HIDROSTÁTICA

Estática de fluidos

En muchos problemas de la mecánica de fluidos no existe movimiento, y sólo se estudia la distribución de presiones en un fluido en reposo y sus efectos sobre los objetos sumergidos o en flotación. Cuando la velocidad de un fluido es nula, se denomina condición hidrostática, las variaciones de presión se deben al peso y conocidas las características de un fluido, resulta sencillo calcular la distribución de presiones en presencia de un campo gravitatorio dado. Aplicaciones: distribución de presiones en la atmosfera y el océano. El diseño de instrumentos para medir presión, o manómetros, fuerzas de flotabilidad que actúan sobre cuerpos sumergidos, el comportamiento de los cuerpos en flotación (principios de Arquímedes).

Un fluido se mueve como un sólido rígido, como en el caso de un depósito de líquido que ha estado en rotación durante el tiempo suficiente o un recipiente con aceleración en donde el fluido se mueve como sólido rígido, es decir, sin movimiento relativo entre partículas con capas del fluido contenido en el recipiente, la distribución de presiones se calcula fácilmente ante la ausencia de esfuerzos cortantes.

HIDROSTÁTICA

Estática de fluidos

T
E
M
A

2

La presión se define como una fuerza por unidad de superficie. Se define como una fuerza normal ejercida por un fluido por unidad de área. La contraparte de la presión en los sólidos es el esfuerzo normal y se habla de presión sólo cuando se trata de un gas o un líquido. Según la definición, en el sistema internacional tiene unidades de newtons por metro cuadrado (N/m^2), la cual se llama pascal (Pa); es decir, 1 Pa= 1 N/m^2. Son de uso común sus múltiplos kilopascal (1 KPa=10^3 Pa) y el megapascal (1 MPa= 10^6 Pa). En Europa se usa el bar, la atmósfera estándar y el kilogramo fuerza por centímetro al cuadrado:

1 bar =10^5 Pa.

1 atm =101,325 KPa=1,01325 bars.

1 Kgf/cm^2 = 9,087x10^4 Pa=0,9807 bar=0,9679 atm

$$P = \frac{W}{A}$$

Ecuación fundamental de la hidrostática

TEMA 2 HIDROSTÁTICA

Es una expresión que permite determinar el campo de presiones dentro de un fluido en reposo.

Fuerzas Superficiales

Debida a la presión, ya que no soporta fuerzas cortantes. La fuerza resultante en la dirección x sobre el elemento vendrá dada por:

$$dFx = Pdydz - \left(P + \frac{\partial P}{\partial x}dx\right)dydz = -\frac{\partial P}{\partial x}dxdydz$$

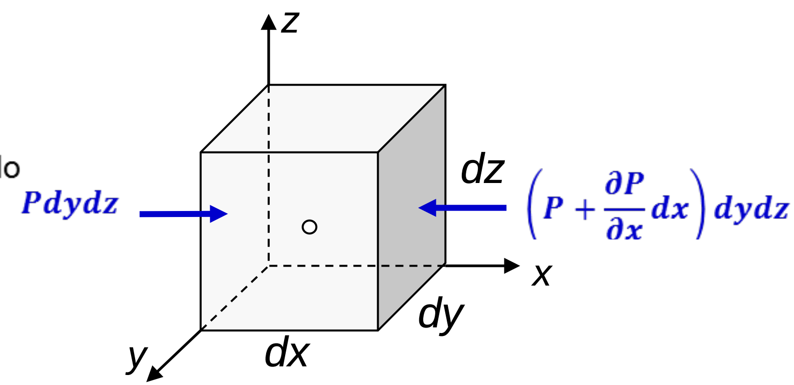
De la misma manera la fuerza resultante dFy depende de $-\frac{\partial P}{\partial y}dxdydz$

El vector fuerza resultante sobre el elemento debido a la presión, es

$$dF_{Pres} = \left(-\frac{\partial P}{\partial x}i - \frac{\partial P}{\partial y}j - \frac{\partial P}{\partial z}k\right)dxdydz$$

Tomando f_{pres} como resultante por unidad de volumen, se reescribe la ecuación como:

$f_{pres} = -\nabla P$ Así, no es la presión sino el gradiente de presión el causante de la fuerza que debe ser equilibrada por la gravedad, la aceleración u otro efecto en el fluido



Elemento diferencial (*dm*) de masa del fluido de lados *dx*, *dy*, *dz*.

Fuerzas Volumétricas

Debida a la gravedad o peso propio:

$$d\vec{F}_B = \vec{g}dm = \vec{g}\rho d\forall = \rho\vec{g}\,dx\,dy\,dz$$

La fuerza de gravedad por unidad de volumen

$$f_{grav} = \rho\vec{g}$$

Ecuación fundamental de la hidrostática

En general puede haber también una fuerza de superficie debida al gradiente, si existe, de los esfuerzos viscosos, por unidad de volumen se tiene $f_{EV} = \mu\nabla^2 V$, donde el subíndice EV significa esfuerzos viscosos y μ es el coeficiente de viscosidad absoluta

El término $\vec{g}$ es el vector aceleración de la gravedad, que es un vector que actúa hacia el centro de la Tierra. Con z en esta dirección $\vec{g} = gk$. Su módulo en la superficie de la Tierra, tiene un valor medio de 9,807 m/s^2.

Sin considerar el término viscoso, la fuerza total en el elemento será entonces:

$$\sum d\vec{F} = d\vec{F}_B + d\vec{F}_S = \left(\rho\vec{g} - \nabla P\right) dx\, dy\, dz$$

Expresada por unidad de volumen:

$$\sum \frac{d\vec{F}}{d\forall} = \sum f = f_{grav} + f_{pres} = \left(\rho\vec{g} - \nabla P\right)$$

Aplicando la segunda Ley de Newton se tiene:

$$\sum d\vec{F} = \vec{a}\rho d\forall \quad \Leftrightarrow \quad \sum f = \vec{a}\rho$$

Igualando las dos ecuaciones se obtiene la ecuación para la distribución de presiones

$$\rho\vec{g} - \nabla P = \rho a \Rightarrow \nabla P = \rho\left(\vec{g} - a\right)$$

Ecuación fundamental de la hidrostática

En hidrostática se estudiarán dos casos:

*Flujo en reposo o a velocidad constante: la aceleración desaparece y la presión depende solo de la densidad y la gravedad. Es la condición hidrostática,

*Traslación y rotación como sólido rígido: la presión depende de la aceleración de la densidad y la gravedad.

CONDICIÓN HIDROSTÁTICA:

Como se trata de una ecuación vectorial, esta se puede expresar en términos de sus componentes:

$$\rho g_x - \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad \textbf{en dirección} \quad x; \qquad \rho g_y - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad \textbf{en dirección} \quad y$$

$$\rho g_z - \frac{\partial P}{\partial z} = 0 \quad \textbf{en dirección} \quad z$$

Escogiendo un sistema de coordenadas tal que la dirección de la gravedad coincida con uno de los ejes (*z* por ejemplo):

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0; \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = 0; \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \quad \Longrightarrow \quad dP = -\rho g dz$$

Ecuación Fundamental de la Hidrostática

Esta ecuación es válida bajo las condiciones siguientes:

- **Fluido en reposo**
- **La única fuerza volumétrica es la gravedad**
- **Eje *z* vertical hacia arriba**

Si se considera que el fluido es incompresible, lo cual se puede suponer para muchos casos prácticos, entonces se puede integrar esta expresión entre el nivel de referencia z_1 al cual corresponde una P_1 y un nivel z_2 al cual corresponde una presión P_2:

$$\int_{P_1}^{P_2} dP = -\int_{z_1}^{z_2} \rho g dz$$

Si ρ y g son constantes:

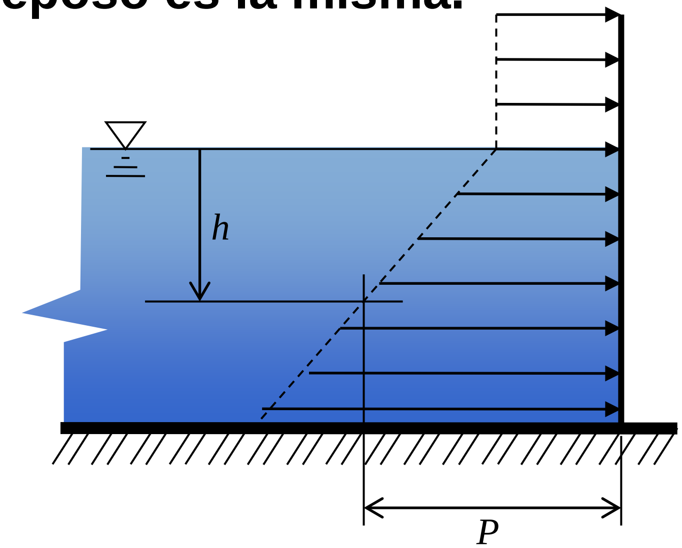
$$P_2 - P_1 = -\rho g\left(z_2 - z_1\right)$$

Si $h = (z - z_0)$, siendo h positiva de arriba hacia abajo:

$$P = P_0 + \rho g h$$

Propiedades de la presión en un fluido

- La presión en un fluido en reposo es igual en todas las direcciones (principio de Pascal)
- La presión en todos los puntos situados en un mismo plano horizontal en el seno de un fluido en reposo es la misma.
- La estática de los fluidos ideales no se diferencia de la estática de los fluidos reales.
- La fuerza de presión en un fluido en reposo es siempre a compresión y jamás a tracción
- La superficie libre de un líquido en reposo es siempre horizontal.



Presión atmosférica

Es la presión ejercida por el peso de la atmósfera sobre la superficie terrestre.

Se ha aceptado internacionalmente a la atmósfera estándar a nivel del mar (altitud 0 m) como:

$$T = 288\ ºK$$
$$P = 101.3\ KPa$$

En Mérida la presión es del orden de 85 KPa (alrededor de la facultad de Ingeniería), pero varía en función de la zona de la ciudad debido a los cambios de altitud y condiciones climáticas.

REFERENCIAS DE PRESIÓN

Las presiones de pueden medir como

Absolutas

La presión absoluta es la medida de la presión referida al cero absoluto (vacío total o ausencia total de materia)

Relativas

Las presiones relativas son las presiones referidas a otra presión. La presión de referencia más utilizada es la presión atmosférica. Se tiene así diversas denominaciones de presión como:

Presión manométrica: es la presión referida a la presión atmosférica

Presión de vacío: es la presión referida a la presión atmosférica pero por debajo de ella

Presión diferencial: es la diferencia entre dos presiones cualesquiera

Presión atmosférica: es la presión ejercida por el peso de la atmósfera sobre la tierra. A nivel del mar es aproximadamente 760 mm de Hg , 14.7 psia o 100 KPa. En Merida que se encuentra a aproximadamente 1600 msnm es aproximadamente 85 KPa.

Presión barométrica es la medida de la presión atmosférica la cual varía levemente con las condiciones climáticas.

Gráficamente, podemos observar:

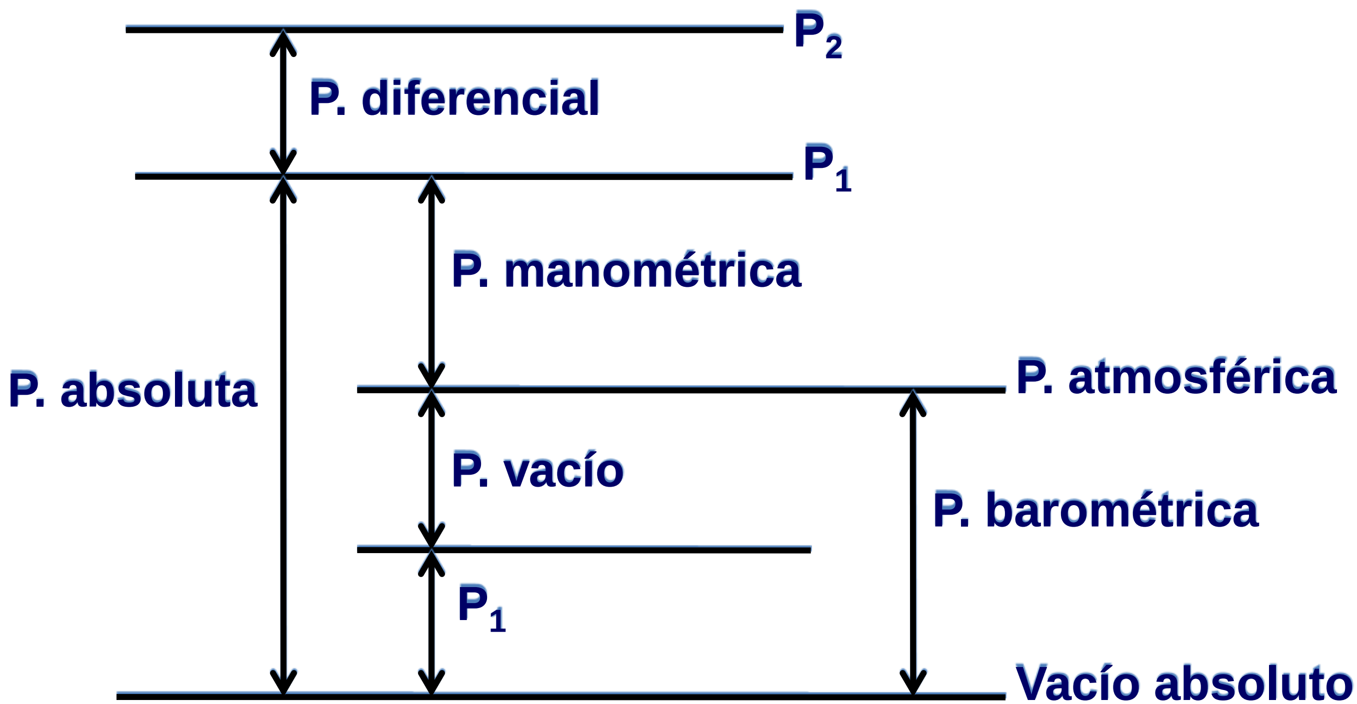


Ilustración de las lecturas de presión absoluta, manométrica y de vacío

TEMA 2 HIDROSTÁTICA

Unidades de presión

Las unidades de presión expresan una unidad de fuerza sobre unidad de área. Las más usadas son Kgf/cm^2, psi ($lbf/pulg^2$), Pascal (N/m^2), bar, atmósfera, Torr (mm de columna de Hg).

	psi	Pa	Kg/cm^2	Bar	Atmósfera	Torr	Cm H_2O	Pulg H_2O	Pulg Hg
psi	1	6896.5	0.0703	0.0689	0.0680	51.715	70.31	27.68	2.036
Pa	0.000145	1	0.00001019	0.00001	0.00000987	0.0075	0.01	0.0039	0.00029
Kg/cm^2	14.22	98067	1	0.9807	0.9678	735.58	1000	393.7	28.96
Bar	14.50	100000	1.019	1	0.9869	750.062	1024	401.46	29.53
Atmósfera	14.70	101325	1.0332	1.01325	1	760	1033	406.78	29.92
Torr	0.01934	133.32	0.001359	0.00133	0.001316	1	1.359	0.5352	0.0394
Cm H_2O	0.0142	100	0.0010	0.0009	0.00096	0.7356	1	0.3937	0.0289
Pulg H_2O	0.0361	254.6	0.00254	0.00249	0.00246	1.8683	2.540	1	0.07355
Pulg Hg	0.4912	3386	0.0345	0.0333	0.0334	25.40	34.53	13.6	1

Presión Hidrostática en gases

Los gases son fluidos compresibles cuya densidad es casi proporcional a la presión y debe ser considerada variable si la integración de la ecucion diferencial de la hidrostática supone granfes cambios de presión. Pueden obtenerse resultados bastante precisos utilizando la ley de los gases perfectos $P = \rho RT$

$\frac{dP}{dz} = -\rho g = -\frac{P}{RT} g$ Separando variables e integrando

$\int_1^2 \frac{dP}{P} = ln\frac{P_2}{P_1} = -\frac{g}{R}\int_1^2 \frac{dz}{T}$ La integración respecto a z requiere conocer la variación de la temperatura con la altura $T(z)$. Una aproximación común es la atmosfera isoterma, con $T = T_0$

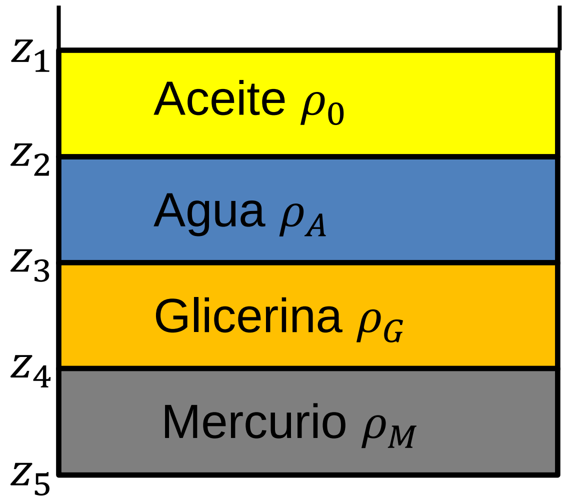
$P_2 = P_1 e^{-\frac{g(z_2-z_1)}{RT_0}}$ es una buena aproximación para alturas pequeñas en la atmosfera terrestre.

Realmente la temperatura en la atmosfera disminuye casi linealmente con z hasta una altura de 11000 m (36000 pies), parte inferior de la atmosfera denominada tropósfera, según la ecuación: $T = T_0 - Bz$ donde B es el gradiente térmico y T_0 la temperatura absoluta a nivel del mar y pueden variar de un día a otro. Se consideraran los valores estándar para aire: $B = 0{,}00650\frac{K}{m} = 0{,}003566\frac{{}^oR}{pie}$ y $T_0 = 518{,}69\ {}^oR = 288{,}16\ K$. Usando la variación lineal de la temperatura en la ecuación diferencial para la condición hidrostática se obtiene una relación más precisa

$$P = Pa\left(1 - \frac{Bz}{T_0}\right)^{g/(RB)} \ donde\ \frac{g}{RB} = 5{,}26\ para\ el\ aire$$

Aplicación a la medida de presiones

La ecuación $P_2 - P_1 = -\rho g(z_2 - z_1)$ vemos que la variación de altura $(z_2 - z_1)$ corresponde a una variación de presión $\frac{(P_2 - P_1)}{\rho g}$. Por ello, para medir diferencias de presión entre dos puntos, se pueden utilizar columnas estáticas de uno o más líquidos o gases. Uns instrumento de este tipo se denomina manómetro.



$$P_2 - P_1 = -\rho_0 g(z_2 - z_1)$$

$$P_3 - P_2 = -\rho_A g(z_3 - z_2)$$

$$P_4 - P_3 = -\rho_G g(z_4 - z_3)$$

$$P_5 - P_4 = -\rho_M g(z_5 - z_4)$$

Suma

$$P_5 - P_1 = -\rho_0 g(z_2 - z_1) - \rho_A g(z_3 - z_2) - \rho_G g(z_4 - z_3) - \rho_M g(z_5 - z_4)$$

Regla Mnemotécnica: arriba frente abajo

$$P_{abajo} = P^{arriba} + \rho g|\Delta z|$$

Aplicada al ejemplo anterior:

$$P_5 = P_1 + \rho_0 g|z_2 - z_1| + \rho_A g|z_3 - z_2 g| + \rho_G g|z_4 - z_3| + \rho_M g|z_5 - z_4|$$

FUERZAS HIDROSTÁTICAS SOBRE SUPERFICIES SUMERGIDAS

El diseño de estructuras de contención requiere el cálculo de las fuerzas hidrostáticas sobre las superficies adyacentes al fluido debido al peso del fluido sobre las superficies que lo contienen. La fuerza sobre una superficie sumergida se compone de:

1. La magnitud de la fuerza.
2. La dirección de la fuerza.
3. La línea de acción de la fuerza

Fuerzas hidrostáticas sobre superficies planas sumergidas

Si la superficie del depósito es horizontal de área A_b conteniendo una altura H de líquido, la superficie soportará una fuerza vertical hacia abajo en la base igual a $\boldsymbol{F_B = \rho g H A_b}$. Si la superficie no es horizontal se requerirán cálculos adicionales para determinar las componentes de la fuerza hidrostática. La ecuación $P_2 - P_1 = -\rho g(z_2 - z_1)$ nos dice que la presión sobre cualquier superficie sumergida varía linealmente con la profundidad. El problema hidrostático se reduce a ecuaciones simples que atañen al centroide o centro de gravedad y a los momentos de inercia de la sección plana,

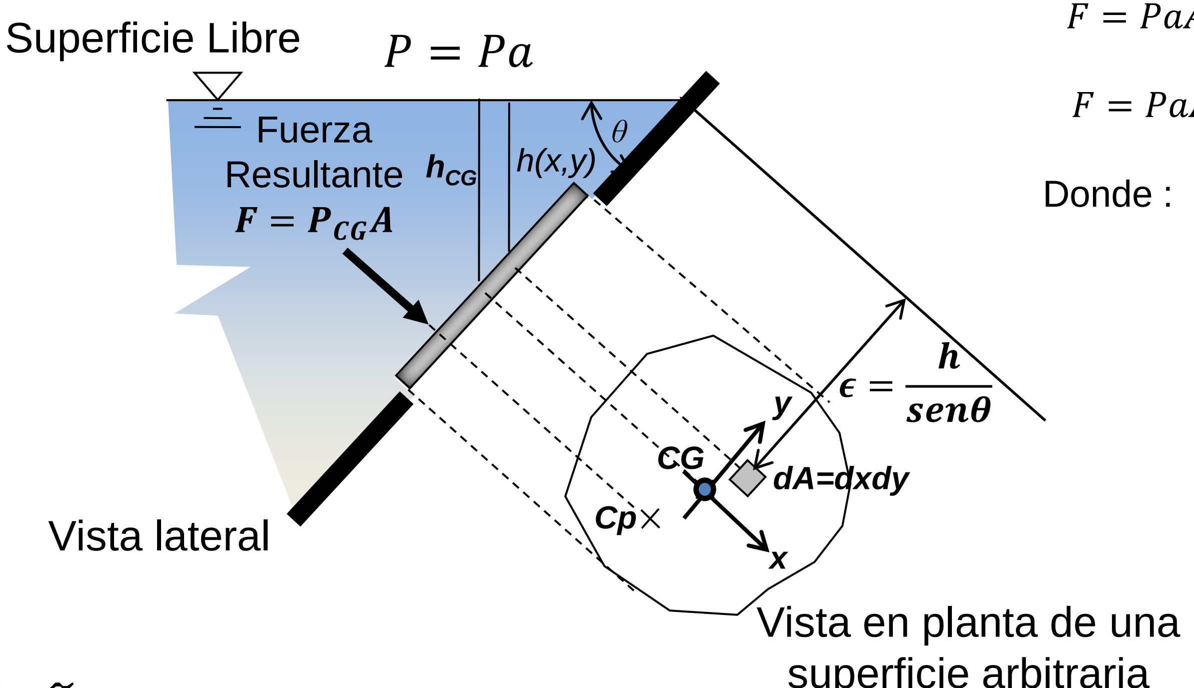
Se desea determinar la fuerza sobre la superficie superior de la figura mostrada a continuación que está bajo la presión de un líquido mientras que por el otro lado no tiene presión aplicada.

Fuerzas hidrostáticas sobre superficies planas sumergidas

La figura muestra una placa plana de forma arbitraria sumergida completamente en un líquido. La placa forma un ángulo θ con la horizontal y su profundidad varia de un punto a otro. Si h es la profundidad de un elemento diferencial de área dA, la presión sobre el elemento será $P = Pa + \rho g h$. Para deducir expresiones que tengan en cuenta la forma de la placa se toma un sistema de coordenadas xy sobre el plano de la placa, ubicado particularmente su origen en el centroide de la placa. La fuerza hidrostática total sobre una cara de la placa será

$F = \int PdA = \int (Pa + \rho g h)dA = PaA + \rho g \int hdA \quad con \quad h = \epsilon\, sen\theta$ en términos del sistema coordenado xy: $\epsilon = \epsilon_{CG} - y$

$$F = PaA + \rho g sen\theta \int \epsilon_{CG} dA - \rho g sen\theta \int ydA. \quad \text{El término} \quad \int ydA = 0$$



$$F = PaA + \rho g sen\theta \int \epsilon_{CG} dA$$

$$F = PaA + \rho g h_{CG} A = P_{CG} A$$

Donde : $\quad h_{CG} = \epsilon_{CG} sen\theta$

T E M A 2

H I D R O S T Á T I C A

El punto de aplicación de la fuerza debe ser tal que el momento de dicha fuerza con respecto a cualquier eje resulte igual al momento de la fuerza distribuida respecto al mismo eje. Si llamamos a las coordenadas del punto de aplicación de la fuerza resultante a *x_{CP}*, *y_{CP}*.

y_{CP} se puede obtener igualando momentos alrededor del eje *x*, siendo este horizontal:

$$Fy_{CP} = \int yPdA = \int y(Pa + \rho g\epsilon sen\theta)$$

Con $\epsilon = \epsilon_{CG} - y$ $\quad Fy_{CP} = \rho gsen\theta\left(\epsilon_{CG}\int ydA - \int y^2 dA\right) = -\rho gsen\theta I_{xx}$

Con $\int ydA = 0$

$$y_{CP} = -\frac{\rho gsen\theta \bar{I}_{xx}}{P_{CG}A}$$

El signo negativo muestra que y_{CP} está por debajo del centro de gravedad a una profundidad mayor y. A profundidades mayores y_{CP} se acerca al centro de gravedad, ya que P_{CG} aumenta.

TEMA 2 HIDROSTÁTICA

El momento de inercia del área *A* respecto a los ejes centroidales

$$\bar{I}_{xx} = \int_A y^2 dA$$

El momento de inercia respecto a otro sistema de referencia no centroidal se puede determinar a partir del momento de inercia respecto a los ejes centroidales con la ayuda del teorema de transferencia de ejes paralelos:

$$I_x = \bar{I}_{xx} + A\bar{y}^2$$

x_{CP} **se puede obtener igualando momentos alrededor del eje *y*:**

$$Fx_{CP} = \int xPdA \;= \int x[Pa + \rho g(\epsilon_{CG} - y)sen\theta dA]$$

$$= -\rho g sen\theta \int xydA = -\rho g sen\theta \bar{I}_{xy}$$

Donde $\bar{I}_{xy}$ es el producto de inercia de la placa, calculado en el plano de la placa con respecto a ejes que pasan por el centroide

$$x_{CP} = \frac{-\rho g sen\theta \bar{I}_{xy}}{P_{CG}A}$$

cuando $\bar{I}_{xy}$ es positivo x_{CP} es negativo porque la fuerza de presión actúa en el tercer cuadrante, o inferior izquierdo de la placa. Si $\bar{I}_{xy} = 0$, implica simetría, $x_{CP} = 0$ y el centro de presiones está inmediatamente debajo del centroide, sobre el eje y.

TEMA 2 HIDROSTÁTICA

Utilizando el teorema de transferencia para el producto de inercia

$$I_{xy} = \bar{I}_{xy} + A\overline{xy}$$

En muchos casos la presión ambiente Pa se desprecia porque actúa en ambos lados de la placa. Por ejemplo cuando el otro lado de placa es la cara interior del casco de un barco o la cara seca de una compuerta o presa. En este caso $P_{CG} = \rho g h_{CG}$ y el centro de presiones resulta independiente del peso específico del fluido

En resumen

1. **La magnitud de la fuerza esta dada por la ecuación:**

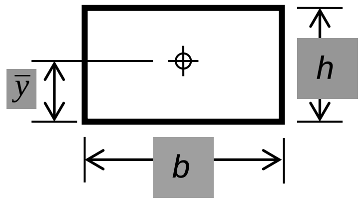
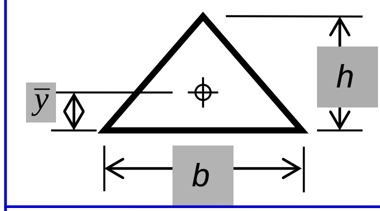
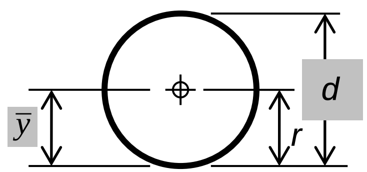
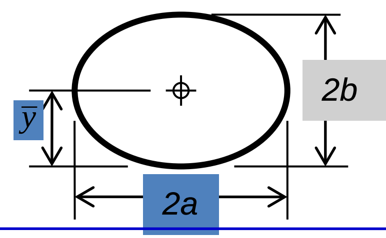
$$F = \gamma\, h_{CG} A$$

2. **La dirección de la fuerza es perpendicular a la superficie.**
3. **La línea de acción de la fuerza resultante pasa a través del punto (x_{CP}, y_{CP}), medidos respecto a los ejes que pasan por el centroide de la placa cuyas coordenadas se obtienen con las expresiones:**

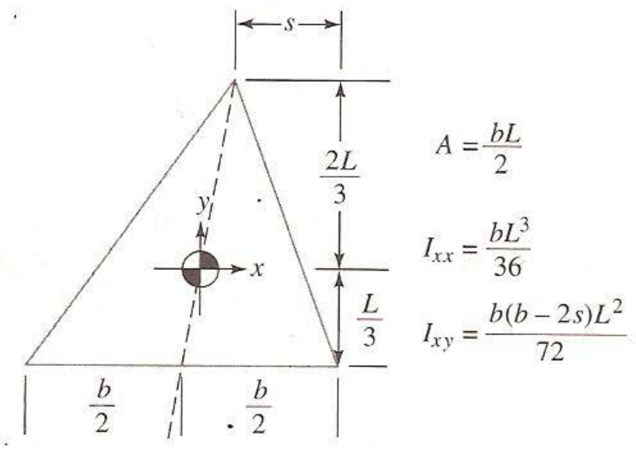
$$x_{CP} = \frac{-\bar{I}_{xy} sen\theta}{h_{CG}\ A}; \qquad y_{CP} = \frac{-\bar{I}_{xx} sen\theta}{h_{CG}\ A}$$

TEMA 2 HIDROSTÁTICA

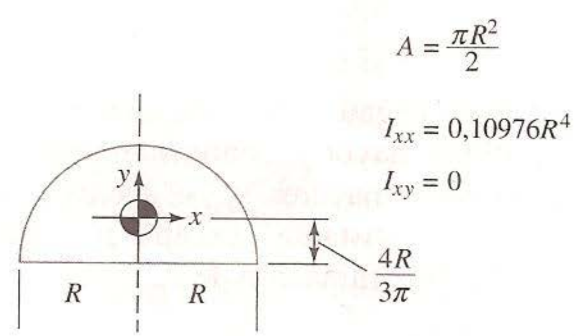
Propiedades de superficies planas

Figura	Centroide	Área	Momento de Inercia
	$\bar{y} = \frac{h}{2}$	$A = bh$	$\bar{I} = \frac{bh^3}{12}$
	$\bar{y} = \frac{h}{3}$	$A = \frac{bh}{2}$	$\bar{I} = \frac{bh^3}{36}$
	$\bar{y} = r$	$A = \frac{\pi d^2}{4}$	$\bar{I} = \frac{\pi d^4}{64}$
	$\bar{y} = b$	$A = \pi ab$	$\bar{I} = \frac{\pi ab^3}{4}$

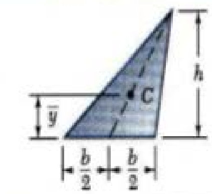
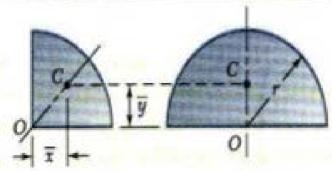
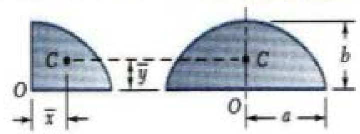
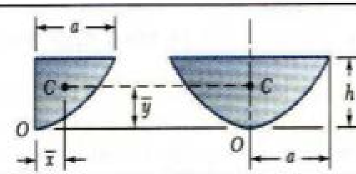
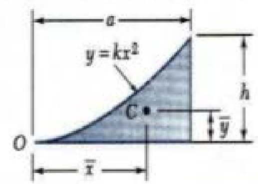
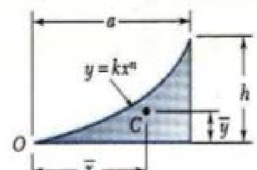
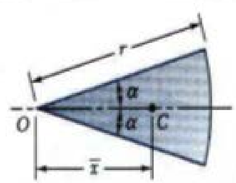
Propiedades de superficies planas



(c)



(d)

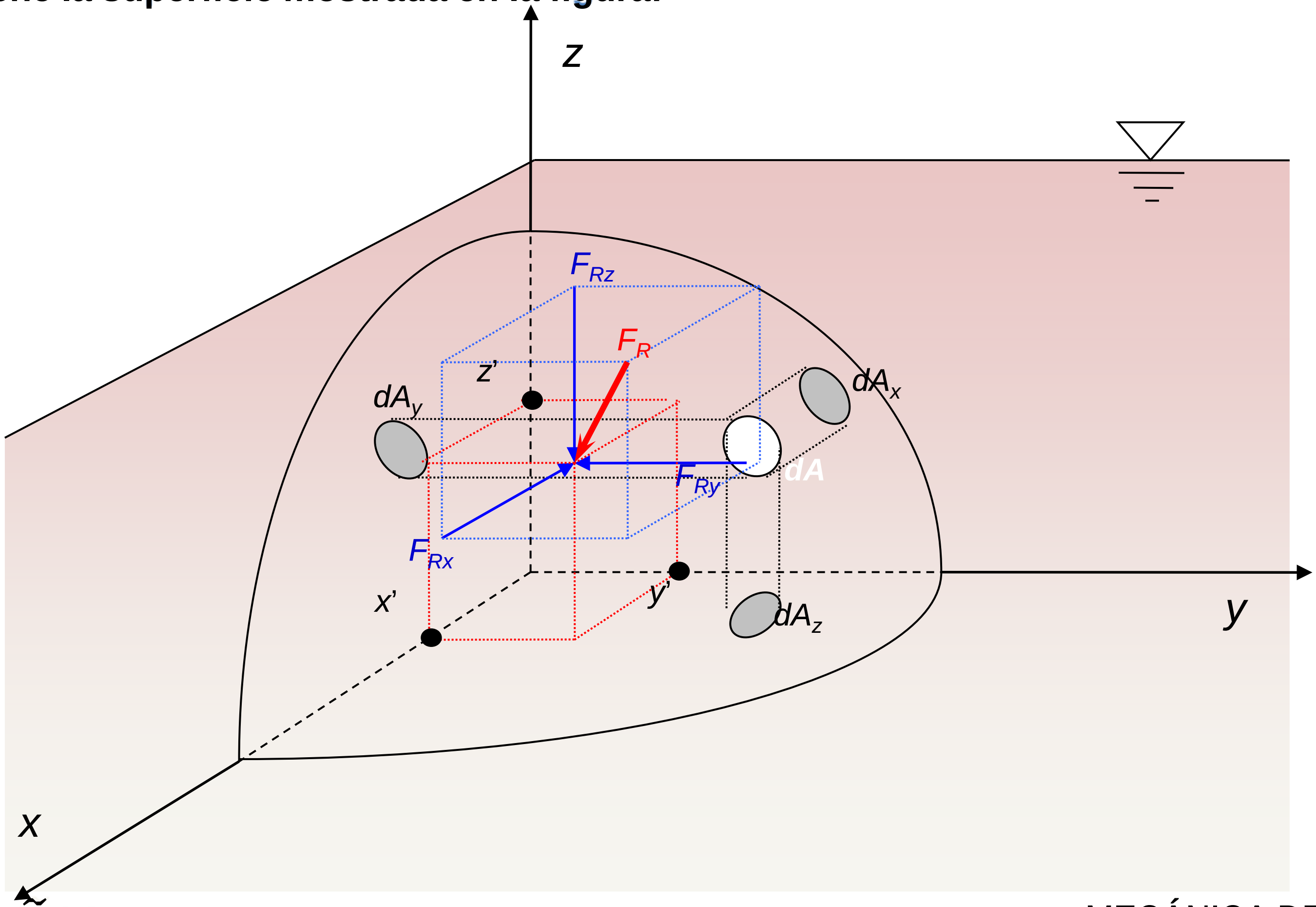
Shape		$\bar{x}$	$\bar{y}$	Area
Triangular area			$\frac{h}{3}$	$\frac{bh}{2}$
Quarter-circular area		$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{4}$
Semicircular area		0	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{2}$
Quarter-elliptical area		$\frac{4a}{3\pi}$	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{4}$
Semielliptical area		0	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{2}$
Semiparabolic area		$\frac{3a}{8}$	$\frac{3h}{5}$	$\frac{2ah}{3}$
Parabolic area		0	$\frac{3h}{5}$	$\frac{4ah}{3}$
Parabolic spandrel		$\frac{3a}{4}$	$\frac{3h}{10}$	$\frac{ah}{3}$
General spandrel		$\frac{n+1}{n+2}a$	$\frac{n+1}{4n+2}h$	$\frac{ah}{n+1}$
Circular sector		$\frac{2r \sin \alpha}{3\alpha}$	0	αr^2

Fuerzas Hidrostáticas Sobre Superficies Curvas Sumergidas

La diferencia básica en el cálculo de la fuerza que actúa sobre una superficie curva respecto de una plana radica en el hecho de ser dF perpendicular en todo momento a la superficie, entonces cada diferencial de fuerza tiene una dirección diferente.

Para simplificar la operación de totalización solo debemos sumar los componentes de los vectores fuerza, referidos a un eje de coordenadas adecuado. Por lo tanto en este caso debemos aplicar 3 veces, como máximo, la ecuación para la superficie.

Si se tiene la superficie mostrada en la figura:



T E M A 2 H I D R O S T Á T I C A

La fuerza de presión en este caso esta dada por:

$$dF = PdA$$

La fuerza resultante se determina sumando las contribuciones de cada elemento diferencial:

$$F = \int_A PdA$$

Esta fuerza resultante se puede descomponer en componentes:

$$F = F_x i + F_y j + F_z k$$

Donde ***i, j, k*** son los vectores unitarios de las direcciones ***x, y, z*** respectivamente.

Se pueden diferenciar dos casos:

- Las componentes horizontales de la fuerza de presión sobre una superficie curva es igual a la suma vectorial de las fuerzas de presión ejercidas sobre la proyección de la superficie curva en los planos verticales.
- La componente vertical de la fuerza de presión sobre una superficie curva es igual al peso del líquido que se encuentra verticalmente por encima de dicha superficie hasta la superficie libre.
- Esto ya que si analizamos la expresión para la fuerza vertical y tomando en cuenta que

$P = \gamma h$ obtenemos lo siguiente: $F_z = \int_A P\cos\theta_z dA = \gamma \int_A h\cos\theta_z dA = \gamma \int_{\forall} d\forall$

Cada una de estas componentes de fuerza se puede expresar como:

$$F_{Rx} = \int_A P\cos\theta_x dA = \int_A P dA_x$$

$$F_{Ry} = \int_A P\cos\theta_y dA = \int_A P dA_y$$

$$F_{Rz} = \int_A P\cos\theta_z dA = \int_A P dA_z$$

$\theta_x,\ \theta_y$ **y** θ_z $\left\{\right.$ **son los ángulos entre** dA **y los vectores unitarios** i, j **y** k **respectivamente**

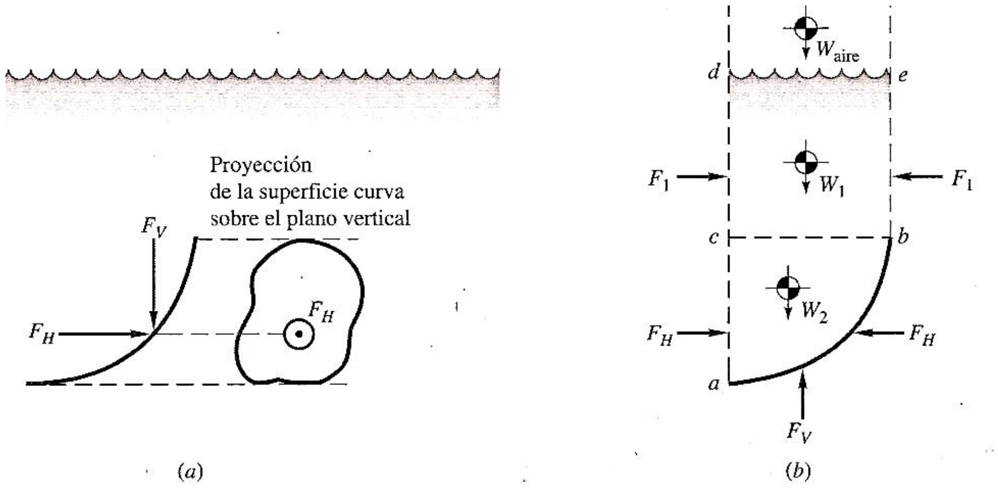
Por lo tanto dAx, dAy **y** dAz **son las proyecciones del elemento** dA **sobre los planos perpendiculares a los ejes** x, y **y** z **respectivamente.**

Fuerzas hidrostáticas sobre superficies curvas sumergidas

La figura (b) muestra el diagrama de cuerpo libre de la columna de fluido contenida en la proyección vertical hacia arriba de la superficie curva, Las fuerzas F_H y F_V son las ejercidas por la columna de fluido sobre la superficie. Se muestran también las fuerzas debidas al peso y a la presión que actúa sobre las paredes verticales. La columna de fluido debe estar en equilibrio estático. En la parte superior de la columna, bcde, las componentes horizontales se equilibran. En la parte inferior, la componente F_H la región irregular de fluido abc próxima a la superficie, el equilibrio de fuerzas muestra que F_H, fuerza que ejerce la superficie curva sobre el fluido debe ser igual a la fuerza F_H que actúa en la pared vertical izquierda. Esta última puede calcularse con las expresiones conocidas para superficies planas aplicadas a la proyección sobre un plano vertical de la superficie curva considerada. La siguiente regla general simplifica el análisis.
La componente horizontal de la fuerza ejercida sobre una superficie curva es igual a la fuerza ejercida sobre el área plana formada por la proyección de aquélla sobre un plano vertical normal a dicha componente. Si existen dos componentes horizontales, ambas pueden calcularse utilizando este procedimiento. La sume de fuerzas verticales muestra que:

$$F_V = W_1 + W_2 + W_{aire}$$

La componente vertical de las fuerzas de presión que actúan sobre una superficie curva es igual en magnitud y dirección al peso de la columna de fluido. Líquido y aire atmosférico que hay encima de dicha superficie. Entonces el cálculo de F_V es poco más que encontrar el centro de gravedad de la columna de fluido y quizas una integración si la región inferior abc es compleja.

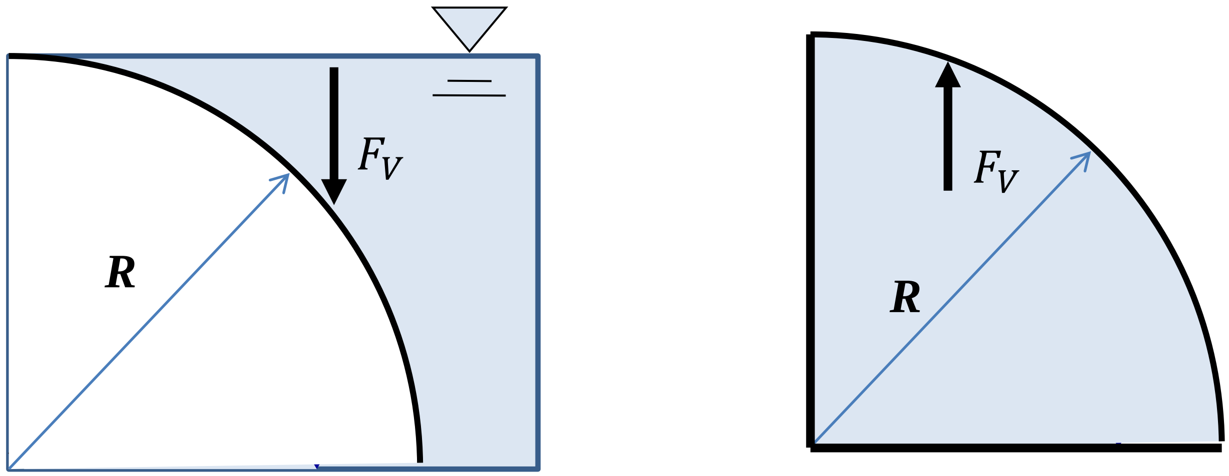


Caso de superficie con curvatura en dos dimensiones

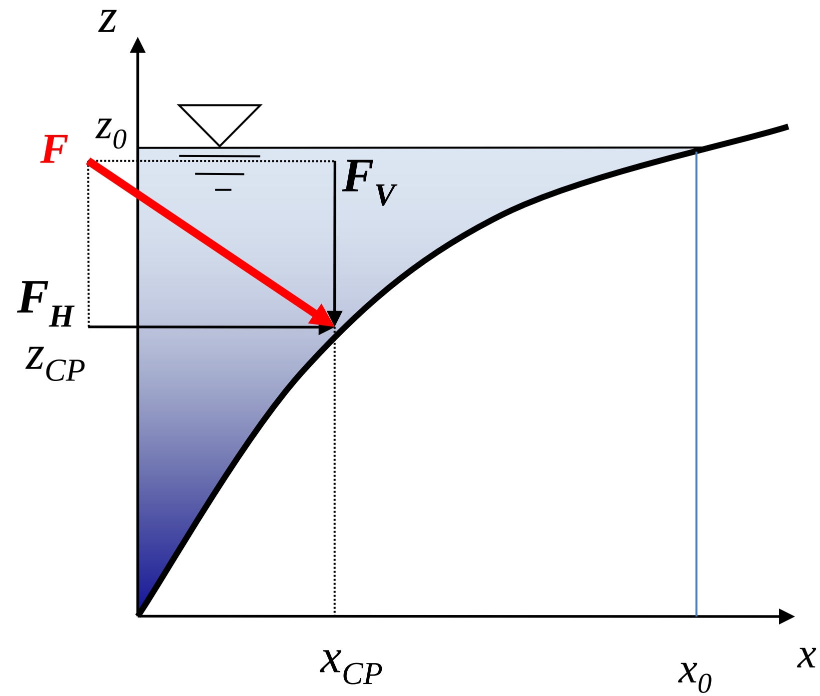
Para las dos figuras la magnitud de la fuerza vertical tiene la misma dirección y magnitud pero sentidos diferentes:

$F_V = \rho g \left(R^2 - \frac{\pi R^2}{4}\right) W$ es el peso de la columna de líquido sobre la superficie curva

$F_H = \rho g \frac{R}{2} R W = \frac{1}{2} \rho g R^2 W$ la fuerza horizontal es la fuerza que actúa sobre la proyección de la superficie curva en un plano vertical de área RW



Para comprender mejor el problema lo vamos a simplificar al caso de una superficie curva en dos dimensiones.



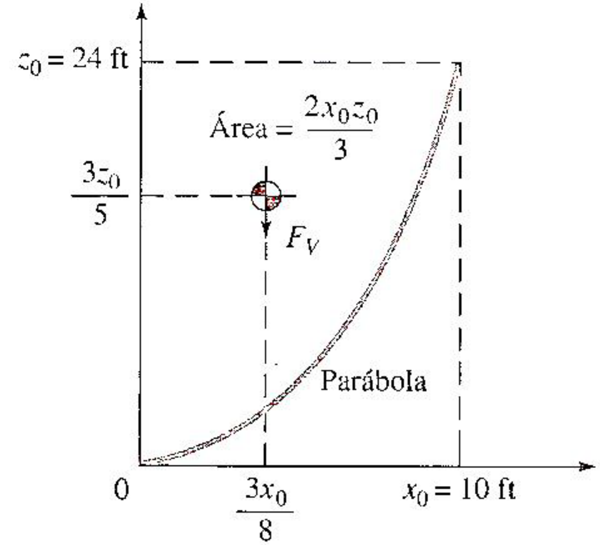
Es decir una superficie curva con ancho constante en la dirección y. Por lo tanto no existirán fuerzas hidrostáticas en esa dirección.

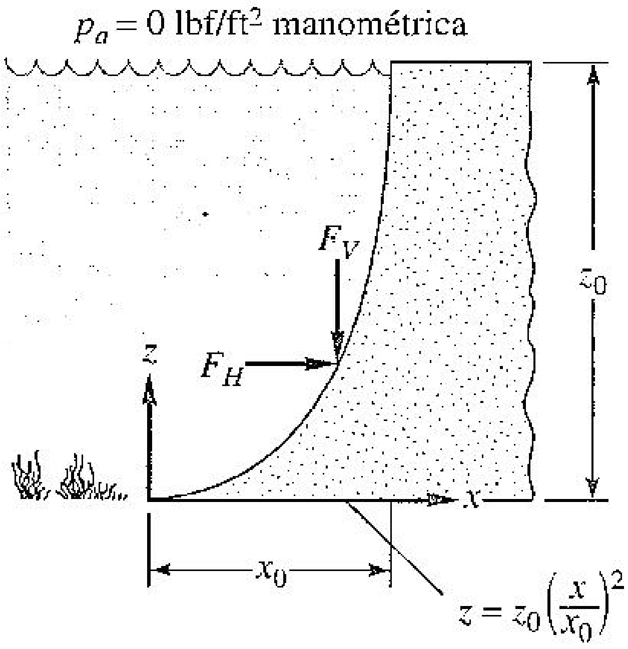
La figura muestra un corte de la superficie con un plano xz.

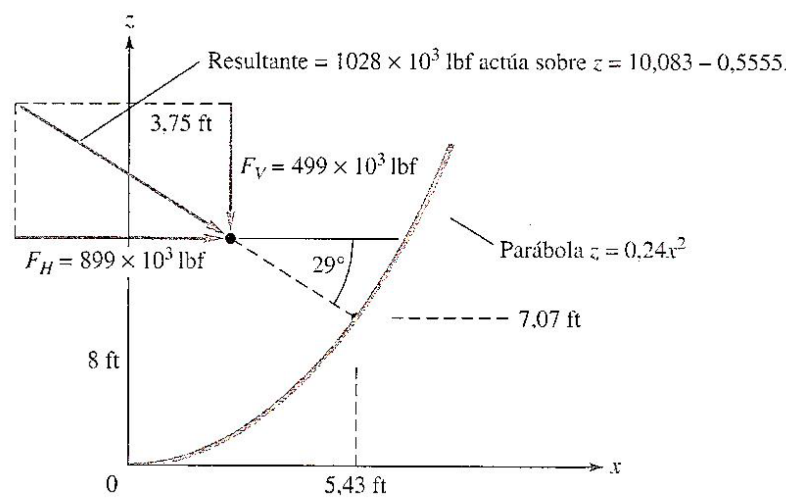
En este caso las componentes de la fuerza y la línea de acción se calculan según la ecuación de la curva.

Fuerzas hidrostáticas sobre superficies curvas sumergidas

Una presa de anchura 50 pies en forma parabólica con las dimensiones mostradas. Se desprecia la presión atmosférica. Calcule F_H y F_V y la posición del centro de presiones CP sobre el que actúan.



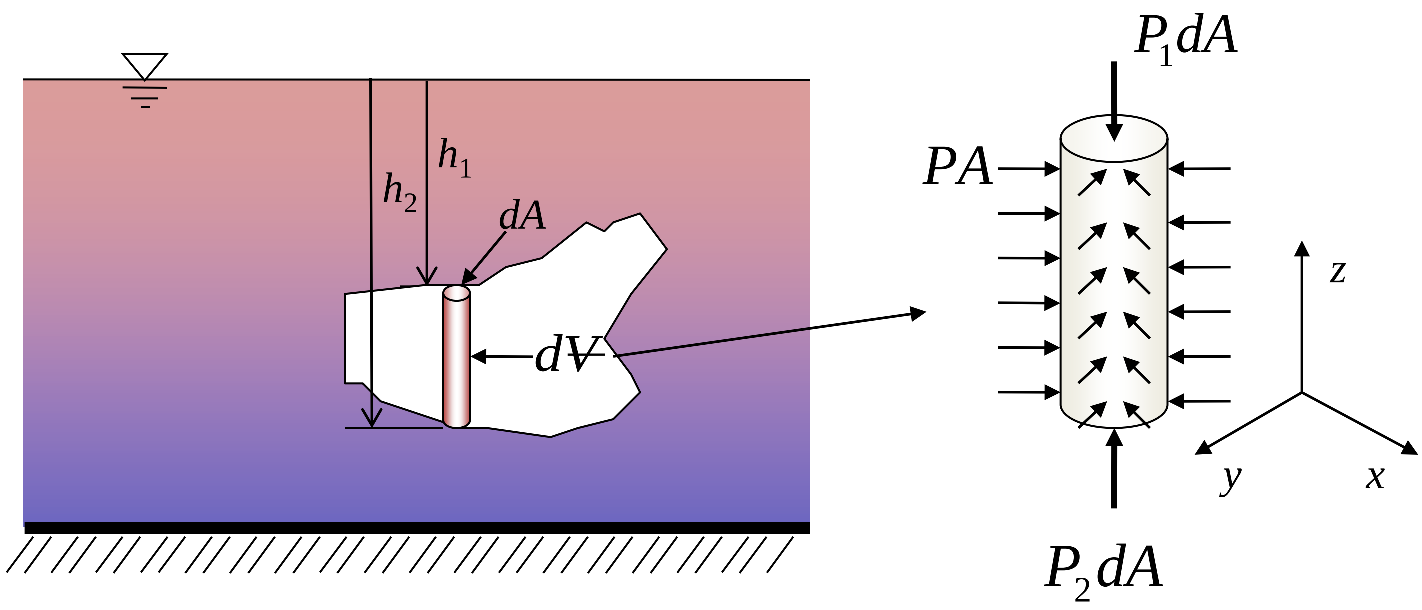




FLOTACIÓN Y ESTABILIDAD

FLOTACIÓN

Se denomina flotación o fuerza de empuje a la fuerza que experimenta un cuerpo cuando se sumerge o flota sobre una superficie, debido a la presión del líquido.



Si suponemos que el cuerpo está formado por elementos de volumen de forma cilíndrica, se tendrá que la fuerza neta aplicada sobre cada elemento cilíndrico será igual a la sumatoria de las fuerzas de presión aplicadas.

La fuerza horizontal es cero ya que al estar sometido a la misma presión por todos lados, la fuerza ejercida de un lado contrarresta la del otro.

Para la fuerza vertical en cambio las presiones en la parte superior e inferior son diferentes por lo tanto existirá una fuerza resultante que se puede determinar con la expresión:

$$dF_Z = P_2 dA - P_1 dA$$

Siendo la dirección positiva de *z* de abajo hacia arriba.

Como la presión en un fluido en reposo es igual a:

$$P = P_0 + \rho g h$$

Se tiene entonces:

$$dF_Z = \left(P_0 + \rho g h_2\right)dA - \left(P_0 + \rho g h_1\right)dA = \rho g\left(h_2 - h_1\right)dA$$

Resulta que:

$$\left(h_2 - h_1\right)dA = d\forall$$

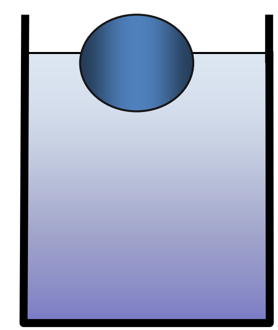
diferencial de volumen del elemento cilíndrico

Por lo tanto:

$$F_Z = \int dF_Z = \rho g \int_{\forall} d\forall = \rho g \forall$$

Un cuerpo sumergido en un fluido experimenta una fuerza de flotación vertical igual al peso del fluido que desaloja.

Un cuerpo que flota desaloja su propio peso en el fluido en que flota.



…Principios de Arquímedes

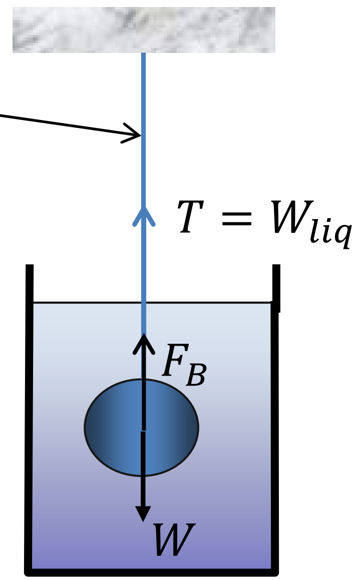
T E M A 2 H I D R O S T Á T I C A

El objeto se encuentra completamente sumergido

Tiene que existir una fuerza o tensión vertical hacia arriba *T* para mantener el objeto sumergido en su lugar junto a la fuerza de flotación F_B las cuales equilibran el peso del objeto *W*

Alambre

Fuerza o tensión ***T*** en el alambre para mantener el objeto sumergido en su lugar o simplemente el peso en el liquido en el que se encuentra sumergido el objeto.
W es el peso del objeto en el aire

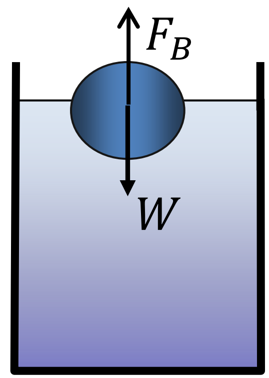


$$W_{liq} = W - F_B$$

En el caso en que *T=0* y el objeto esta completamente sumergido sin tocar fondo, se dice que tiene flotabilidad neutra $W = F_B$ lo que quiere decir que tanto el objeto como el fluido en el que se encuentra tienen pesos especificos aproximadamente de la misma magnitud.

El objeto se encuentra parcialmente sumergido o simplemente el objeto flota

La fuerza de flotación calculada con un volumen de líquido desplazado menor que el volumen del objeto, equilibra el peso



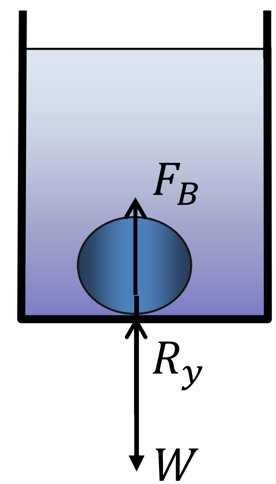
$$0 = W - F_B$$

$$W = F_B$$

El peso específico del fluido en el cual el objeto se encuentra sumergido, es mayor que el peso específico del objeto

El objeto se hunde completamente hasta el fondo

Tiene que existir una reacción vertical R_y del fondo sobre el objeto para equilibrar el peso junto a la fuerza de flotación



$$R_y = W - F_B$$

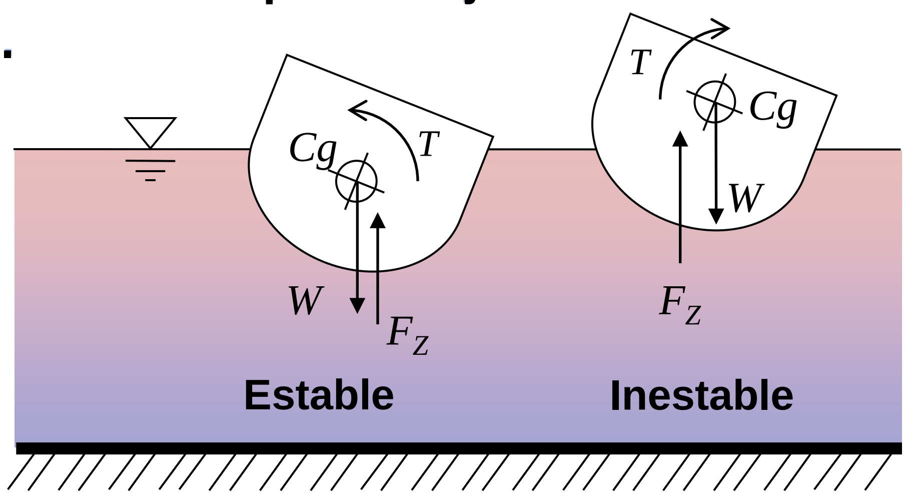
El peso específico del objeto sumergido es mayor que el peso específico del fluido

Arquímedes en el año 220 a.c. utilizo este principio para determinar si la corona del rey Hiero de Syracusa estaba hecha de oro puro (DR=19,3). Hoy en día este principio es utilizado para el diseño de embarcaciones. Arquimedez midió que el peso de la corona en el aire era 11,8 N y su peso en el agua 10,9 N. ¿Era de oro puro?

ESTABILIDAD

La estabilidad del cuerpo viene determinada por la línea de acción de la fuerza, la cual se puede determinar mediante el procedimiento expuesto para superficies sumergidas.

Un cuerpo se encuentra en equilibrio estable cuando el par *T* (o momento) formado por el peso y la fuerza de flotación tienden a reestablecer la posición del cuerpo. En el caso contrario la fuerza de flotación tenderá a voltear el cuerpo y por lo tanto este será inestable.
En general se puede decir que un cuerpo es estable cuando su centro de gravedad se encuentra por debajo de la línea de flotación, de lo contrario es inestable.



T
E
M
A

2

H
I
D
R
O
S
T
Á
T
I
C
A

FLUIDOS CON MOVIMIENTO DE CUERPO RÍGIDO

Cuando un fluido se somete a un movimiento de cuerpo rígido (un vaso lleno de agua que se mueve, por ejemplo), este se mueve sin deformarse como si se tratase de un sólido.

Al no haber deformación el único esfuerzo que actúa sobre el elemento es la presión.

Por lo tanto si este movimiento pose aceleración, entonces la variación de presión en el fluido ya no será solo función de *h* por la gravedad, sino también función de la dirección de la aceleración al cual está sometido. Por lo tanto la superficie libre del líquido ya no será un plano horizontal.

Recordemos que la presión en un fluido estático viene dada por la expresión:

$$\frac{d\vec{F}}{d\forall} = \rho\vec{g} - \nabla P$$

Por otro lado si aplicamos la ley de Newton tendremos:

$$\frac{d\vec{F}}{d\cancel{V}} = \vec{a}\rho$$

Igualando las dos ecuaciones obtenemos:

$$\rho\vec{g} - \nabla P = \rho\vec{a}$$

Como se trata de una ecuación vectorial, esta se puede expresar en termino de sus componentes:

$$\rho g_x - \frac{\partial P}{\partial x} = \rho a_x \quad \text{en dirección } x$$

$$\rho g_y - \frac{\partial P}{\partial y} = \rho a_y \quad \text{en dirección } y$$

$$\rho g_z - \frac{\partial P}{\partial z} = \rho a_z \quad \text{en dirección } z$$

Si se escoge un sistema de coordenadas tal que la dirección de la gravedad coincida con uno de los ejes (z por ejemplo) entonces tendremos que:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\rho a_x$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\rho a_y$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \rho g_z - \rho a_z$$

TEMA 2 HIDROSTÁTICA

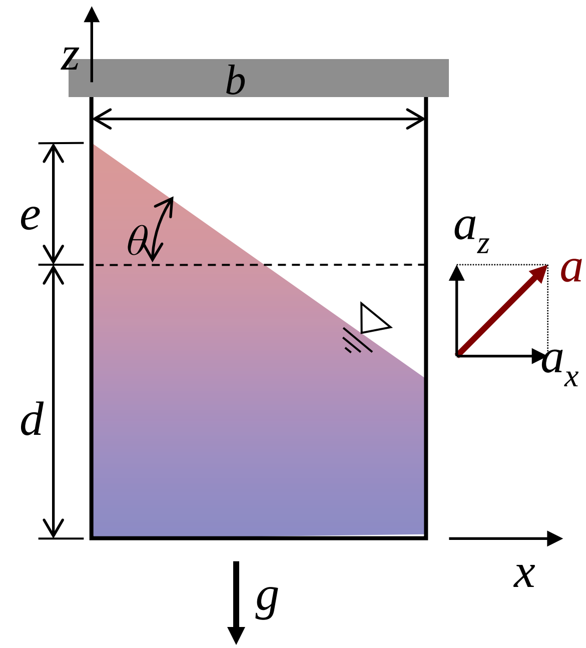
ACELERACIÓN LINEAL UNIFORME

Si se tiene un tanque con una aceleración lineal uniforme como el mostrado en la figura:

En este caso para simplificar las expresiones se hace coincidir la dirección de la aceleración con el plano *xz*, de esta manera la presión en el fluido se podrá expresar con solo dos componentes:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\rho a_x$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \rho g_z - \rho a_z$$



La diferencia de presión en el seno de un fluido es: $dP = \frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial z}dz$

En la superficie libre del líquido el cambio de presión es cero:

$$\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial z}dz = 0$$

Sustituyendo las expresiones para las derivadas, y tomando en cuanta que $g_x = -g$, se tiene:

$$-\rho a_x dx - \rho(g + a_z)dz = 0$$

La superficie libre queda definida por la expresión:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{-a_x}{g + a_z}$$

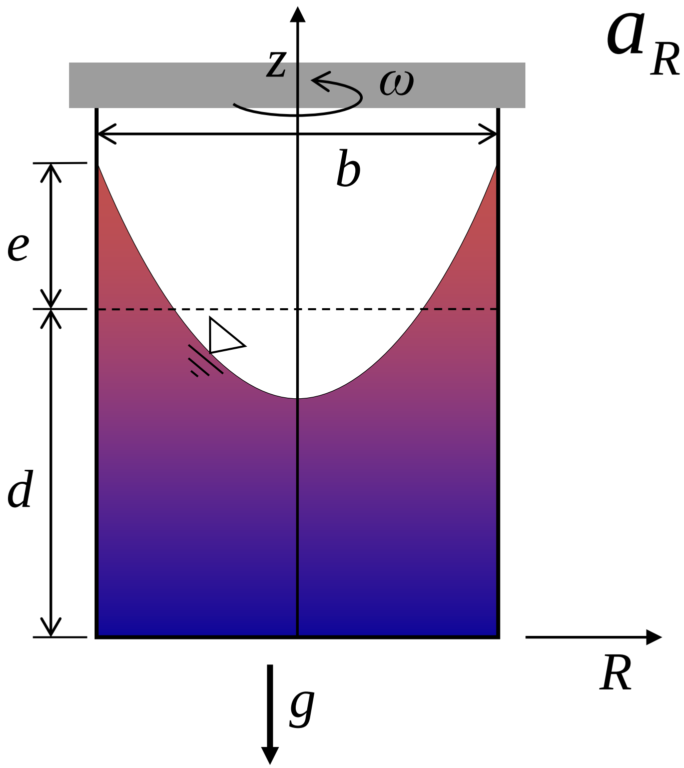
Esto muestra que la superficie libre será una recta inclinada, cuya pendiente está definida por:

$$\frac{z}{x} = \frac{2e}{b} = \tan\theta = \frac{-a_x}{g + a_z}$$

ROTACIÓN UNIFORME ALREDEDOR DE UN EJE VERTICAL

El fluido se somete a una aceleración centrífuga, la cual lleva la dirección radial hacia afuera y su expresión es:

$$a_R = \omega^2 R$$



Por lo tanto solo existe aceleración en la dirección radial *R*. De esta manera la presión en el fluido se puede expresar con solo dos componentes una radial y una vertical:

$$\frac{\partial P}{\partial R} = \rho a_R$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \rho g_z$$

Se utiliza coordenadas polares para resolver el problema

Sustituyendo la expresión de la aceleración en función de la velocidad angular nos queda:

$$\frac{\partial P}{\partial R} = \rho\omega^2 R$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \rho g_z$$

La diferencia de presión en el seno de un fluido se expresa en este caso como:

$$dP = \frac{\partial P}{\partial R} dR + \frac{\partial P}{\partial z} dz$$

Y en la superficie libre del líquido el cambio de presión es cero:

$$\frac{\partial P}{\partial R} dR + \frac{\partial P}{\partial z} dz = 0$$

T E M A 2 H I D R O S T Á T I C A

Sustituyendo las expresiones para las derivadas y tomando en cuanta que $g_x = -g$, se tiene:

$$\rho\omega^2 RdR - \rho g dz = 0$$

Integrando a ambos lados obtenemos:

$$g\int dz = \omega^2 \int RdR \longrightarrow gz = \omega^2 \frac{R^2}{2}$$

La superficie libre queda definida por la expresión:

$$z = \frac{\omega^2 R^2}{2g}$$

Esta expresión representa una parábola en el plano zR lo que indica que la superficie libre será un paraboloide de revolución.