, Alan. Introducción a la mecánica de fluidos. Cuarta edición. McGraw-Hill. México, 1997.
- White, Frank M. Mecánica de Fluidos. Quinta edición. McGraw-Hill. España, 2004.
- Potter, Merle y Wiggert, David. Mecánica de Fluidos. Tercera edición. THOMSON. México, 2003.
- Polo Encinas, Manuel. Turbomáquinas Hidráulicas, Principios Fundamentales. Editorial LIMUSA. México, 1976.
- Yunus A. Cengel. Termodinámica 6ta Edición. McGraw-Hill. México, 1997.
- McNaughton Kenneth. Bombas, selección, uso y mantenimiento. Primera edición. McGraw-Hill. México, 1989.
- Japikse, David y Baines Nicholas C. Introduction to turbomachinery. Second Edition. Edwards Brothers Incorporated. USA, 1997.
- Sayers, A. T. Hydraulic and compressible flow turbo machines. 1ra edition. McGraw-Hill. England, 1990.
- Fuchslocher-Schulz. Bombas, funcionamiento, cálculo y construcción. Décima edición. Editorial Labor S.A. España, 1964.

Referencias Electrónicas vía internet:

- Marbello Pérez Ramiro V. Funcionamiento de bombas rotodinámicas. Facultad de Minas. Universidad Nacional de Colombia. Medellín.
- Agüera Soriano José. Bombas Hidráulicas.
- Bumeram.com. Especialista de validación 2013. Extraído el 28/04/2013 desde
- <http://www.bumeran.com.ve/empleos/especialista-de-validacion-ii-1000850942.html>