

# **Introducción a los fluidos en movimiento: Hidrodinámica.**

## **Análisis integral del movimiento de los Fluidos:**

Concepto de volumen de control. Leyes de conservación de masa, cantidad de movimiento lineal y angular y de energía para fluidos no - viscosos.

## **Análisis diferencial del movimiento de los fluidos**

Campos de velocidad y de presión, líneas de trayectoria y de corriente. Ecuación de continuidad. Función de corriente. Ecuaciones de cantidad de movimiento. Irrotacionalidad y potencial de velocidad. Ecuación de Bernoulli.

Prof. Jesús Muñoz

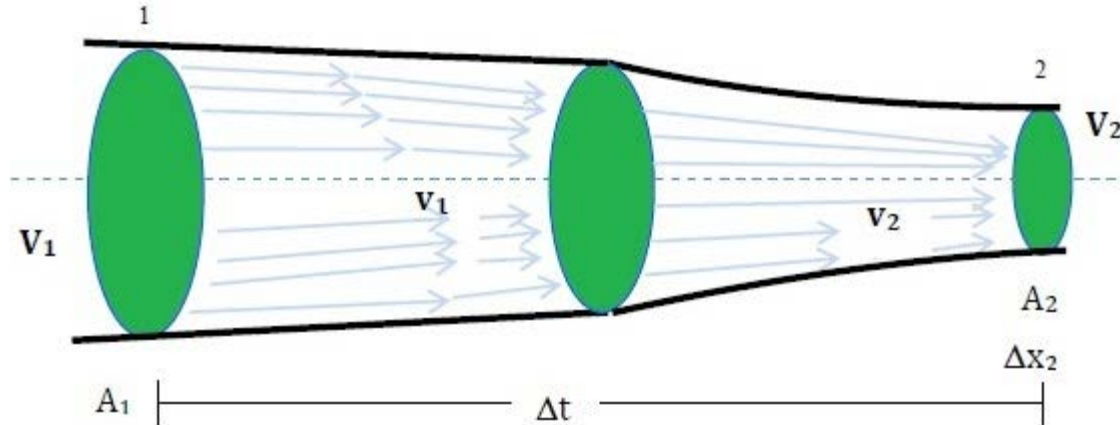
# Introducción a los fluidos en movimiento

Hidrodinámica: estudia las características y comportamiento de los fluidos en movimiento.



# Introducción a los fluidos en movimiento

Es necesario hacer una clasificación de la mecánica de fluidos con base en las características observables de los campos de flujo en movimiento y señalar los tipos de flujo que se pueden considerar.

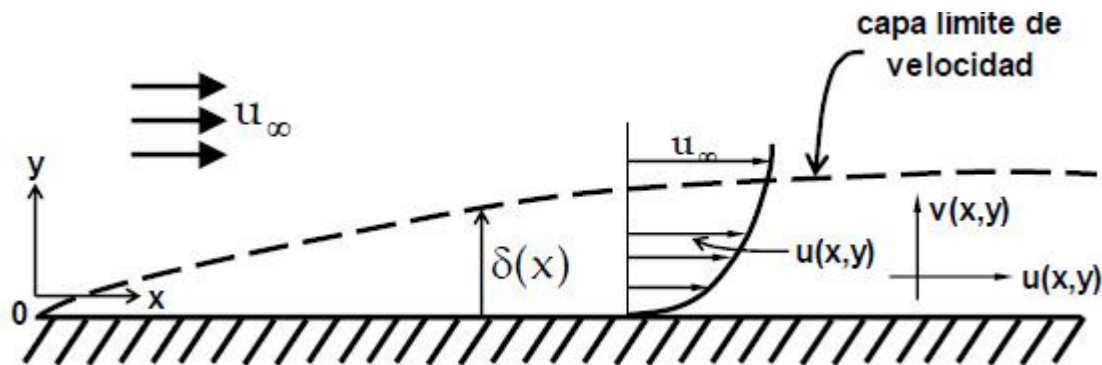


# Introducción a los fluidos en movimiento

## **FLUJOS VISCOSOS Y NO VISCOSOS**

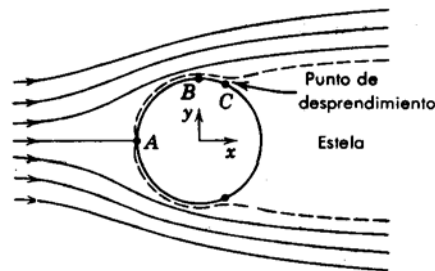
Los flujos en donde el efecto de la viscosidad se desprecia se denomina no viscoso, la viscosidad se supone igual a cero. Este tipo de fluidos no existen, sin embargo, en muchos problemas despreciar las fuerzas viscosas simplificará el análisis y al mismo tiempo se obtienen resultados significativos si la precisión es razonable.

Todos los fluidos poseen viscosidad, siendo importante su estudio en la mecánica de fluidos de medios continuos. En un flujo viscoso el fluido en contacto directo con una frontera sólida tiene la misma velocidad que la de la propia frontera; no hay deslizamiento en ella. Puesto que la mayor parte del fluido se encuentra en movimiento, los gradientes de velocidad y por consiguiente los esfuerzos de corte, deben estar presentes en el flujo. El movimiento de fluido alrededor de un ala delgada o de un casco de barco puede representarse mediante una burda aproximación de flujo sobre una placa plana. Se observará la zona de flujo libre y la capa límite o zona adyacente al flujo en donde los esfuerzos cortantes son significativos.

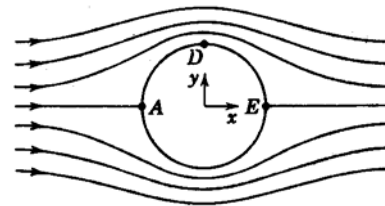


# Introducción a los fluidos en movimiento

En base a la figura, en un **flujo no viscoso** la simetría de la distribución de presión lleva a la conclusión de que no hay fuerza neta sobre el cilindro en cualesquiera de las direcciones  $x$  o  $y$ . La fuerza neta en la dirección  $x$  se denomina arrastre, así, el arrastre es cero; conclusión contraria a la experiencia, ya que los cuerpos experimentan arrastre cuando se sitúan en un flujo real. **La situación real** muestra una capa límite delgada entre los puntos A y C de la figura y el campo de presión es cualitativamente el mismo que el del caso no viscoso. Como la presión disminuye entre los puntos A y B, un elemento de fluido dentro de la capa límite experimenta una fuerza de presión neta en la dirección del flujo suficiente para superar la fuerza de corte resistente. Más allá del punto B se experimenta una fuerza de presión neta opuesta al movimiento y en algún punto, el momento del fluido es insuficiente para llevar el elemento más adentro de la región de presión creciente, las capas de fluido adyacentes a la superficie sólida se llevan al reposo y el flujo se separa de la superficie, formando una región de baja presión detrás del cuerpo de deficiente momento, denominada estela. Esto produce un desbalance neto de fuerzas de presión en la dirección del flujo, lo que produce fuerza de arrastre sobre el cuerpo. Cuanto mas grande es la estela, mayor resulta la fuerza de arrastre.



(a) Flujo viscoso



(b) Flujo no viscoso

# Introducción a los fluidos en movimiento

Como se puede reducir el tamaño de la estela producto de una separación de capa límite debido a la presencia de un gradiente de presión adverso (aumento de la presión en la dirección del flujo) y así, disminuir la fuerza de arrastre. La reducción del gradiente de presión adverso debe retrasar la separación. Mediante una forma aerodinámica, un cuerpo reduce el gradiente de presión adverso dispersando un aumento de presión determinado a una gran distancia, retardando el principio de separación, aunque el área superficial incrementada del cuerpo ocasiona el aumento de la fuerza de corte total, el arrastre se reduce significativamente.

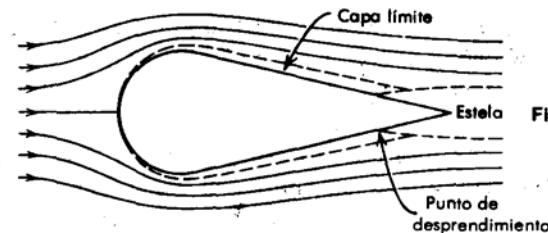


Fig. 2-12. Flujo sobre un objeto fusiforme.



**Plano aerodinámico**

La forma del ala de un avión minimiza la resistencia aerodinámica.

# Introducción a los fluidos en movimiento

## ***FLUJOS LAMINARES Y TURBULENTOS***

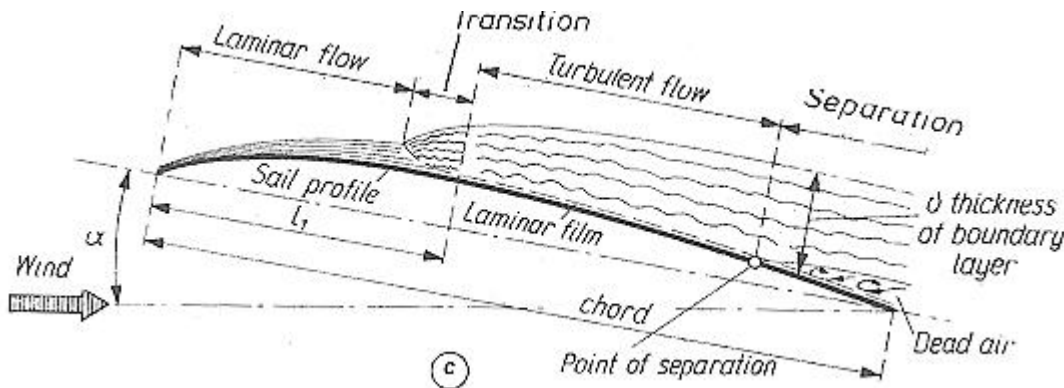
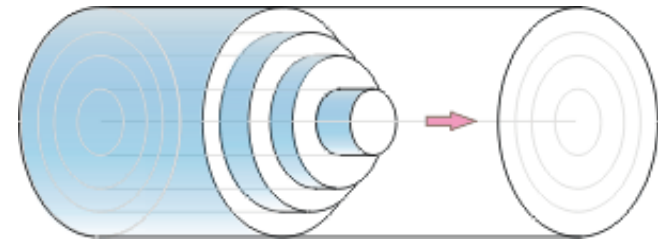
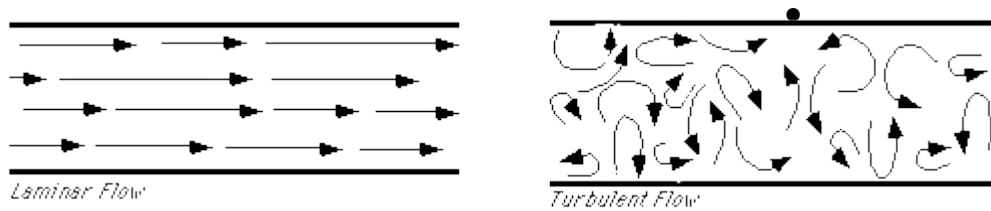
Los flujos viscosos se pueden clasificar en laminares o turbulentos teniendo en cuenta la estructura interna del flujo. En un régimen laminar, la estructura del flujo se caracteriza por el movimiento de láminas o capas. La estructura del flujo en un régimen turbulento por otro lado, se caracteriza por los movimientos tridimensionales, aleatorios, de las partículas de fluido, superpuestos al movimiento promedio.

En un flujo laminar no existe un estado macroscópico de las capas de fluido adyacentes entre sí. Un filamento delgado de tinta que se inyecte en un flujo laminar aparece como una sola línea; no se presenta dispersión de la tinta a través del flujo, excepto una difusión muy lenta debido al movimiento molecular. Por otra parte, un filamento de tinta inyectado en un flujo turbulento rápidamente se dispersa en todo el campo de flujo; la línea del colorante se descompone en una enredada maraña de hilos de tinta. Este comportamiento del flujo turbulento se debe a las pequeñas fluctuaciones de velocidad superpuestas al flujo medio de un flujo turbulento; el mezclado macroscópico de partículas pertenecientes a capas adyacentes de fluido da como resultado una rápida dispersión del colorante. El filamento rectilíneo de humo que sale de un cigarrillo expuesto a un ambiente tranquilo, ofrece una imagen clara del flujo laminar. Conforme el humo continúa subiendo, se transforma en un movimiento aleatorio, irregular; es un ejemplo de flujo turbulento.

# Introducción a los fluidos en movimiento

El que un flujo sea laminar o turbulento depende de las propiedades del caso. Así, por ejemplo, la naturaleza del flujo (laminar o turbulento) a través de un tubo se puede establecer teniendo en cuenta el valor de un parámetro adimensional, el número de Reynolds,  $Re = \rho V D / \mu$ , donde  $\rho$  es la densidad del fluido,  $V$  la velocidad promedio,  $D$  el diámetro del tubo y  $\mu$  la viscosidad.

El flujo dentro de una capa límite puede ser también laminar o turbulento; las definiciones de flujo laminar y flujo turbulento dadas anteriormente se aplican también en este caso. Como veremos más adelante, las características de un flujo pueden ser significativamente diferentes dependiendo de que la capa límite sea laminar o turbulenta. Los métodos de análisis también son diferentes para un flujo laminar que para un flujo turbulento. Por lo tanto, al iniciar el análisis de un flujo dado es necesario determinar primero si se trata de un flujo laminar o de un flujo turbulento. Veremos más detalles a este respecto en capítulos posteriores.



El flujo laminar es más predecible, y existen varias leyes que describen su comportamiento. Su nombre obedece a que las moléculas parecen desplazarse en láminas de igual velocidad, que se envuelven unas a otras en forma concéntrica:



# Introducción a los fluidos en movimiento

## **FLUJO COMPRESIBLE Y FLUJO INCOMPRESIBLE**

Aquellos flujos donde las variaciones de la densidad son insignificantes se denominan *incompresibles*; cuando las variaciones en densidad dentro de un flujo no se pueden despreciar, se llaman *compresibles*. Si se consideran los dos estados de la materia incluidos en la definición de fluido, líquido y gas, se podría caer en el error de generalizar diciendo que todos los flujos líquidos son flujos incompresibles y que todos los flujos de gases son flujos compresibles. La primera parte de esta generalización es correcta en la mayor parte de los casos prácticos, es decir, casi todos los flujos líquidos son esencialmente incompresibles. Por otra parte, los flujos de gases se pueden también considerar como incompresibles si las velocidades son pequeñas respecto a la velocidad del sonido en el fluido; la razón de la velocidad del flujo,  $V$ , a la velocidad del sonido,  $c$ , en el medio fluido recibe el nombre de número de Mach,  $M$ , es decir,  $M=V/c$

Los cambios en densidad son solamente del orden del 2% de valor medio, para valores de  $M < 0.3$ . Así, los gases que fluyen con  $M < 0.3$  se pueden considerar como incompresibles; un valor de  $M = 0.3$  en el aire bajo condiciones normales corresponde a una velocidad de aproximadamente 100 m/s.

Los flujos compresibles se presentan con frecuencia en las aplicaciones de ingeniería. Entre los ejemplos más comunes se pueden contar los sistemas de aire comprimido utilizados en la operación de herramienta de taller y de equipos dentales, las tuberías de alta presión para transportar gases, y los sistemas sensores y de control neumático o fluídico. Los efectos de la compresibilidad son muy importantes en el diseño de los cohetes y aviones modernos de alta velocidad, en las plantas generadoras, los ventiladores y compresores.

Bajo ciertas condiciones se pueden presentar ondas de choque y flujos supersónicos, mediante las cuales las propiedades del fluido como la presión y la densidad cambian bruscamente

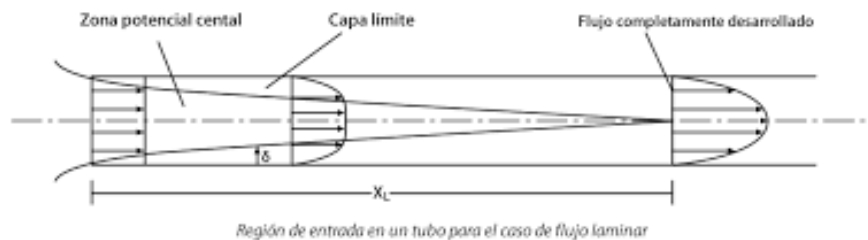
# Introducción a los fluidos en movimiento

## FLUJOS INTERNOS Y EXTERNOS

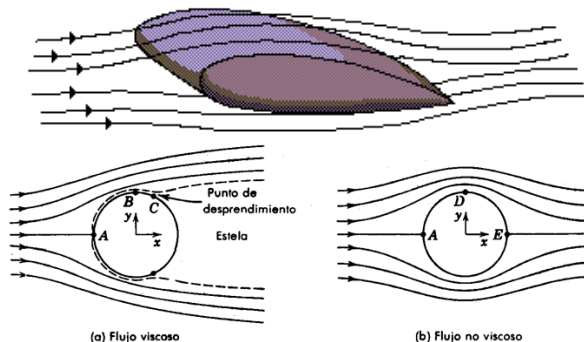
Los flujos delimitados completamente por superficies sólidas se llaman internos o de ducto. Los flujos sobre cuerpos sumergidos en un fluido sin fronteras reciben el nombre de flujos externos. Tanto los flujos internos y externos pueden ser laminares o turbulentos, compresibles o incompresibles. Los flujos externos ocurren sobre cuerpos sumergidos en un fluido sin fronteras. El flujo sobre una placa plana semiinfinita y el flujo sobre un cilindro son ejemplos de flujos externos.

El flujo interno de líquidos en los que el ducto no está lleno, donde hay una superficie libre sometida a una presión constante, se denomina flujo en canal abierto. Ejemplos comunes del mismo abarcan los flujos en los ríos, canales de irrigación y acueductos.

El flujo a través de máquinas térmicas e hidráulicas se consideran flujos internos.



Flujo interno: el flujo está confinado por la superficie sólida de la tubería



Flujo externo: el flujo no está confinado por superficies sólidas. El cuerpo se encuentra sumergido en el fluido e interactúa con éste.

# Introducción a los fluidos en movimiento

## EL CAMPO DE VELOCIDADES

Al estudiar el movimiento de los fluidos, necesariamente tendremos que considerar la descripción de un campo de velocidades. la velocidad del fluido en un punto C (cualquiera) se define como la velocidad instantánea del centro de gravedad del volumen  $dV$  que instantáneamente rodea al punto C. Por lo tanto, si definimos una partícula de fluido como la pequeña masa de fluido completamente identificada que ocupa el volumen  $dV$ , podemos definir la velocidad en el punto C como la velocidad instantánea de la partícula de fluido, que en el instante dado, está pasando a través del punto C. La velocidad en cualquier otro punto del campo de flujo se puede definir de manera semejante. En un instante dado el campo de velocidades,  $V$ , es una función de las coordenadas del espacio  $x, y, z$ , es decir  $V = V(x, y, z)$ . La velocidad en cualquier punto del campo de flujo puede cambiar de un instante a otro. Por lo tanto, la representación completa de la velocidad (es decir, del campo de velocidades) está dado por

$$V = V(x, y, z, t)$$

Si las propiedades de fluido en un punto en un campo no cambian con el tiempo, se dice que el flujo es estacionario. Matemáticamente, el *flujo* estacionario se define como

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = 0 \quad \text{donde } \eta \text{ representa cualquier propiedad de fluido.}$$

Se concluye entonces que las propiedades en un flujo estacionario pueden variar de un punto a otro del campo pero deben permanecer constantes respecto al tiempo en cualquiera de los puntos.

# Introducción a los fluidos en movimiento

## FLUJOS EN UNA, DOS Y TRES DIMENSIONES

El campo de velocidades es una función en las tres coordenadas del espacio y del tiempo. Un flujo de tal naturaleza se denomina *tridimensional* (también constituye un flujo no estacionario) debido a que la velocidad de cualquier punto del campo del flujo depende de las tres coordenadas necesarias para poder localizar un punto en el espacio.

No todos los campos de flujo son tridimensionales. Considérese por ejemplo el flujo a través de un tubo recto y largo de sección transversal constante. A una distancia suficientemente alejada de la entrada del tubo.

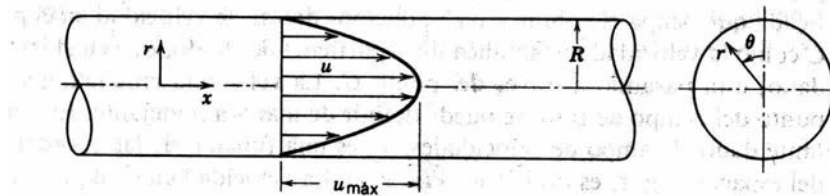


Fig. 2-2. Ejemplo de un fluido unidimensional.

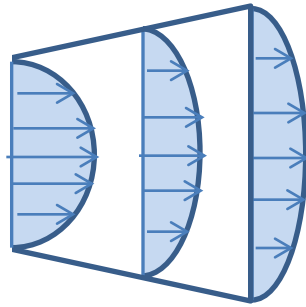
Un flujo se clasifica como de una, dos o tres dimensiones dependiendo del número de coordenadas espaciales necesarias para especificar el campo de velocidades.

En numerosos problemas que se encuentran en ingeniería el análisis unidimensional sirve para proporcionar soluciones aproximadas adecuadas.

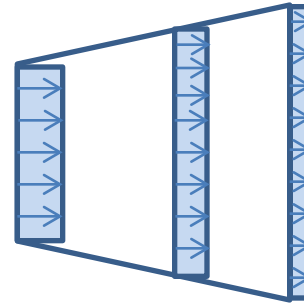
Puesto que todos los fluidos que satisfacen la hipótesis del medio continuo deben tener una velocidad cero relativa a una superficie sólida (con objeto de satisfacer la condición de no deslizamiento), la mayor parte de los flujos son intrínsecamente de dos o tres dimensiones. Sin embargo, para propósitos de análisis muchas veces resulta conveniente introducir la idea de un flujo uniforme en una sección transversal dada. Se dice que un flujo es uniforme en una sección transversal dada, si la velocidad es constante en toda la extensión de la sección transversal normal al flujo.

El término *campo de flujo uniforme* (opuesto al flujo uniforme en una sección transversal) se emplea para describir un flujo en el cual la magnitud y la dirección del vector velocidad son constantes, es decir, independiente de todas las coordenadas espaciales en todo el campo de flujo.

# Introducción a los fluidos en movimiento



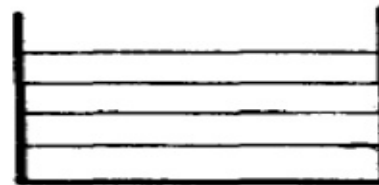
Flujo bidimensional a través de un difusor



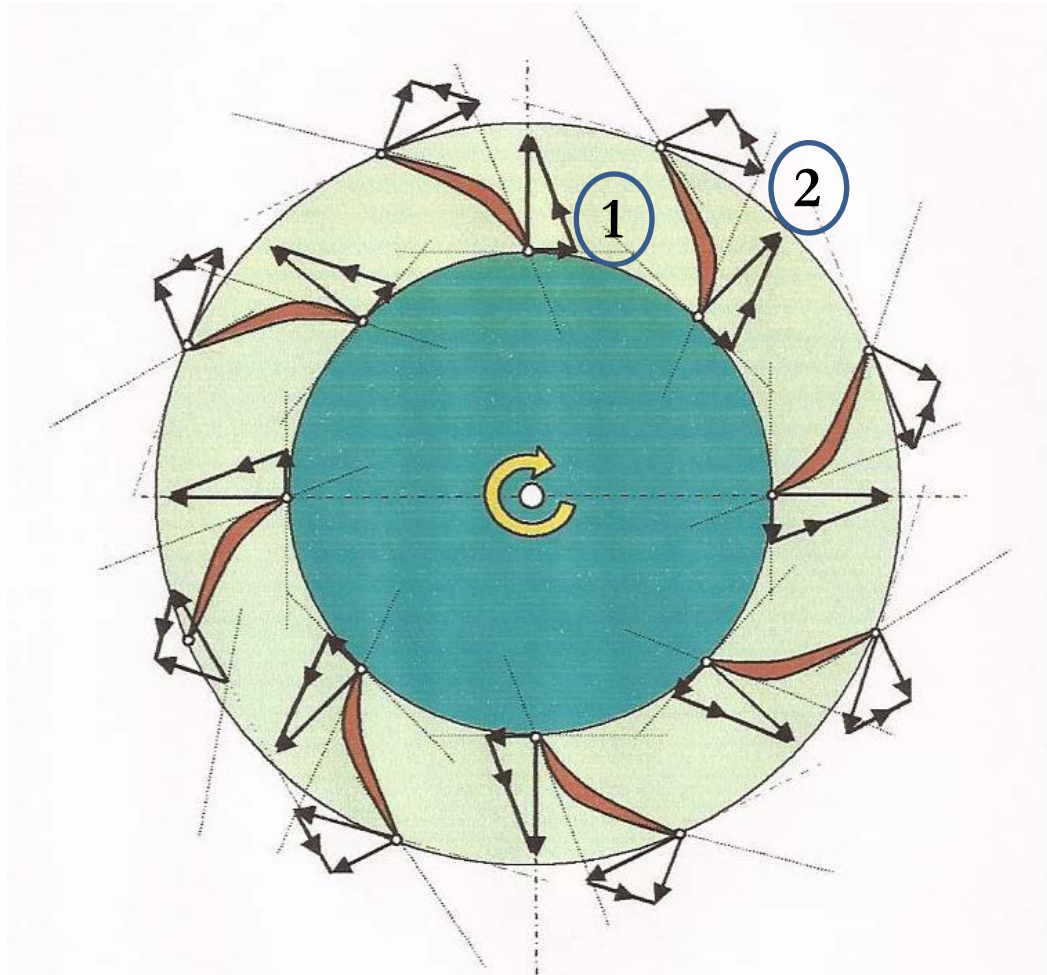
Flujo unidimensional a través de un difusor considerando flujo uniforme a través de las secciones de flujo. Las propiedades como la velocidad (promedio  $V=Q/A$ ) cambian sólo en la dirección del flujo

- **Flujo unidimensional y bidimensional.**

Estrictamente hablando el flujo es siempre tridimensional. Sin embargo cuando en el flujo prevalece una dirección es considerado unidimensional, como ocurre con las tuberías y los canales. En el caso de los canales hay circunstancias en las cuales no se puede prescindir de una segunda dimensión para describir el flujo, debiendo hacerse el estudio del flujo plano o bidimensional.

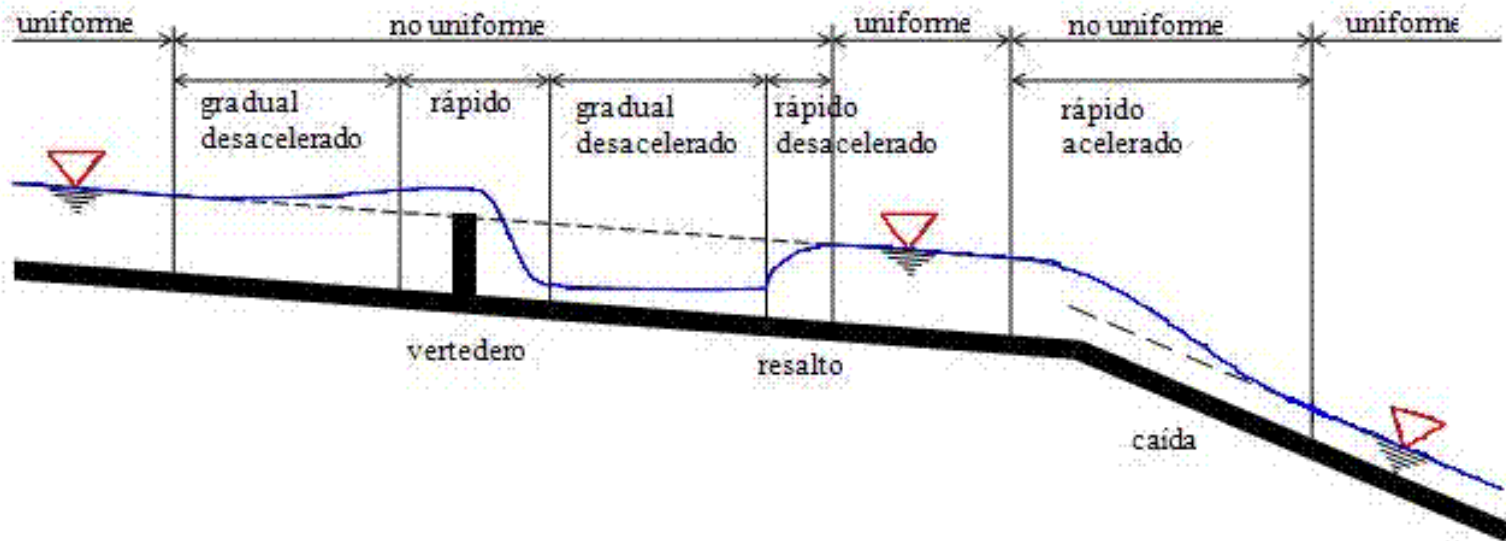


# Introducción a los fluidos en movimiento



El flujo a través de los canales entre los alabes de una turbomáquina se considera unidimensional, con las propiedades uniformes en las secciones de entrada (1) y salida (2), lo que permite resolver fácilmente las integrales de superficie de las ecuaciones de conservación cuando se hace un análisis integral o macroscópico. Observe que los triángulos de velocidades en toda la sección de entrada (1) son idénticos pero diferentes a los triángulos de velocidades idénticos en toda la sección de salida (2).

# Introducción a los fluidos en movimiento



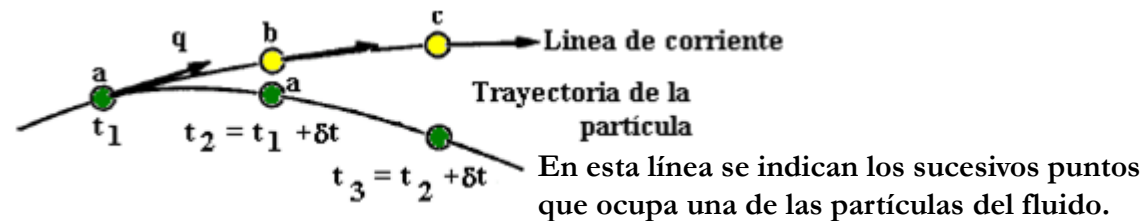
En la figura se muestra un ejemplo de flujo en un canal abierto, en donde el flujo puede considerarse como uniforme o como no uniforme según el comportamiento que presenta.

# Introducción a los fluidos en movimiento

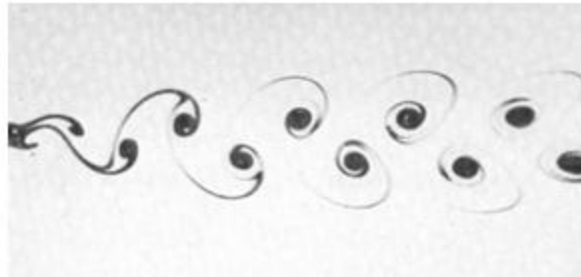
## **LINEAS DE TRAYECTORIA, LINEAS DE TRAZA Y LINEAS DE CORRIENTE**

En el análisis de problemas de mecánica de fluidos frecuentemente resulta ventajoso disponer de una representación visual de un campo de flujo. Tal representación se puede obtener mediante las líneas de trayectoria, las líneas del traza y las líneas de corriente.

Una **línea de trayectoria** está constituida por la curva trazada en su movimiento por una partícula de fluido. Para determinar una trayectoria, se puede identificar a una partícula de fluido en un instante dado, por ejemplo, mediante el uso de un colorante (tinta), y tomar fotografías de su movimiento con un tiempo de exposición adecuado. La línea trazada por la partícula constituye entonces una trayectoria.



Por otra parte, podemos preferir fijar nuestra atención en un **punto fijo del espacio**, e identificar, empleando también un colorante, todas las partículas que pasan a través de este punto. Después de un corto periodo tendremos entonces cierta cantidad de partículas de fluido identificables en el flujo, todas las cuales han pasado en algún momento a través del punto fijo previamente seleccionado. La línea que une todas estas partículas define una **línea del traza**.



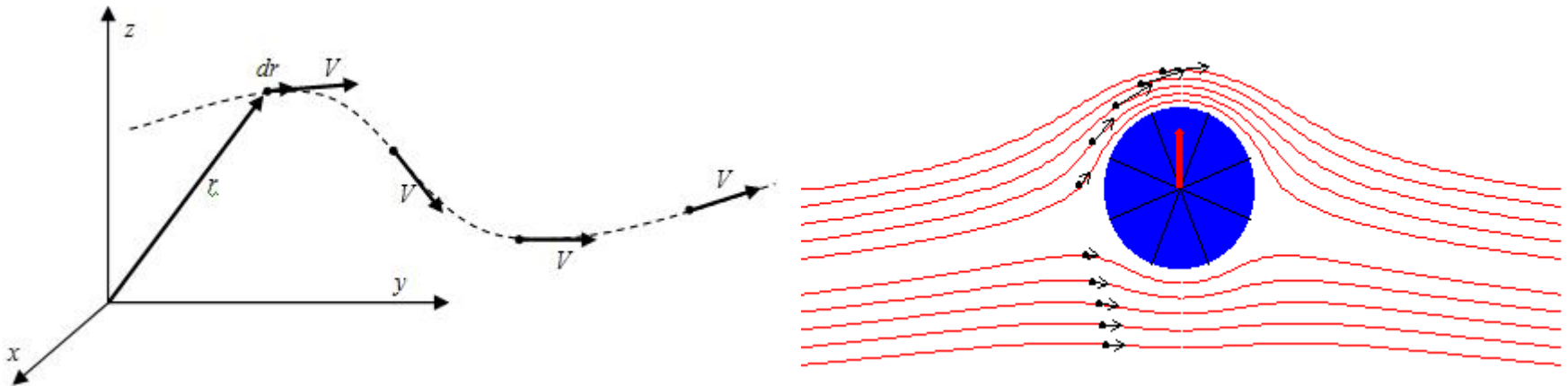
También se puede llamar Filete o línea de humo: se trata de los lugares en el espacio en el que se encuentran todas las partículas que pasaron por un punto específico.



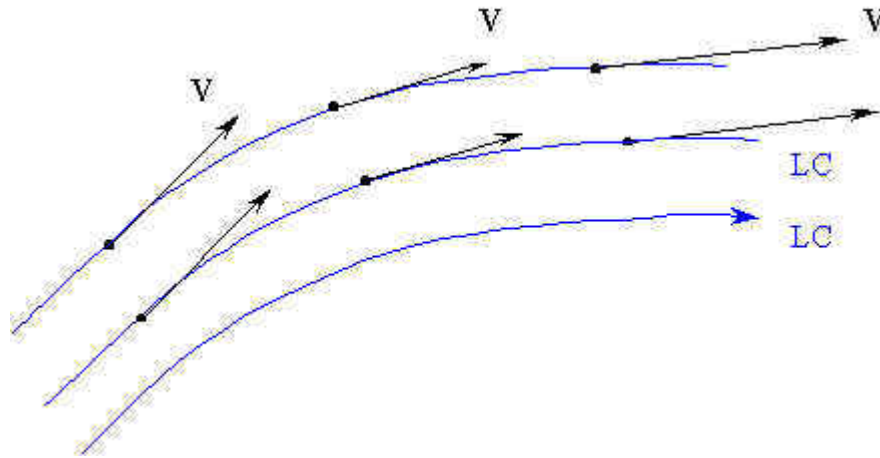
# Introducción a los fluidos en movimiento

Por su parte, las **líneas de corriente** son líneas dibujadas en el campo de flujo de tal manera que **en un instante** dado se encuentran siempre tangentes a la dirección del flujo en cada punto del campo de flujo. La forma de las líneas de corriente puede cambiar de un instante a otro si la velocidad del flujo es una función del tiempo, es decir, si se trata de un flujo no estacionario. Dado que las líneas de corriente son tangentes al vector velocidad de cada punto del flujo, el fluido nunca puede cruzar una línea de corriente.

En un flujo estacionario, la velocidad en cada punto del campo permanece constante con el tiempo y en consecuencia, las líneas de corriente no cambian de un instante a otro. Lo anterior implica que una partícula localizada en una línea de corriente determinada permanecerá en la misma línea de corriente. Lo que es más, partículas consecutivas que pasan a través de un punto fijo del espacio se encontrarán en la misma línea de corriente y permanecerán en ella. *Se concluye, entonces, que en el caso de flujo estacionario, las trayectorias, las líneas de traza y las líneas de corriente son idénticas para todo el campo. En el caso de un flujo no estacionario las tres curvas no coinciden.*



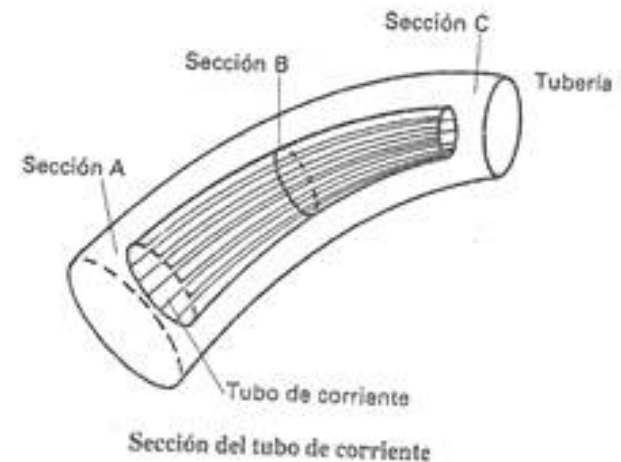
# Introducción a los fluidos en movimiento



La línea de corriente es la envolvente de los vectores velocidad de las partículas fluidas. La orientación de las líneas de corriente será variable con el paso del tiempo cuando el flujo es no permanente y permanecerá fija cuando el flujo es permanente.

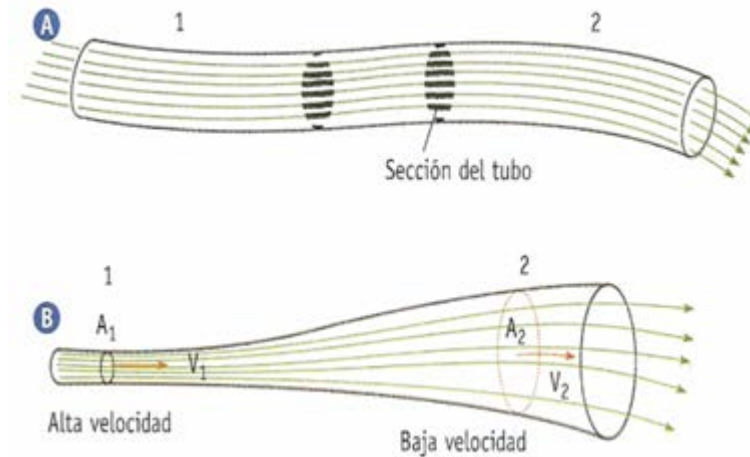
**Tubo de corriente:** Es el conjunto de todas las líneas de corriente que atraviesan una superficie cerrada concreta. Las características principales de un tubo son:

- Un tubo de corriente puede tener distinta sección a lo largo de las líneas de corriente.
- El número de líneas de corriente es el mismo para cualquier sección del tubo de corriente.
- Las líneas de corriente nunca se cruzan unas con otras en el tubo de corriente.
- El flujo del fluido a través del tubo de corriente es constante. Esto quiere decir que no existen pérdidas de flujo a través de las paredes laterales del tubo.
- Para cualquier sección de un tubo de corriente, la velocidad de las partículas que atraviesan la sección A tienen todas la velocidad  $V_A$



# Introducción a los fluidos en movimiento

Daniel Bernoulli (1700-1782) experimentó con tubos por los que fluía una corriente de agua y descubrió que cuanto mayor es la velocidad del fluido menor es la presión.

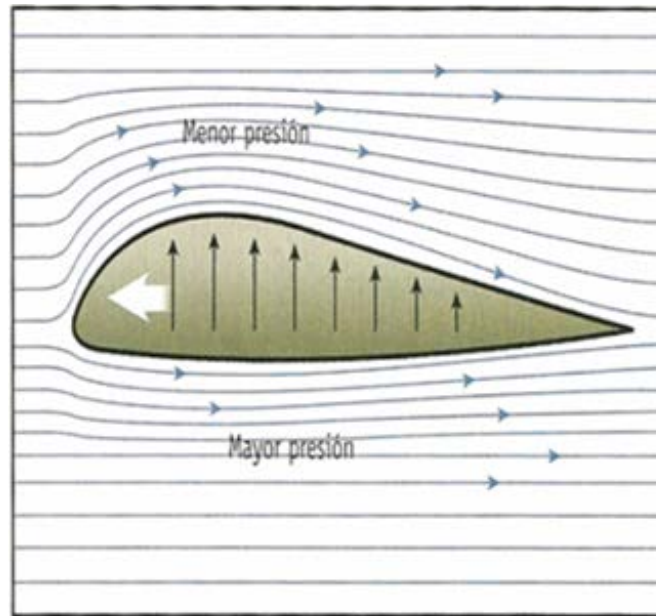


Un modelo para explicar el comportamiento de los fluidos en movimiento consiste en considerar unas líneas llamadas líneas de corriente. Un elemento del fluido que pasa por el punto 1, llegará al punto 2 siguiendo su línea de corriente (fig. A).

La cantidad de fluido que pasa por una sección del tubo es siempre igual y esto es independiente de que el tubo se haga más ancho o más angosto. Esto significa que en los puntos en los cuales el tubo es más angosto, la velocidad es mayor y en los puntos en los cuales es más ancho, la velocidad es menor (fig. B).

# Introducción a los fluidos en movimiento

Puedes observar que en los sectores del tubo en los que la velocidad del fluido es mayor, las líneas de corriente están más juntas que en los sectores en los que la velocidad es menor. Puesto que en los sectores en que la velocidad es menor, la presión en el fluido es mayor podemos concluir que donde el tubo es más angosto, la presión es menor y donde es más ancho, la presión es mayor. El comportamiento de los fluidos en movimiento permite explicar el vuelo de los aviones.



En el perfil del ala puedes observar que su curvatura es mayor en la superficie superior que en la superficie inferior. Esto ocasiona que el aire circule más rápido por encima del ala y más despacio por debajo. Esta diferencia de velocidades da lugar a una diferencia de presiones, de forma que la presión que se ejerce sobre la superficie inferior del ala es mayor que la presión que se ejerce en la parte superior, y así se produce una fuerza hacia arriba, llamada fuerza ascensional.

Sobre un avión en vuelo también actúan una fuerza de fricción ofrecida por el aire. La fricción ocasiona que no todos los fluidos fluyan con la misma velocidad. Algunos líquidos, como el aceite, fluyen con menor rapidez que el agua cuando se vierten de un recipiente a otro. Por esta razón, se dice que el aceite es más viscoso que el agua.

# Introducción a los fluidos en movimiento

Debido a lo complejo del estudio de los fluidos en movimiento, en muchas aplicaciones se consideran las siguientes simplificaciones:

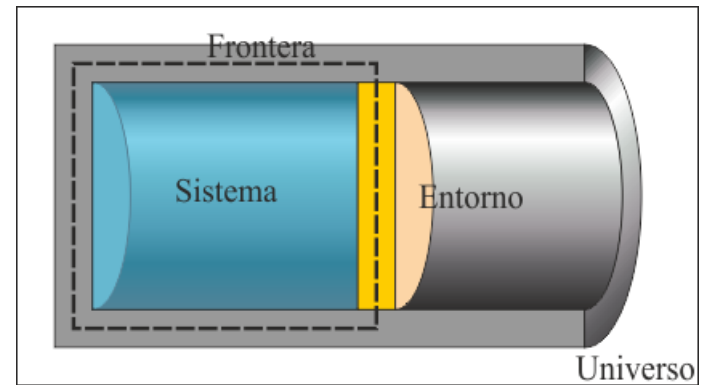
- El fluido es no viscoso: no hay fuerzas de fricción internas entre capas adyacentes.
- El fluido es incompresible: significa que su densidad es constante.
- El movimiento del fluido es estable: la velocidad, la densidad y la presión en cada punto del fluido no cambian en el tiempo.
- El fluido se mueve sin turbulencia: esto implica que cada elemento del fluido tiene una velocidad angular de cero en torno a su centro. Esto es, no puede haber corrientes de remolino presentes en el fluido en movimiento.

# Análisis Integral

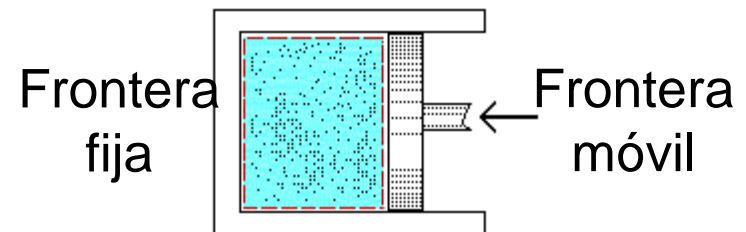
- El propósito de este capítulo es aplicar nuestras cuatro leyes básicas a volúmenes de control, para el análisis a escala macroscópica de los flujos:
  1. Conservación de la masa.
  2. Conservación de la cantidad de movimiento.
  3. Conservación del momento cinético.
  4. Ecuación de la energía.

# Sistema y volúmen de control

- Un sistema se define como una cantidad de materia o una región en el espacio elegidas para su estudio. La masa o región que se encuentra afuera del sistema se conoce como los alrededores. La superficie real o imaginaria que separa el sistema de sus alrededores se llama frontera y puede ser fija o movable. La frontera tiene espesor cero y no ocupa ningún volumen. Si el sistema es cerrado conocido como masa de control consta de una cantidad fija de masa y ninguna masa puede cruzar la frontera, pero la energía en forma de calor y trabajo si, y el volumen no tiene que ser fijo. En un caso especial cuando no se permite que la energía cruce la frontera, se conoce como sistema aislado.

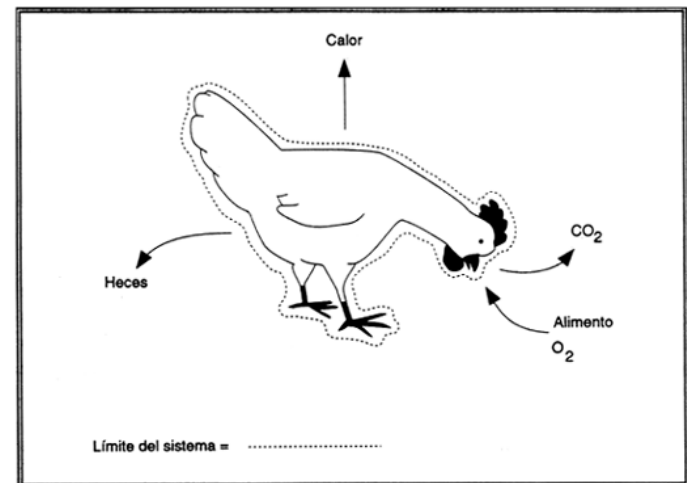
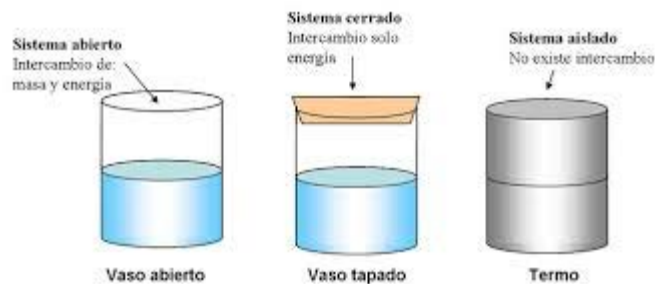
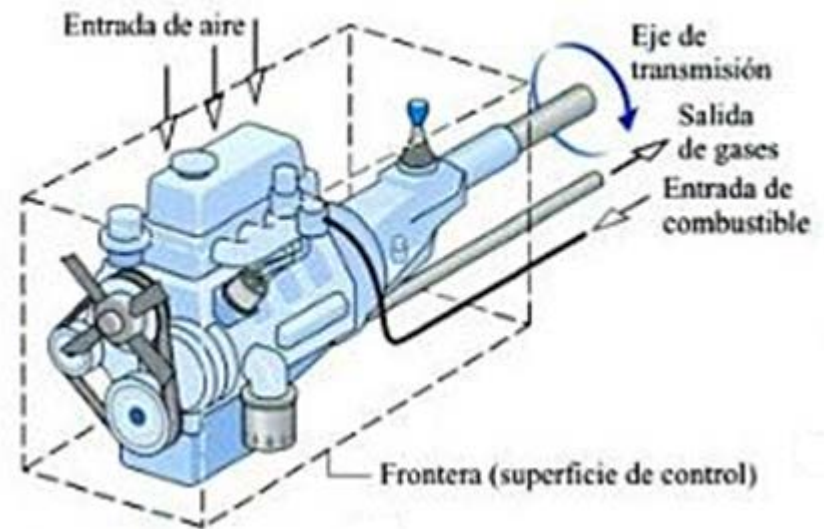


O alrededores



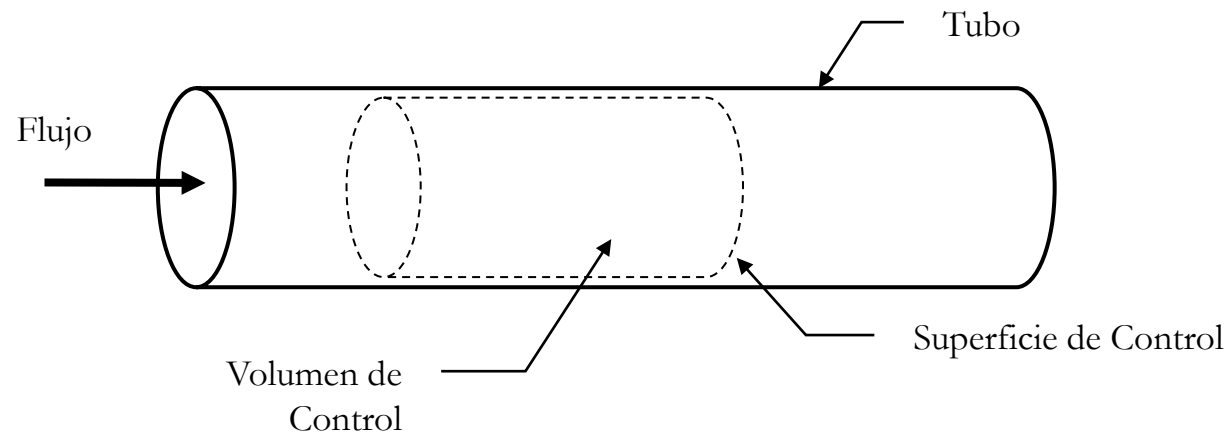
# Sistema y volumen de control

- Un sistema abierto o volumen de control es una región seleccionada de modo adecuado en el espacio. Suele encerrar un aparato con flujo de masa, como un compresor, una turbina o una tobera, etc. Tanto masa como energía pueden cruzar las fronteras de un volumen de control. Cualquier región arbitraria puede ser el volumen de control y la elección adecuada hace el análisis mucho más fácil. Puede ser de tamaño y forma fijos como un difusor o puede tener fronteras móviles.





# Volumen de control



Es una región en el espacio a través de la cual puede pasar la materia y la energía. La frontera geométrica del volumen de control se denomina superficie de control.

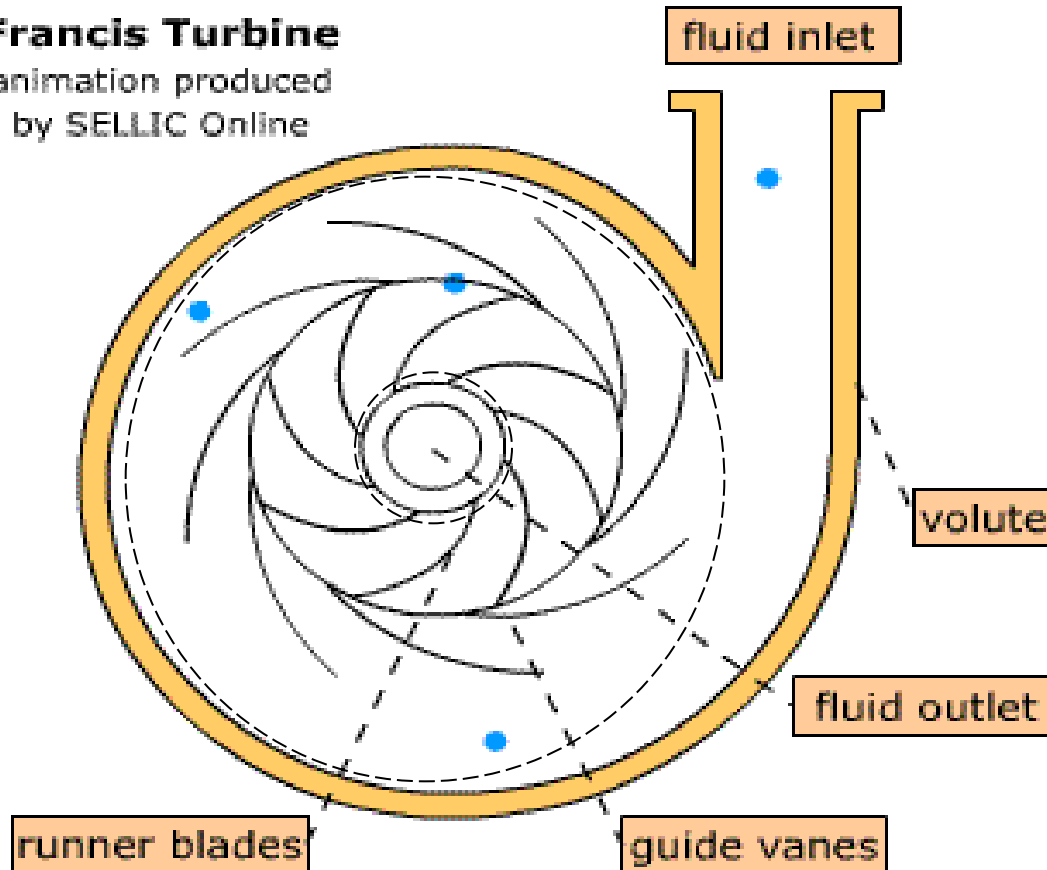
# Importancia del Análisis Integral

- Aplicar las leyes básicas a regiones específicas en lugar de a masas concretas se justifica por las siguientes razones:
  1. Es difícil identificar y seguir la misma masa de fluido todo el tiempo.
  2. Es de interés el efecto del movimiento del fluido en algún dispositivo o estructura.

# Análisis Integral

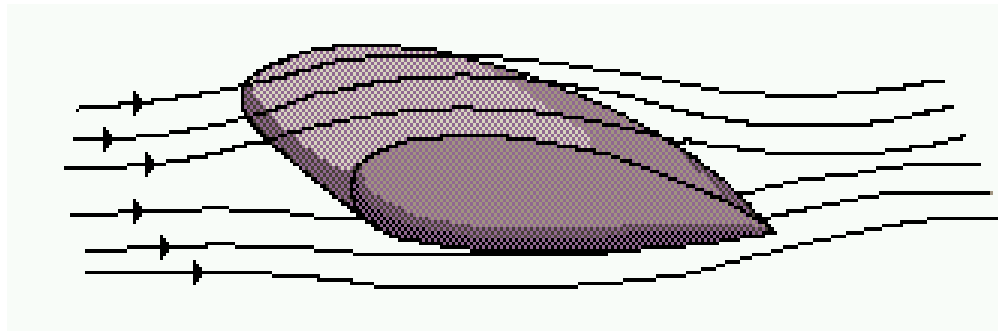
## Francis Turbine

animation produced  
by SELLIC Online



# Importancia del Análisis Integral

3. Es importante para analizar la interacción mutua entre un objeto y el fluido que conforma su entorno.



# Sistemas

Sistemas: son cantidades arbitrarias de masa de identidad fija.

- **Conservación de la masa:**

$$\frac{dm}{dt} = 0 \quad m_{sist} = const$$

- **Segunda ley de Newton:**

$$\sum F = ma = m \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}(mV)$$

En Mecánica de Fluidos, la segunda ley de Newton se denomina ley de conservación de la cantidad de movimiento

# Sistemas

- **Conservación del momento cinético**

$$\sum \vec{T} = \frac{d\vec{H}}{dt} \Bigg)_{sistema}$$

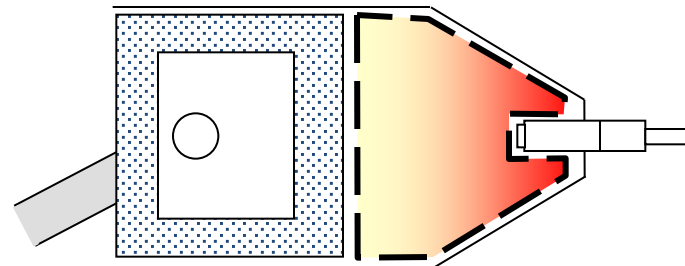
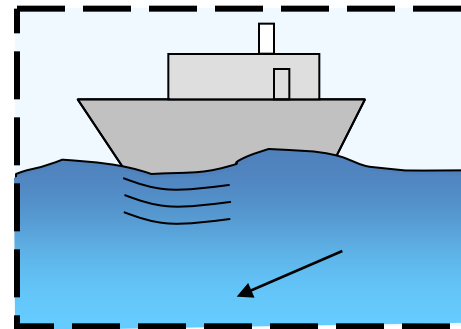
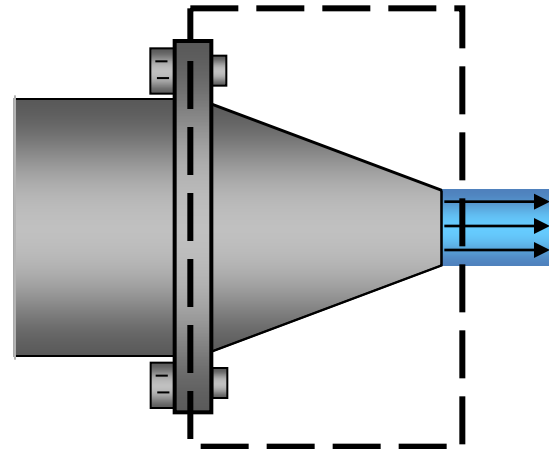
$$\vec{H}_{sistema} = \int_{masa} \vec{r} \times \vec{V} dm = \int_V \vec{r} \times \vec{V} \rho dV$$

- **Conservación de la energía:**

$$\frac{dQ}{dt} - \frac{dW}{dt} = \frac{dE}{dt}$$

# Teorema de Transporte de Reynolds

$$\begin{aligned}\frac{dm}{dt} &= 0 \\ \sum F &= \frac{d}{dt}(mV) \\ \sum \vec{T} &= \frac{d\vec{H}}{dt} \\ \frac{dQ}{dt} - \frac{dW}{dt} &= \frac{dE}{dt}\end{aligned}$$



# Teorema de Transporte de Reynolds

Sea  $B$  una propiedad extensiva cualquiera (masa, cantidad de movimiento, momento cinético, energía) y sea  $\beta$  el valor intensivo de  $B$ .

$$B_{vc} = \int_{vc} \beta \rho dV \quad \beta = \frac{dB}{dm}$$

$$B_{vc} = m,$$

$$B_{vc} = m\vec{V},$$

$$B_{vc} = \vec{H},$$

$$B_{vc} = E,$$

$$\beta = 1,$$

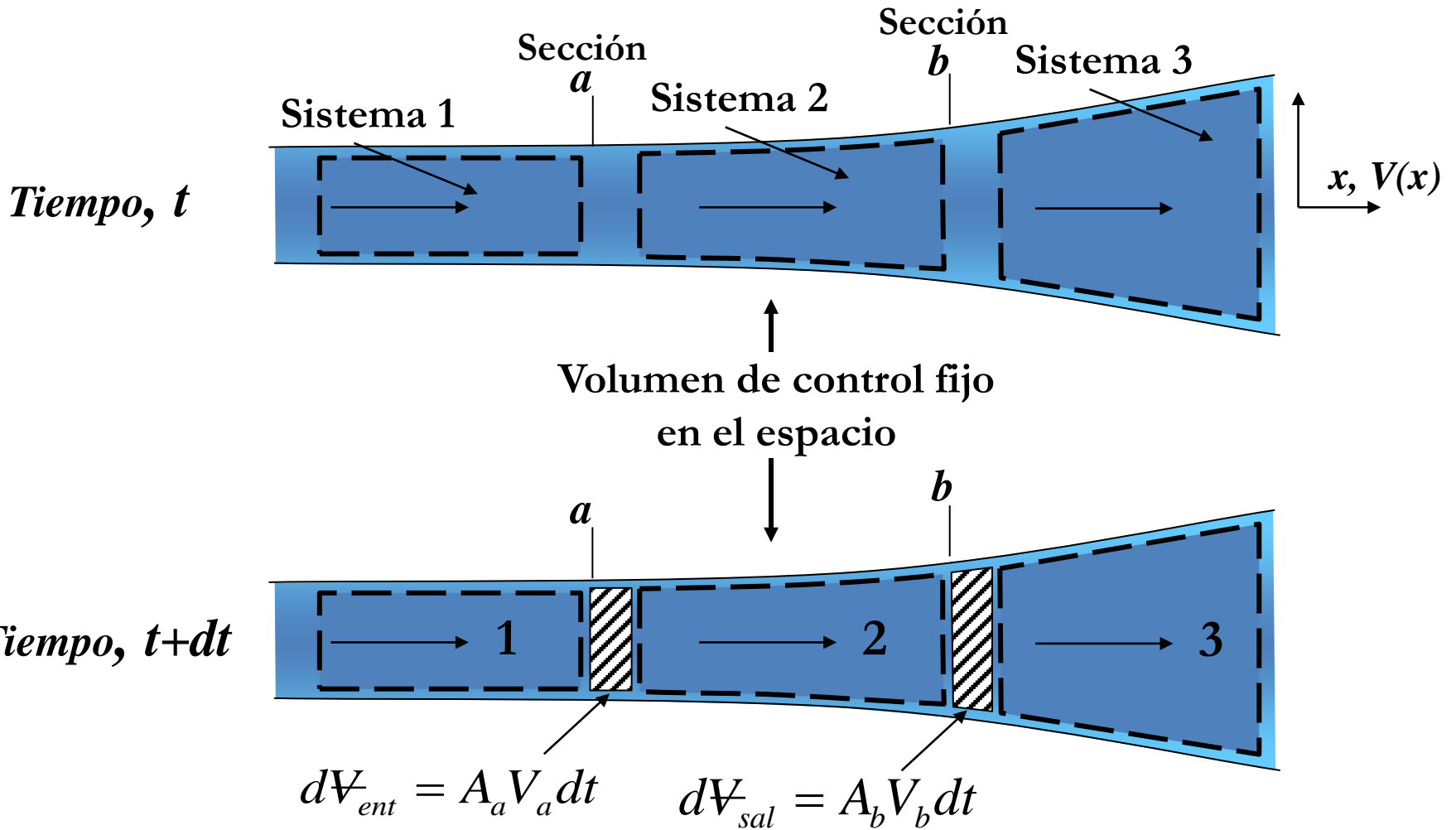
$$\beta = \vec{V},$$

$$\beta = \vec{r} \times \vec{V},$$

$$\beta = e$$



# Volumen de control fijo unidimensional



## Teorema de Transporte de Reynolds para un Volumen de Control fijo unidimensional

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}(B_{vc}) &= \frac{B_{vc}(t+dt) - B_{vc}(t)}{dt} = \\
 &= \frac{1}{dt} [B_2(t+dt) - (\beta \rho dV)_{sal} + (\beta \rho dV)_{ent}] - \frac{1}{dt} [B_2(t)] = \\
 &= \frac{1}{dt} [B_2(t+dt) - B_2(t)] - (\beta \rho AV)_{sal} + (\beta \rho AV)_{ent}
 \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}(B_{sist}) = \frac{d}{dt} \left( \int_{vc} \beta \rho dV \right) + (\beta \rho AV)_{sal} - (\beta \rho AV)_{ent}$$

**Teorema de Transporte de Reynolds para Flujo  
Unidimensional**

# Teorema de Transporte de Reynolds para un Volumen de control fijo unidimensional

**B es cualquier propiedad extensiva**

$$\underbrace{\frac{d}{dt}(B_{sist})}_{\text{Variación temporal de B en el sistema}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{vc} \beta \rho dV \right)}_{\text{Variación temporal de B dentro del VC}} + \underbrace{(\beta \rho A V)_{sal}}_{\text{Flujo de B hacia el exterior del VC a través de la SC.}} - \underbrace{(\beta \rho A V)_{ent}}_{\text{Flujo de B hacia el interior del VC a través de la SC.}}$$

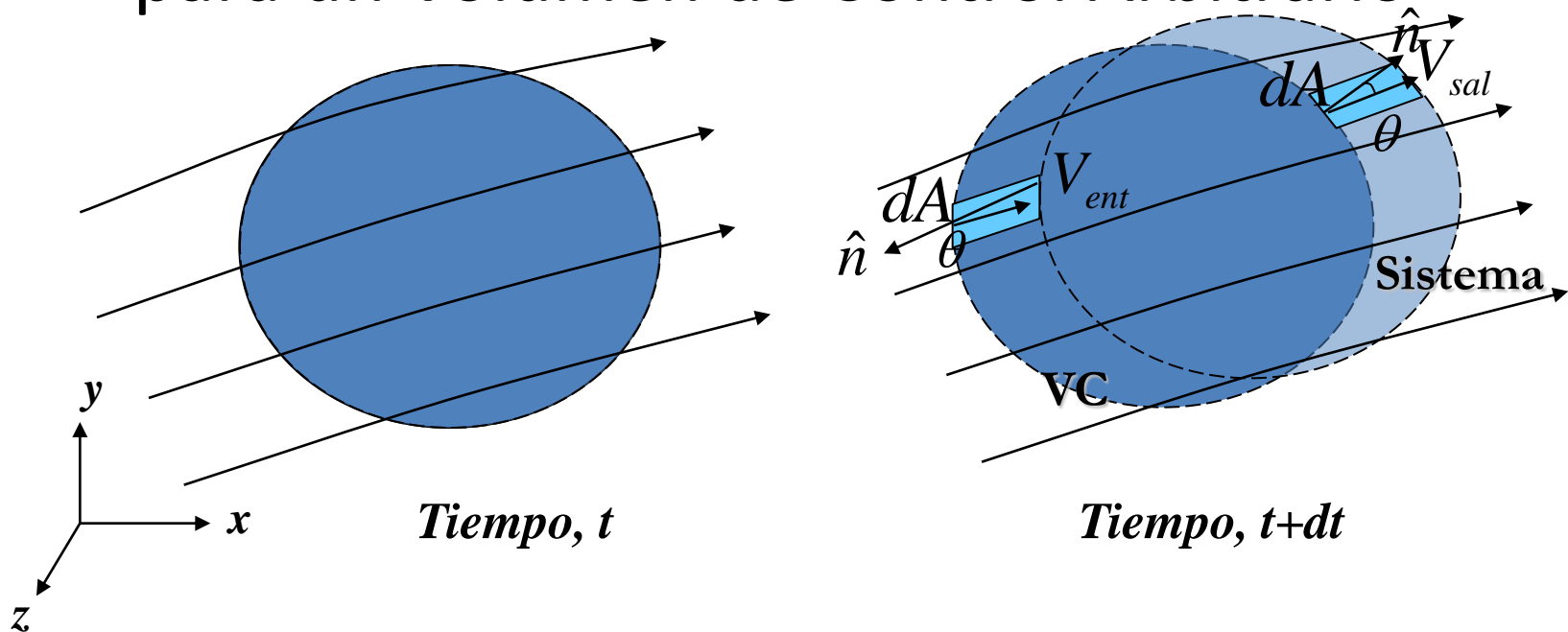
**Variación temporal  
de B en el sistema**

**Variación temporal  
de B dentro del VC**

**Flujo de B hacia el  
exterior del VC a  
través de la SC.**

**Flujo de B hacia el  
interior del VC a  
través de la SC.**

# Teorema de Transporte de Reynolds para un Volumen de Control Arbitrario



En general, cada elemento diferencial de área  $dA$  tendrá una velocidad  $V$  que formará un ángulo  $\theta$  también distinto con el vector normal a  $dA$ .

$\vec{V} \cdot d\vec{A} = V dA \cos \theta$  Permite distinguir entre flujo entrante y flujo saliente

{ Flujo saliente si es **positivo**  
y flujo entrante si es **negativo**

# Teorema de transporte de Reynolds para un volumen de control fijo arbitrario

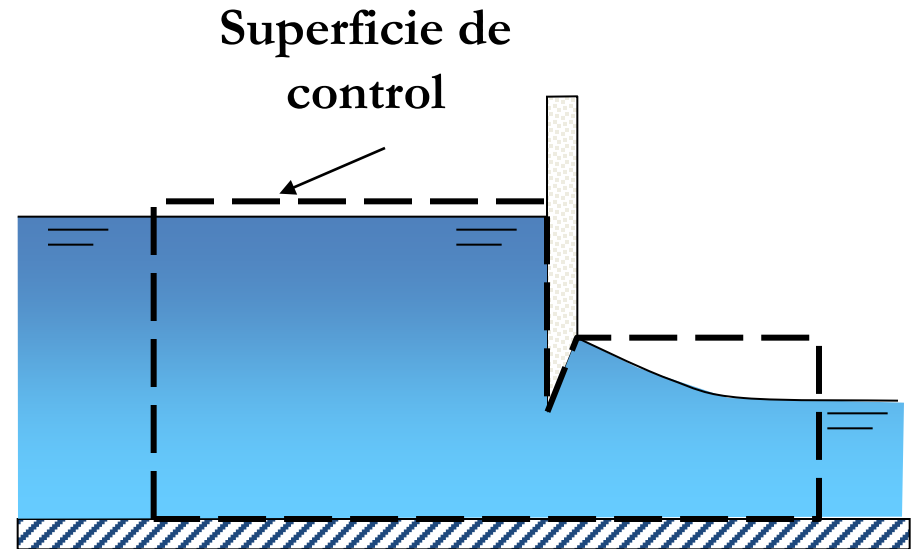
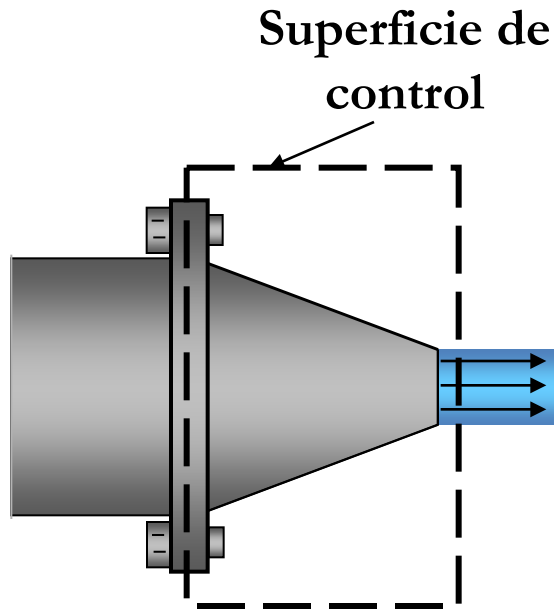
$$\underbrace{\frac{d}{dt}(B_{sist})}_{\text{Variación temporal de B en el sistema}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{vc} \beta \rho dV \right)}_{\text{Variación temporal de B dentro del VC}} + \underbrace{\int_{sc} \beta \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}}_{\text{Relación neta de flujo de B a través de la SC.}}$$

Variación temporal  
de B en el sistema

Variación temporal de B  
dentro del VC

Relación neta de flujo de  
B a través de la SC.

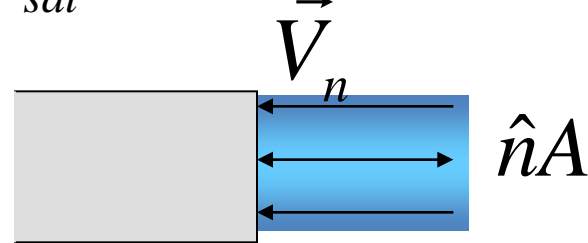
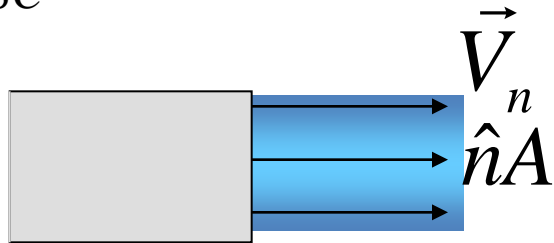
# Teorema de Transporte de Reynolds para un Volumen de Control Arbitrario



# Aproximaciones unidimensionales al término de flujo

El flujo que atraviesa la superficie de control en ciertas entradas y salidas es aproximadamente unidimensional; es decir, las propiedades del flujo son casi uniformes a través de la sección transversal de entrada o salida.

$$\int_{SC} \beta \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \sum_{\vec{V}_n} (\beta_i \rho_i V_i A_i)_{sal} - \sum_{\vec{V}_n} (\beta_i \rho_i V_i A_i)_{ent}$$

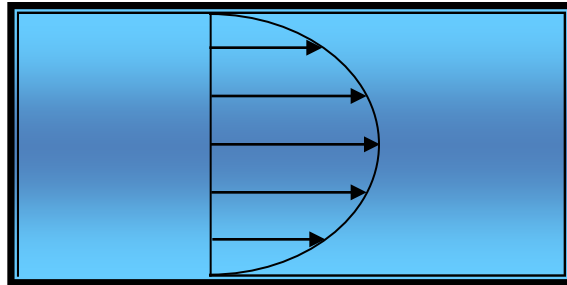


$$\left( \vec{V} \cdot d\vec{A} \right)_{sal} = V dA \cos \theta = V n dA = V dA \quad \theta = 0^\circ \quad \text{Ángulo entre la velocidad normal y el vector diferencial de área en la entrada}$$

$$\left( \vec{V} \cdot d\vec{A} \right)_{ent} = V dA \cos \theta = -V n dA = -V dA \quad \theta = 180^\circ \quad \text{Ángulo entre la velocidad normal y el vector diferencial de área en la salida}$$

Si el flujo no es uniforme en cualquier  
entrada o salida

$$\int_{SC} \beta \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \quad \longrightarrow \quad \text{Se debe integrar}$$





# Ecuación Integral de Conservación de la Masa

$$Bvc = m \rightarrow \beta = 1$$

$$\frac{d}{dt}(m_{sist}) = \frac{d}{dt} \left( \int_{vc} \rho dV \right) + \int_{sc} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

# Ecuación Integral de Conservación de la Masa

**Flujo Estable unidimensional:**

$$\sum_i (\rho_i V_i A_i)_{ent} = \sum_i (\rho_i V_i A_i)_{sal}$$
$$\sum_i (\dot{m}_i)_{sal} = \sum_i (\dot{m}_i)_{ent}$$

**Flujo Estable no unidimensional:**

$$0 = \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

# Ecuación Integral de Conservación de la Masa

**Flujo Estable, incompresible unidimensional:**

$$\sum_i (V_i A_i)_{ent} = \sum_i (V_i A_i)_{sal}$$
$$\sum_i (\mathcal{Q}_i)_{ent} = \sum_i (\mathcal{Q}_i)_{sal}$$

**Flujo Estable, incompresible, no unidimensional:**

$$0 = \int_{SC} \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

# Ecuación Integral de Conservación de Cantidad de Movimiento

$$Bvc = m\vec{V} \rightarrow \beta = \vec{V}$$

$$\frac{d}{dt}(m\vec{V})_{sist} = \frac{d}{dt}\left(\int_{vc} \vec{V}\rho dV\right) + \int_{sc} \vec{V}\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$$

$$\sum Fvc = \frac{d}{dt}\left(\int_{vc} \vec{V}\rho dV\right) + \int_{sc} \vec{V}\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$$

# Ecuación Integral de Conservación de Cantidad de Movimiento

## *Ecuaciones escalares*

$$\sum F_x = \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{vc} u \rho dV \right) + \int_{sc} u \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

$$\sum F_y = \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{vc} v \rho dV \right) + \int_{sc} v \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

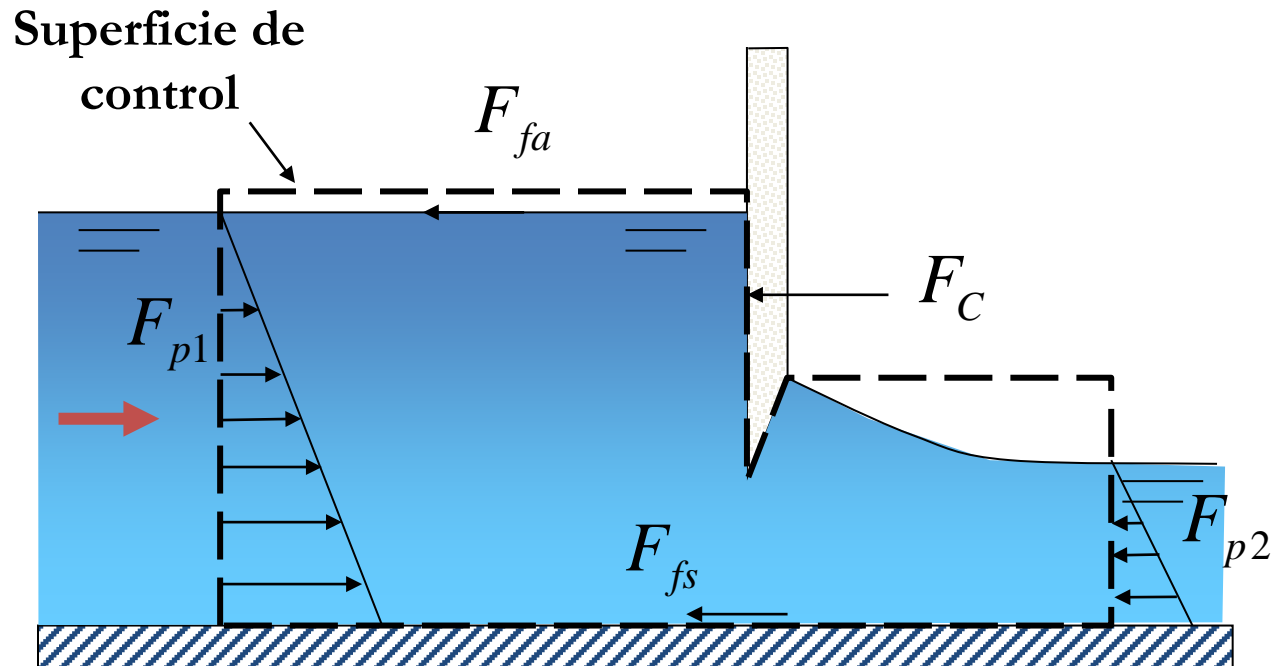
$$\sum F_z = \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{vc} w \rho dV \right) + \int_{sc} w \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

# Ecuación Integral de Conservación de Cantidad de Movimiento

$$\sum F_{vc} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{vc} \vec{V} \rho dV \right) + \int_{sc} \vec{V} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

$$\sum F_{vc} = \left\{ \begin{array}{l} \text{\textit{Fuerzas Másicas debido a la gravedad } } \vec{g} \\ \text{\textit{Fuerzas de Superficie } } \left\{ \begin{array}{l} \text{\textit{Corte de cuerpos sólidos}} \\ \text{\textit{Fuerzas debido a la viscosidad y presión en el fluido del contorno.}} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

# Fuerzas sobre el VC



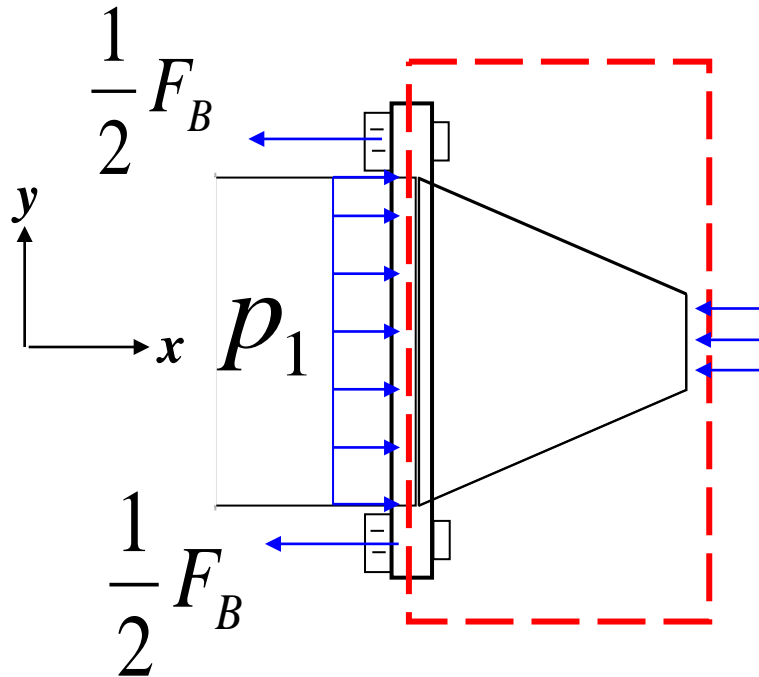
# Ecuación Integral de Conservación de Cantidad de Movimiento

## ***Pasos para usar las ecuaciones escalares***

1. Seleccionar un **VC** y un sistema de ejes coordenados asignando las direcciones positivas a los ejes.
2. Asignar los signos de las componentes  $u$ ,  $v$ ,  $w$  y de las fuerzas que actúan sobre el **VC** en las direcciones  $x$ ,  $y$ ,  $z$  de acuerdo a las condiciones establecidas en el punto 1.
3. Determinar el signo de  $\vec{V} \cdot d\vec{A}$
4. Determinar el signo total de la integral.



# Ecuación Integral de Conservación de Cantidad de Movimiento



$$P_{atm} = 0 \text{ (manométrica)}$$

*Ecuación de Conservación de la masa*

$$0 = \cancel{\frac{\partial}{\partial t}} \int_{VC} \rho dV + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

- *Flujo Estable*
- *Fluido incompresible*

$$\int_{SC} \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0 \rightarrow \rho V_2 A_2 - \rho V_1 A_1 = 0$$

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dot{m}$$

# Ecuación Integral de Conservación de Cantidad de Movimiento

*Ecuación de Conservación de Cantidad de Movimiento*

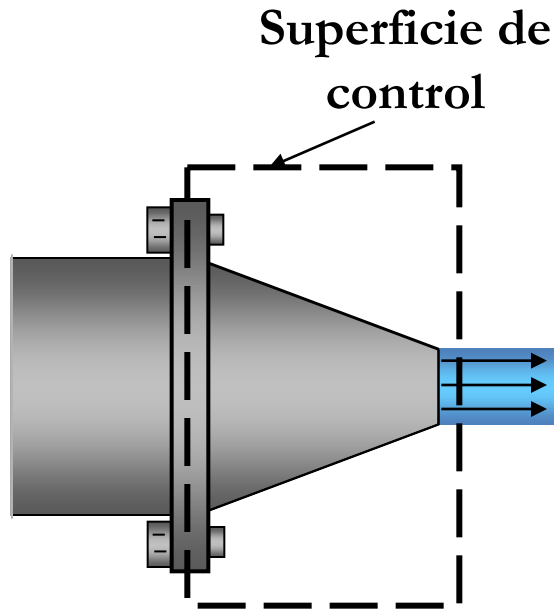
$$\sum F_{vc} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{vc} \vec{V} \rho dV \right) + \int_{sc} \vec{V} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

*Ecuación de Momento en x*

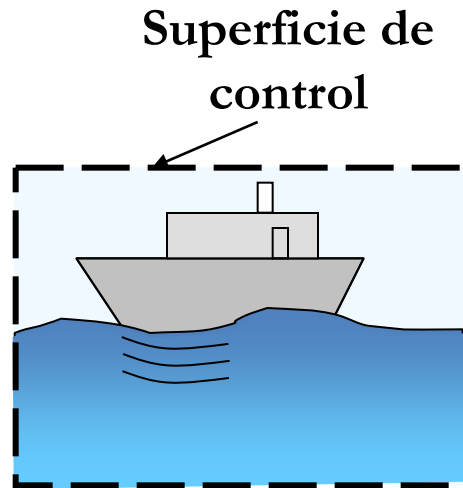
$$-F_B + p_1 A_1 = u_2 \rho V_2 A_2 - u_1 \rho V_1 A_1$$

$$F_B = p_1 A_1 - \dot{m}(u_2 - u_1)$$

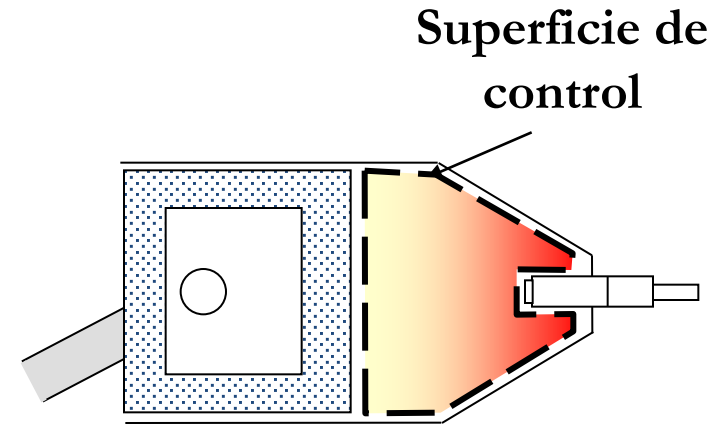
# Volúmenes de control fijos, móviles y deformables



Volumen de control fijo



Volumen de control móvil



Volumen de control deformable

## **Volumen de control de forma constante moviéndose a velocidad constante**

Si el volumen de control se mueve a velocidad constante  $V_s$ , un observador fijo al volumen de control verá al fluido atravesar el volumen de control con una velocidad relativa  $V_r$  definida por:

$$V_r = V - V_s$$

Donde  $V$  es la velocidad del fluido respecto al mismo sistema de referencia para el que la velocidad del volumen de control es  $V_s$ . Los términos de flujo serán proporcionales a  $V_r$  pero la integral de volumen permanece igual porque el volumen de control se mueve sin deformarse. El teorema del transporte de Reynolds en este caso de movimiento uniforme del volumen de control queda:

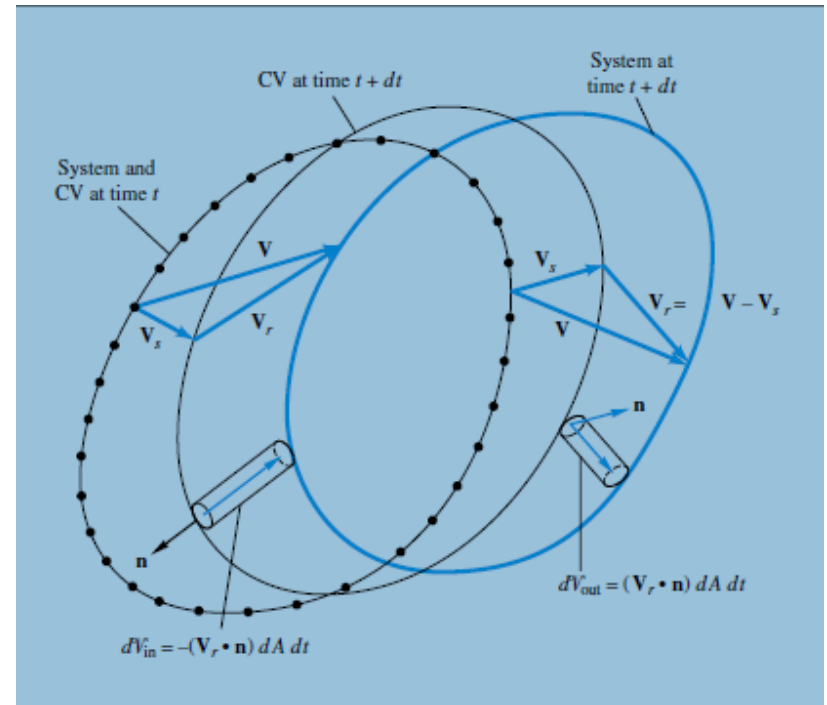
$$\frac{d}{dt}(B_{sist}) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{vc} \beta \rho dV \right) + \int_{sc} \beta \rho \vec{V}_r \cdot d\vec{A}$$

## **Volumen de control de forma constante con velocidad variable**

Si el volumen de control se mueve con velocidad  $V_s(t)$ , pero conservando su forma, los elementos de volumen no cambian con el tiempo, aunque la velocidad relativa  $V_r = V(r, t) - V_s(t)$  queda algo más complicada. La ecuación anterior sigue siendo válida, aunque el cálculo de la integral puede ser muy laborioso.

# Volumen de control con deformación y movimiento arbitrario

La situación más general se presenta cuando el volumen de control se mueve se mueve y deforma arbitrariamente como se muestra en la figura. El flujo es proporcional a la velocidad relativa, sin embargo como la superficie de control se deforma, con velocidad  $V_s(r, t)$ , la velocidad relativa  $V_r = V(r, t) - V_s(r, t)$ , puede ser complicada. Debe considerarse que los elementos de volumen de la integral de volumen se distorsionan con el tiempo y por ello la derivada temporal debe ser tomada después de la integración



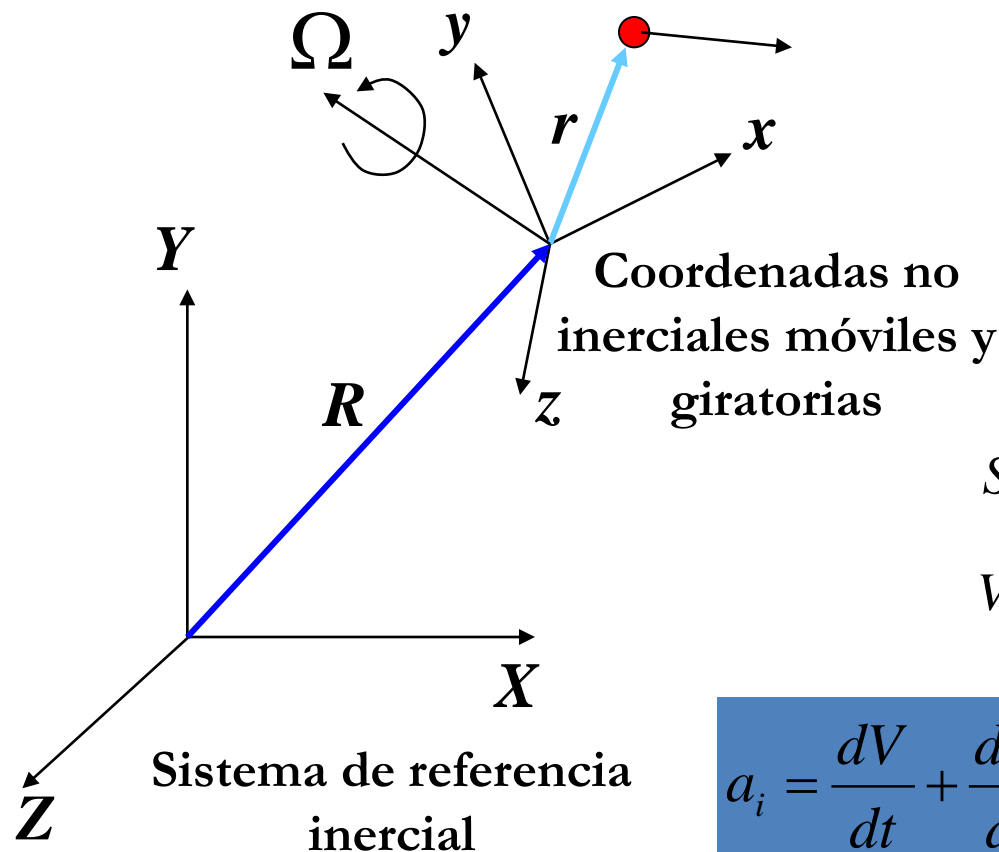
# Sistema de Referencia No Inercial

Todas las deducciones hechas presuponen que el sistema de coordenadas es inercial, o sea, que está en reposo o moviéndose a velocidad constante .

En muchos casos es conveniente utilizar un sistema de coordenadas no inercial o acelerado. Un sistema de coordenadas fijo a un cohete durante su despegue serviría de ejemplo. Cualquier flujo sobre la superficie de la Tierra, la cual presenta aceleraciones respecto a estrellas fijas debido a su rotación. Los flujos atmosféricos y oceánicos experimentan la llamada aceleración de Coriolis, normalmente pequeña del orden de  $10^{-5}$  veces la gravedad, pero su efecto acumulado en grandes distancias puede ser dominante en flujos geofísicos.

# Sistema de Referencia No Inercial

Si el flujo tiene una velocidad  $V$  respecto a un sistema de referencia  $xyz$  no inercial, en este caso  $dV/dt$  representa una aceleración no inercial que debe sumarse vectorialmente a la aceleración de arrastre  $a_{arr}$  para obtener la aceleración absoluta  $a_i$  respecto a un sistema de referencia inercial XYZ



$$a_i = \frac{dV}{dt} + a_{arr}$$

$$\sum F = ma_i = m \left( \frac{dV}{dt} + a_{arr} \right)$$

$$\sum F - ma_{arr} = m \frac{dV}{dt}$$

$$S_i = r + R$$

Desplazamiento absoluto de la partícula

$$V_i = V + \frac{dR}{dt} + \Omega \times r$$

Velocidad absoluta

$$a_i = \frac{dV}{dt} + \underbrace{\frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{d\Omega}{dt} \times r + 2\Omega \times V + \Omega \times (\Omega \times r)}_{a_{arr}}$$

# Sistema de Referencia No Inercial

La aplicación de la ley de Newton a un sistema de coordenadas  $xyz$  no inercial es equivalente a añadir una fuerza  $-ma_{arr}$  que tiene en cuenta los efectos no inerciales. Este término tiene cuatro partes, tres de las cuales muestran el efecto de la velocidad angular  $\Omega(t)$  en las coordenadas no inerciales.

1.  $\frac{d^2 R}{dt^2}$  es la aceleración del sistema de coordenadas  $xyz$  no inercial.
2.  $\frac{d\Omega}{dt}xr$  es el efecto de la aceleración angular
3.  $2\Omega xV$  es la aceleración de Coriolis.
4.  $\Omega x \Omega xr$  es la aceleración centrípeta, dirigida desde la partícula, perpendicular al eje de rotación, de magnitud  $\Omega^2 L$ , donde  $L$  es la distancia perpendicular a dicho eje.

La ecuación de cantidad de movimiento para un volumen de control, respecto a un sistema de coordenadas no inercial, se obtiene añadiendo simplemente los términos de inercia, se integra el efecto de la aceleración de arrastre sobre cada elemento diferencial de masa del volumen de control. Para un volumen de control deformable:

$$\sum F - \int_{VC} a_{arr} dm = \frac{d}{dt} \int_{VC} V \rho d\forall + \int_{SC} V \rho \bar{V}_r d\bar{A}$$
$$a_{arr} = \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{d\Omega}{dt}xr + 2\Omega xV + \Omega x \Omega xr$$



Calcular la fuerza que soporta el apoyo para mantener el álabe fijo

Para este caso de volumen de control de forma constante se tiene:

### *Ecuación de continuidad*

*Flujo estable, incompresible*

$$\rho V_{j1} A_{j1} = \rho V_{j2} A_{j2}$$

$$\rho = \text{constante}$$

$$A_{j1} = A_{j2}$$

$$V_{j1} = V_{j2} = V_j$$

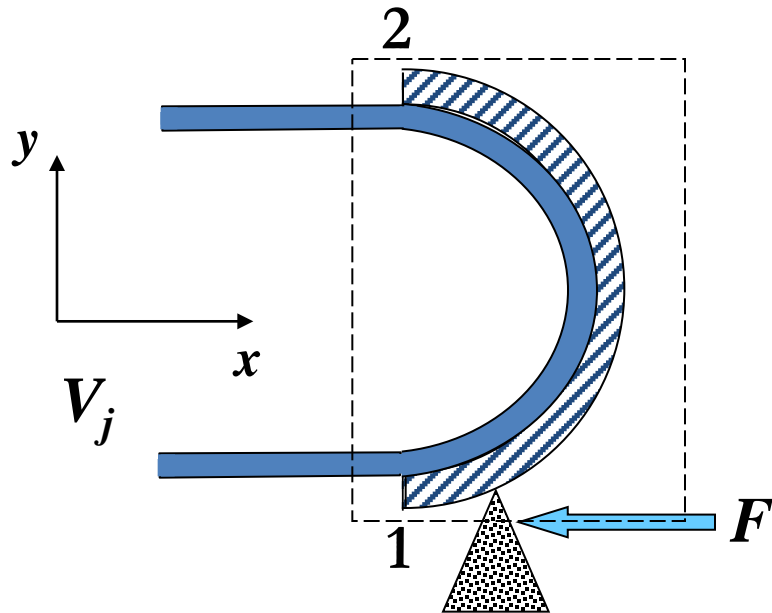
$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dot{m}$$

### *Ecuación de cantidad de movimiento*

$$-F = -V_{j1} \rho V_{j1} A_{j1} - V_{j2} \rho V_{j2} A_{j2}$$

$$F = \dot{m}_1 V_{j1} + \dot{m}_2 V_{j2}$$

$$F = 2\dot{m} V_j$$



Calcular la fuerza que debe proporcionar el fluido para producir una velocidad constante

Se tiene un volumen de control de forma constante moviéndose con velocidad constante  $V_c$

## *Ecuación de continuidad*

*Flujo estable, incompresible*

$$V_r = V_j - V_c$$

$$\rho(V_{j1} - V_c)A_{j1} = \rho(V_{j2} - V_c)A_{j2}$$

$$A_{j1} = A_{j2}$$

$$(V_{j1} - V_c) = (V_{j2} - V_c) = (V_j - V_c)$$

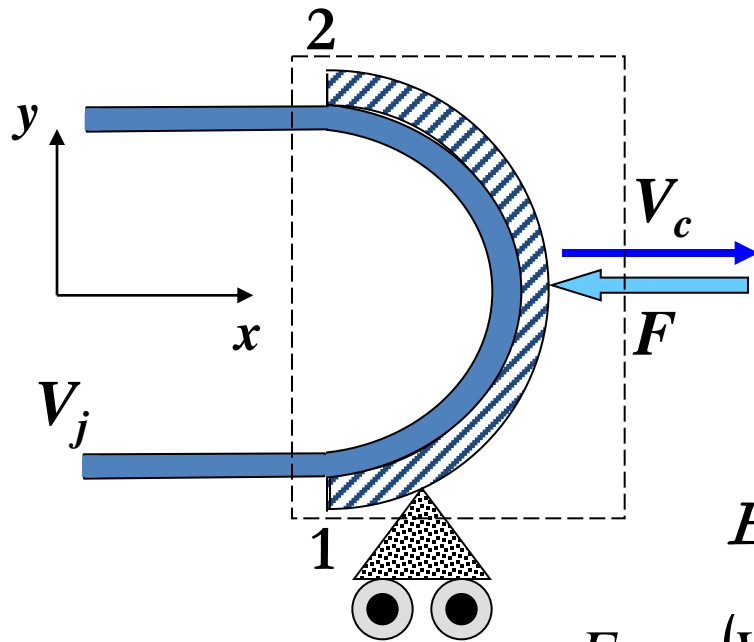
$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dot{m}$$

## *Ecuación de cantidad de movimiento*

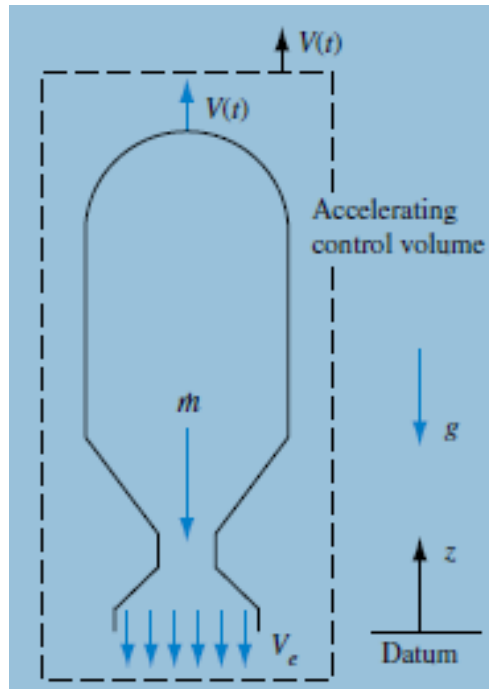
$$-F = -(V_{j1} - V_c)\rho(V_{j1} - V_c)A_{j1} - (V_{j2} - V_c)\rho(V_{j2} - V_c)A_{j2}$$

$$F = \dot{m}_1(V_{j1} - V_c) + \dot{m}_2(V_{j2} - V_c)$$

$$F = 2\dot{m}(V_j - V_c)$$



Un ejemplo de volumen de control acelerado es el caso de un cohete moviéndose en trayectoria rectilínea. La masa inicial del cohete es  $M_0$  y se supone un flujo constante de masa de escape  $\dot{m}$  a una velocidad  $V_s$  relativa al cohete. Si el flujo dentro del motor cohete es estacionario y se desprecia la resistencia del aire, deduzca la ecuación diferencial de la velocidad vertical del cohete  $V(t)$  e intégreala empleando la condición inicial  $V = 0$  en  $t = 0$ .



$$\sum F_z - \int a_{arr} dm = \int_{SC} V \rho \bar{V}_r \cdot d\bar{A}$$

$$-mg - m \frac{dV}{dt} = \dot{m}(-V_s)$$

$$a_{arr} = \frac{dV}{dt} \quad y \quad m = m(t) = M_0 - \dot{m}t$$

Separando variables e integrando con  $V = 0$  en  $t = 0$  se obtiene:

$$\int_0^V dV = \dot{m} V_s \int_0^t \frac{dt}{M_0 - \dot{m}t} - g \int_0^t dt$$

$$V(t) = -V_s \ln \left( 1 - \frac{\dot{m}t}{M_0} \right) - gt$$

## Ecuación Integral de Momento Cinético o Momento Angular

La variable muda  $\mathbf{B}$  es el vector momento cinético  $\mathbf{H}$ . En fluidos el sistema es un grupo de partículas fluidas no rígidas con velocidad variable y tenemos que integrar sobre cada masa elemental  $d\mathbf{m}$  para obtener el momento cinético instantáneo. Si  $\mathbf{O}$  es el punto con respecto al cual queremos conocer los momentos, se tiene:

$$\mathbf{B}_{vc} = \mathbf{H} \rightarrow \boldsymbol{\beta} = \mathbf{r} \times \vec{\mathbf{V}} \quad \mathbf{H}_o = \int \mathbf{r} \times \vec{\mathbf{V}} d\mathbf{m}$$

$$\sum M_o = \left( \frac{d\mathbf{H}_o}{dt} \right)_{\text{sistema}} = \sum (\mathbf{r} \times \mathbf{F})_o$$

Donde  $\mathbf{r}$  es el vector posición de la masa  $d\mathbf{m}$  respecto a  $\mathbf{O}$  y  $\mathbf{V}$  la velocidad de esa masa elemental. El momento total es igual a la suma de momentos de todas las fuerzas aplicadas con respecto al punto  $\mathbf{O}$ . Considerando que la  $\sum M_o$  son los momentos producidos por fuerzas de superficie y másicas más el momento producido por un eje que cruza las fronteras del volumen de control se tiene para el caso general de un volumen de control deformable:

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F}s + \int \mathbf{r} \times g\rho d\mathcal{V} + T_{\text{flecha}} = \frac{d}{dt} \left( \int_{vc} \mathbf{r} \times \vec{\mathbf{V}} \rho d\mathcal{V} \right) + \int_{sc} \mathbf{r} \times \vec{\mathbf{V}} \rho \vec{\mathbf{V}}_r \cdot d\vec{\mathbf{A}}$$

# Ecuación Integral de Momento Cinético o Momento Angular

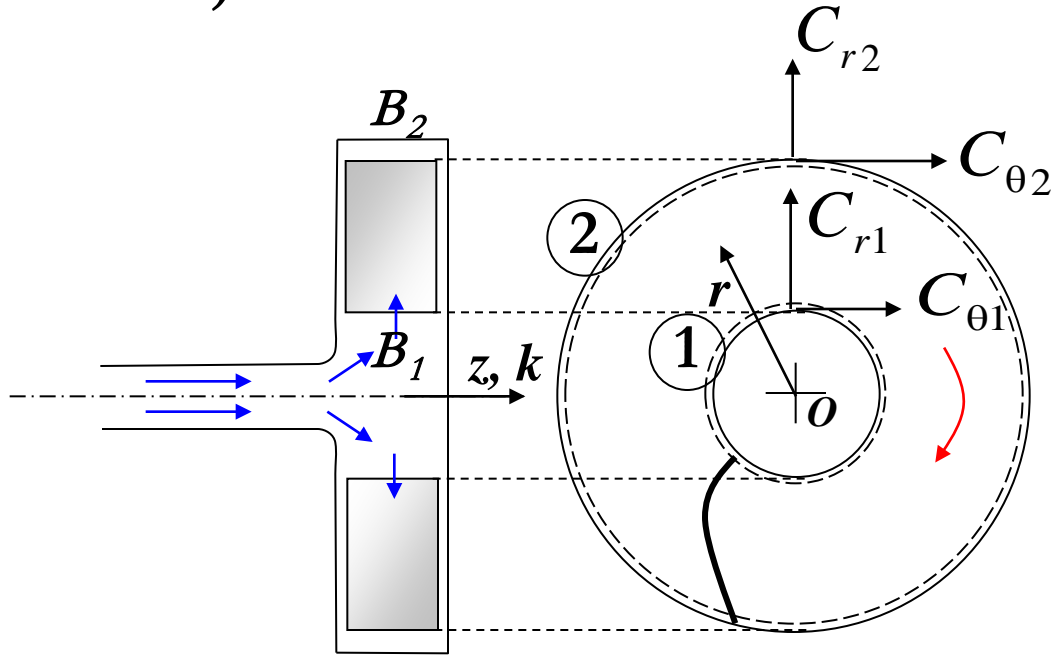
La ley de conservación de momento cinético al igual que la ley de Newton supone la velocidad  $V$  de la partícula relativa a un sistema de coordenadas inercial, si no es así, debe incluir el momento producido por los términos de aceleración de arrastre respecto al punto  $O$ .

$$\sum M_o = \sum (r \times F)_o - \int_{VC} (r x a_{arr}) dm$$

Así el caso más general del teorema del momento cinético para un volumen de control deformable y un sistema de coordenadas no inercial:

$$\sum (r x F)_o - \int_{VC} (r x a_{arr}) dm = \frac{d}{dt} \left( \int_{vc} r \times \vec{V} \rho dV \right) + \int_{SC} r \times \vec{V} \rho \vec{V}_r \cdot d\vec{A}$$

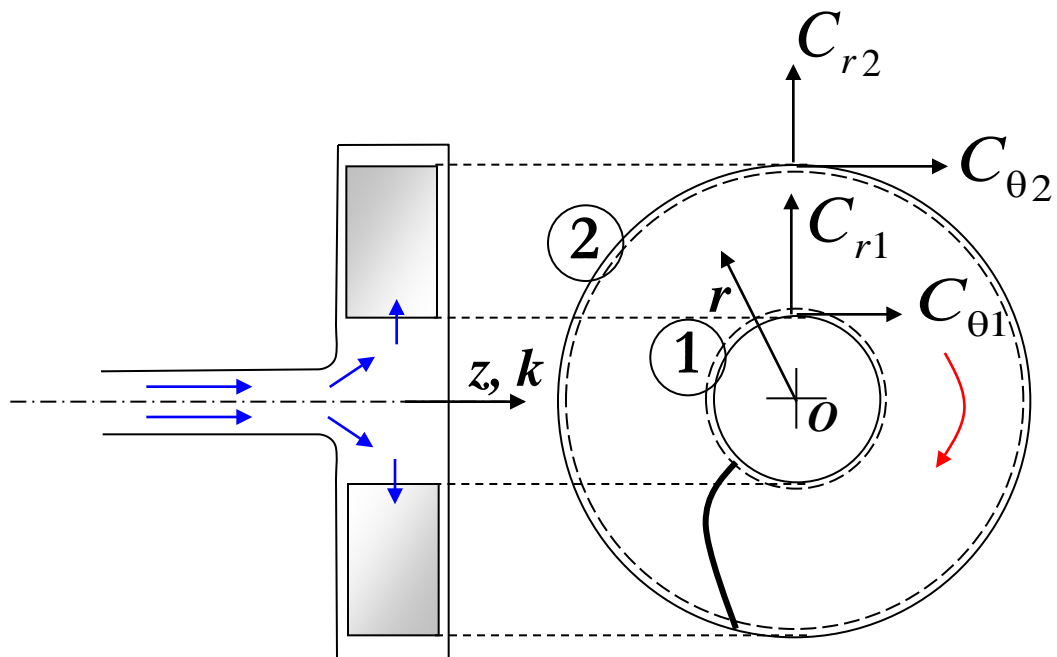
*Calcular el torque  $T_o$  que debe aplicarse a los alabes para producir el flujo a través de la bomba*



*El flujo es estacionario e incompresible*

$$\rho C_{r1} 2\pi r_1 B_1 = \rho C_{r2} 2\pi r_2 B_2$$

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dot{m}$$

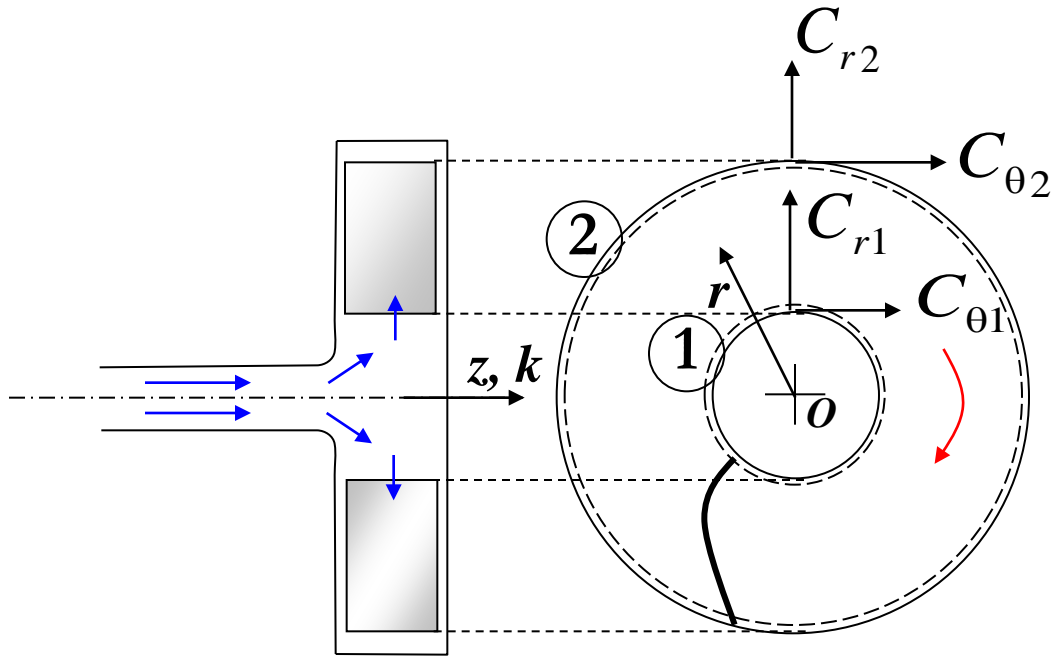


$$T_o = \int_{SC} r \times \vec{V} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

$$T_o = \dot{m}(r_2 \times C_2 - r_1 \times C_1)$$

$$|r_2 \times C_2| = r_2 C_2 \sin \theta_2 = r_2 C_{\theta 2} \sin 90^\circ$$

$$|r_1 \times C_1| = r_1 C_1 \sin \theta_2 = r_1 C_{\theta 1} \sin 90^\circ$$



$$T_o \hat{k} = \dot{m}(r_2 C_{\theta 2} - r_1 C_{\theta 1}) \hat{k}$$

$$\dot{W}_{mec} = \Omega . T_o = \Omega (r_2 C_{\theta 2} - r_1 C_{\theta 1}) \dot{m}$$

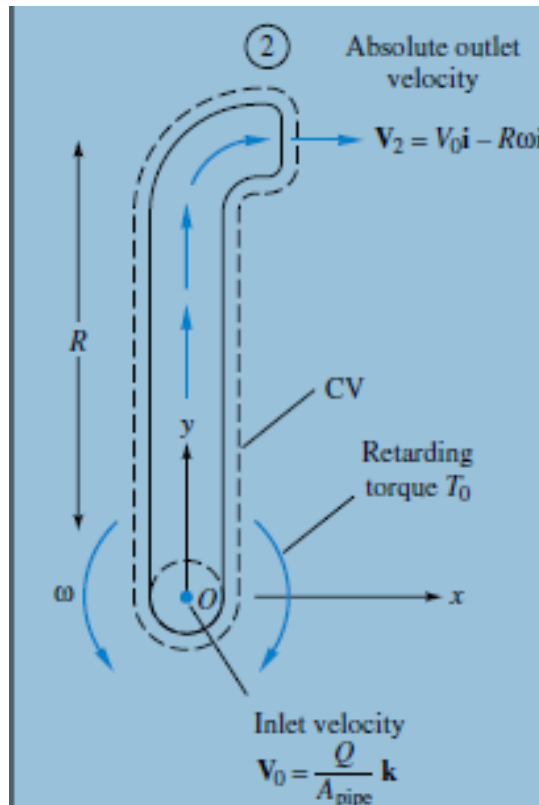
$$U_2 = \Omega r_2$$

$$U_1 = \Omega r_1$$

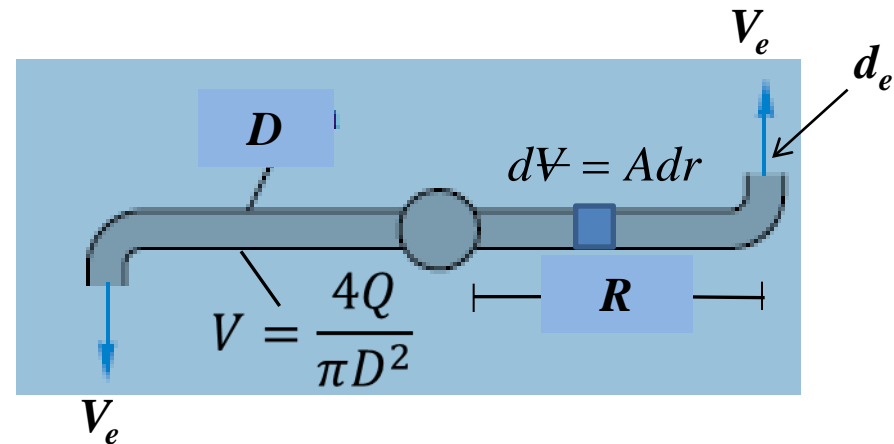
$$\dot{W}_{mec} = (U_2 C_{\theta 2} - U_1 C_{\theta 1}) \dot{m}$$



# Aplicación de la ecuación de momento cinético a un rociador de $N$ brazos



Rociador con  $N=1$



Rociador con  $N=2$

Un rociador con  $N$  brazos de longitud o radio  $R$  con toberas que forman un **ángulo recto con los brazos** y un **ángulo  $\theta$  con el suelo**. La razón de flujo total es  $Q_T = NQ$ , donde  $Q$  es el caudal que circula por cada brazo. El diámetro de salida de las toberas es  $d_e$  y el fluido sale de las toberas con velocidad  $V_e$ . Por continuidad se cumple:  $Q = V \frac{\pi D^4}{4} = V_e \frac{\pi d_e^2}{4}$

Aplicación de la ecuación de momento cinético a un rociador con  $N$  brazos.

Estudiando un solo brazo y multiplicando por  $N$  se tiene:

$$\sum (rxF)_o - \int_{VC} (rxa_{arr}) dm = \frac{d}{dt} \left( \int_{vc} r \times \vec{V} \rho dV \right) + \int_{SC} r \times \vec{V} \rho \vec{V}_r \cdot d\vec{A} \quad (1)$$

$$\sum M_o = \sum (rxF)_o = -T_f \hat{k}$$

$$\int_{VC} (rxa_{arr}) dm = \int_{VC} \left( rx \left( \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{d\Omega}{dt} xR + 2\Omega xV + \Omega x(\Omega x r) \right) \right) dm$$

$$\int_{VC} (rxa_{arr}) dm = \int_{VC} (rx(2\Omega xV)) dm = N \int_{VC} (r\hat{i} x (2\Omega \hat{k} x V\hat{i})) \rho dV$$

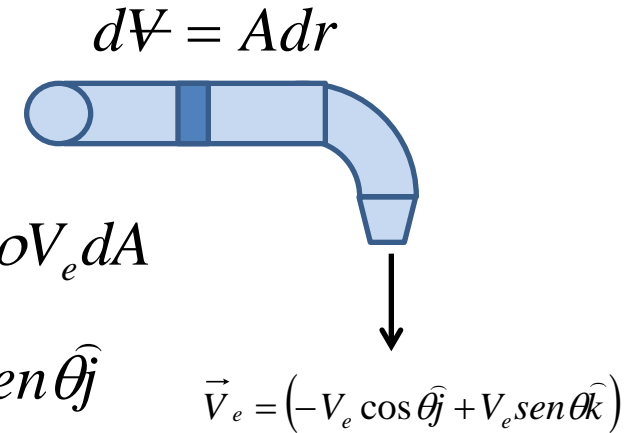
$$\int_{VC} (rxa_{arr}) dm = 2\Omega NV\rho A \int_0^R r dr \hat{k} = N\Omega \rho A V R^2 \hat{k}$$

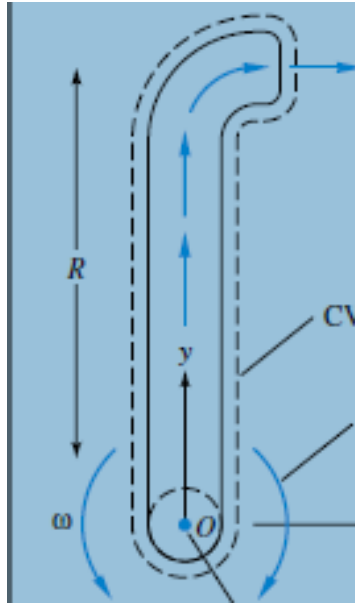
$$\int_{SC} r \times \vec{V} \rho \vec{V}_r \cdot d\vec{A} = N \int_{SC} R\hat{i} \times (-V_e \cos \theta \hat{j} + V_e \sin \theta \hat{k}) \rho V_e dA$$

$$\int_{SC} r \times \vec{V} \rho \vec{V}_r \cdot d\vec{A} = -N\rho V_e^2 A_e R \cos \theta \hat{k} - N\rho V_e^2 A_e R \sin \theta \hat{j}$$

Sustituyendo en (1) igualando las componentes en  $\hat{k}$

$$-T_f - N\Omega \rho A V R^2 = -N\rho V_e^2 A_e R \cos \theta \quad (2)$$





Aplicando la ecuación (2) en el caso de un rociador de un solo brazo  $N=1$ , con un torque por fricción importante. Con  $D=d_e$  y  $\theta = 0^\circ$ . Se cumple entonces  $Q_T = Q$ . Deducir la ecuación para la velocidad angular  $\Omega = ?$  En términos de la geometría y las propiedades.

Partiendo de la ecuación general:

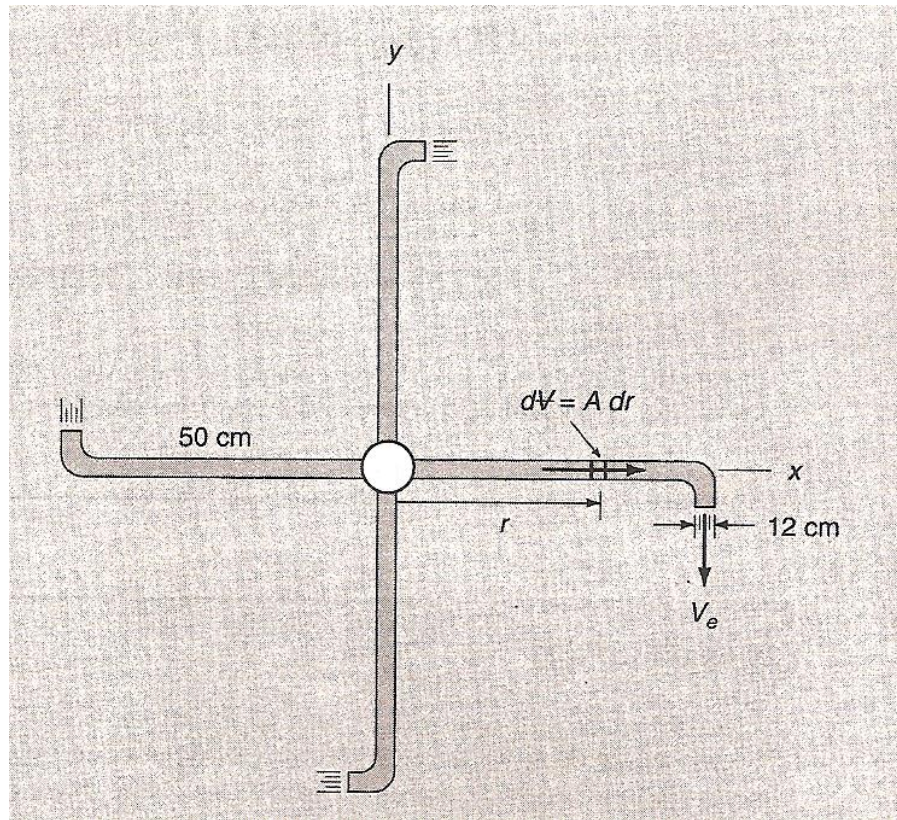
$$-T_f - N\Omega\rho AVR^2 = -N\rho V_e^2 A_e R \cos \theta$$

Aplicando las condiciones y despejando  $\Omega$  se tiene:

$$\Omega = \frac{V}{R} - \frac{T_f}{\rho AVR^2}$$

$$\Omega = \frac{V}{R} - \frac{T_f}{\rho QR^2}$$

Un rociador tiene cuatro brazos de 50 cm de longitud con toberas que forman un ángulo recto con los brazos y un ángulo de  $45^\circ$  con el suelo. Si la razón de flujo total es de  $0,001 \text{ m}^3/\text{s}$  y el diámetro de salida de las toberas es de 12 mm, calcule la velocidad de rotación del rociador. Haga caso omiso de la fricción.



# Ecuación Integral de Energía

Se obtiene aplicando el teorema de transporte de Reynolds a la primera ley de la termodinámica. En este caso la variable muda  $B=E$  y la energía por unidad de masa es

$$\beta = \frac{dE}{dm} = e$$

$$\frac{dE}{dt} = \dot{Q} - \dot{W} = \frac{d}{dt} \left( \int_{VC} e \rho dV \right) + \int_{SC} e \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

$$e = u + \frac{V^2}{2} + gz + e_{otras}$$

$e$  es la suma de la energía interna, cinética y potencial más otros tipos de energía referidas a cambios en la composición química, reacciones nucleares y efectos electrostáticos y magnéticos. Se desprecia este término y se consideran sólo los tres primeros. El termino de calor  $Q$  se dividiría en efectos de conducción, convección y radiación. Se usa el punto encima para indicar derivada temporal. El término de trabajo se puede dividir en tres partes:

$$\dot{W} = \dot{W}_{motor} + \dot{W}_{presión} + \dot{W}_{esfuerzos viscosos} = \dot{W}_s + \dot{W}_p + \dot{W}_v$$

El trabajo de las fuerzas gravitatorias ya ha sido incluido como energía potencial. El trabajo motor o trabajo de partes móviles es el trabajo realizado por una máquina (álabes o pistones, etc.) cuyo eje atraviesa la superficie de control hacia el interior del volumen de control, siempre presente en el cálculo de la actuación de la turbomáquinas. El trabajo de las fuerzas de presión se produce en la superficie, e igual a la fuerza elemental por la componente normal de la velocidad hacia el volumen de control.

# Ecuación Integral de Energía

El trabajo de presión total, por unidad de tiempo, es la integral sobre la superficie de control:

$$\dot{W}_p = \int_{SC} P \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

El trabajo debido a los esfuerzos viscosos sólo cuenta en la superficie y consiste en el producto de cada esfuerzo viscoso (uno normal y dos tangenciales) por la respectiva componente de velocidad. Este esfuerzo puede ser nulo en ciertos tipos particulares de superficies de control, como en paredes sólidas fijas donde  $V=0$ . En las entradas o salidas el flujo es aproximadamente normal al elemento de área, la única contribución procedería del esfuerzo normal, muy pequeños, salvo raras excepciones como por ejemplo, en el interior de una onda de choque. Es habitual despreciar el trabajo de los esfuerzos viscosos en las entradas y salidas del volumen de control. Fuera de la capa límite de una superficie de corriente, los esfuerzos viscosos son despreciables. El resultado global para el término de trabajo, consiste esencialmente de:

$$\dot{W} = \dot{W}_s + \int_{SC} P \vec{V} \cdot d\vec{A} - \int_{SC} (\tau \cdot V)_{SC} dA$$

El término de trabajo viscoso raras veces es importante. El trabajo de las fuerzas de presión puede incorporarse a los términos de flujo de energía, ya que ambos incluyen integrales de superficie. La ecuación de energía para un volumen de control queda entonces:

$$\dot{Q} - \dot{W}_s = \frac{d}{dt} \int_{VC} \left( u + \frac{V^2}{2} + gz \right) \rho dV + \int_{SC} \left( h + \frac{V^2}{2} + gz \right) \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

Se entiende  $u$  y  $h$  como la energía interna y la entalpía respectivamente.

# Aproximaciones unidimensionales de los términos de flujo de energía de la Ecuación Integral de Energía

Si el volumen de control tiene una serie de salidas y entradas unidimensionales, la integral de superficie se reduce a la suma de los flujos de salida menos los flujos de entrada:

$$\int_{SC} \left( h + \frac{V^2}{2} + gz \right) \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \sum_{sal} \left( h + \frac{V^2}{2} + gz \right) \dot{m}_{sal} - \sum_{ent} \left( h + \frac{V^2}{2} + gz \right) \dot{m}_{ent}$$

Donde  $h$ ,  $\frac{V^2}{2}$  y  $gz$  se toman como los valores medios en cada sección.

## Ecuación Integral de energía para flujo *estacionario* con flujos unidimensionales de los términos de flujo de energía, una entrada y una salida

$$\dot{Q} - \dot{W}_s = \left( h + \frac{V^2}{2} + gz \right)_{sal} \dot{m}_{sal} - \left( h + \frac{V^2}{2} + gz \right)_{ent} \dot{m}_{ent}$$

Por continuidad  $\dot{m}_{sal} = \dot{m}_{ent}$ , dividiendo todo entre  $\dot{m}$ , se tiene

$$q - w = \left( h + \frac{V^2}{2} + gz \right)_{sal} - \left( h + \frac{V^2}{2} + gz \right)_{ent}$$

Donde cada término tiene dimensiones de energía por unidad de masa, o velocidad al cuadrado. La entalpía de remanso en la entrada  $\left( h + \frac{V^2}{2} + gz \right)_{ent}$  difiere de la entalpía de remanso en la salida  $\left( h + \frac{V^2}{2} + gz \right)_{sal}$  sólo si hay transferencia de calor y trabajo de partes móviles y/o esfuerzos viscosos entre las secciones de entrada y salida. Recuerde que  $q$  es positivo si se comunica calor al fluido y  $w$  es positivo cuando el fluido realiza un trabajo sobre su entorno.



# Ecuación Integral de energía para flujo *estacionario* con flujos unidimensionales de los términos de flujo de energía, una entrada y una salida, aplicación a turbomáquinas térmicas

Las turbomáquinas térmicas son máquinas de fluido en las que el fluido, en los cuales la densidad no es constante (flujos compresibles) se mueve continuamente a través de ésta y el intercambio de energía entre el fluido y el rotor de la máquina se rige por el principio de conservación de momentun angular. Se puede suponer el flujo estacionario y usar las aproximaciones unidimensionales para el flujo que entra y sale. Por continuidad  $\dot{m}_{ent} = \dot{m}_{sal} = \dot{m}$ . Se puede suponer que el flujo de calor es despreciable debido al corto tiempo de paso de flujo a través de la maquina y a la baja conductividad térmica del fluido.

$$\begin{aligned} \dot{Q} - \dot{W}_s &= \frac{d}{dt} \int_{VC} e \rho dV + \int_{SC} \left( h + \frac{V^2}{2} + gz \right) \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \\ -\dot{W}_s &= \dot{m} \left[ \left( h + \frac{V^2}{2} + gz \right)_{sal} - \left( h + \frac{V^2}{2} + gz \right)_{ent} \right] \end{aligned}$$

El trabajo que se hace sobre el sistema es negativo, como en compresores y el trabajo que hace el sistema es positivo como en turbinas de gas y de vapor.

Para compresores:

$$\dot{W}_s = \dot{m} \left[ \left( h + \frac{V^2}{2} + gz \right)_{sal} - \left( h + \frac{V^2}{2} + gz \right)_{ent} \right]$$

Despreciando el cambio de energía potencial entre la entrada y la salida de la maquina y uniendo la entalpia estática con la energía cinética o entalpía dinámica para tener la entalpía total o de estancamiento  $h_0 = h + \frac{V^2}{2}$

$$\dot{W}_s = \dot{m} [h_{0sal} - h_{0ent}]$$

Para turbinas térmicas de gas o vapor:

$$\dot{W}_s = \dot{m} [h_{0ent} - h_{0sal}]$$



# Ecuación Integral de energía para flujo *estacionario* con flujos unidimensionales de los términos de flujo de energía, una entrada y una salida, flujo incompresible: *Ecuación de Bernoulli Generalizada*

El flujo de calor se desprecia debido al corto tiempo de permanencia del flujo a través de la máquina. El término de entalpía se escribe en términos de la energía interna más la energía de flujo  $h = u + \frac{P}{\rho}$ , donde  $\rho$  es la densidad del fluido.

El término de potencia de partes móviles se considera debido a la presencia en el sistema hidráulico de una bomba, un ventilador o una turbina hidráulica (Pelton, Francis, Kaplan). Designando la energía total del flujo que entra con el subíndice (1) y la energía total del flujo que sale con el subíndice (2) se tiene:

$$-\dot{W}_s = \dot{m} \left[ u_2 + \frac{P_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2 - u_1 - \left( \frac{P_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 \right) \right]$$

Observe que no se ha colocado subíndice a la densidad ya que el fluido se considera incompresible. Acomodando la ecuación y dividiendo todo entre  $\dot{m}g$  para que todos los términos queden expresados en dimensiones de energía por unidad de peso, es decir, carga o simplemente altura con la dimensión de longitud se tiene:

$$\frac{P_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 + H_{B,V} - H_T - \frac{(u_2 - u_1)}{g} = \frac{P_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2$$

El término  $\frac{(u_2 - u_1)}{g}$  representa el aumento de la energía interna por calentamiento debido a pérdidas por irreversibilidades entre las mismas capas de fluido y el fluido y las superficies sólidas a través de las cuales se mueve el fluido. Este término se denomina altura de pérdidas en el sistema  $h_{f1-2}$ . El término de  $H_S = \frac{\dot{W}_s}{\dot{m}g}$  se ha escrito en términos de  $+H_{B,V}$  o altura debido a bombas o ventiladores presentes en el sistema y  $-H_T$  o altura debido a una turbina hidráulica presente en el sistema hidráulico.

$$\frac{P_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 + H_{B,V} - H_T - h_{f1-2} = \frac{P_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2$$

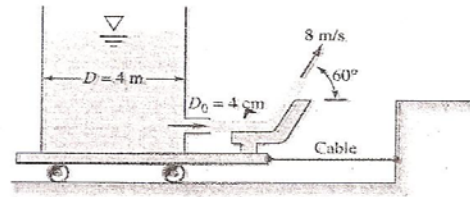
## ***Ecuación de Bernoulli Generalizada***

$$\frac{P_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 + H_{B,V} - H_T - h_{f1-2} = \frac{P_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2$$

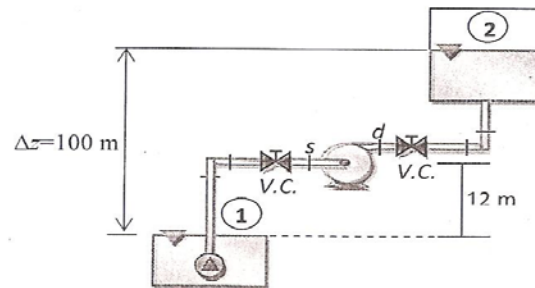
Esta es la ecuación de Bernoulli generalizada, la cual representa la ***energía total*** del flujo que entra (Energía de presión, cinética y potencial) más la altura o energía por unidad de peso que proporciona una bomba o ventilador presente en el sistema, menos la altura o energía por unidad de peso que absorbe una turbina hidráulica presente en el sistema menos la altura de *pérdidas primarias* que se producen en las tuberías o canales a través de los cuales se mueve el fluido y la altura de *pérdidas secundarias* que se producen en los accesorios como codos, expansiones, contracciones y válvulas presentes en el sistema, todo esto debe ser igual a la ***energía total*** del fluido que sale.

### 3er Parcial de Mecánica de Fluidos I

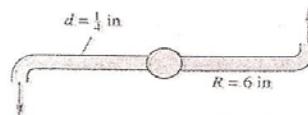
El depósito de agua de la figura está colocado sobre un carro sin fricción y alimenta un chorro de 4 cm de diámetro con una velocidad de 8 m/s que se deflecta  $60^\circ$  por medio de un álabe. Calcule la tensión del cable.



Calcule la potencia mecánica de una bomba que tiene una eficiencia de 86%. La bomba debe impulsar  $0.25 \text{ m}^3/\text{s}$  de agua a  $20^\circ\text{C}$ , el tanque de descarga esta presurizado a 50 KPa (manométrica) y se debe vencer una diferencia de altura geodésica de 100 m. Tanto la tubería de succión y descarga tienen 6 pulg de diámetro. La tubería de succión tiene 25 m de longitud y la de descarga 120 m. El coeficiente de fricción de Darcy se puede suponer igual 0.012. Calcule la presión a la salida de la bomba. Desprecie las pérdidas secundarias.



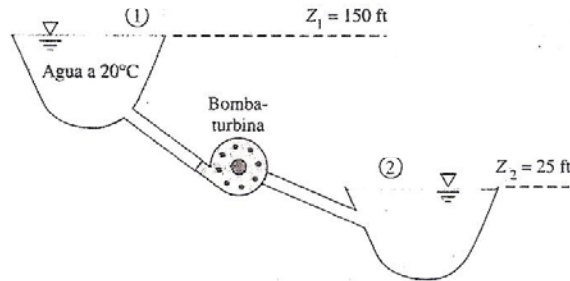
El aspersor de la figura tiene un caudal de agua de  $0.25 \text{ l/s}$  introducido verticalmente por su centro. Estime (a) el momento resistente que se requiere para evitar que los brazos giren y (b) la velocidad de rotación en revoluciones por minuto si no hay momento de retención.



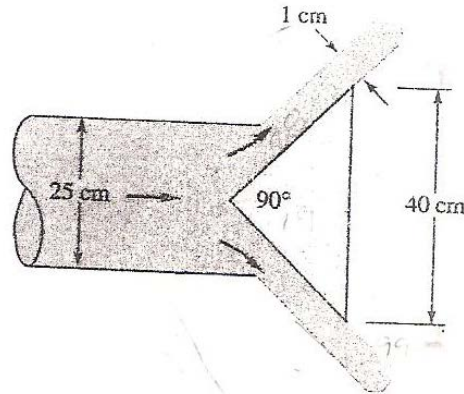
Un compresor aspira aire desde el ambiente a  $T_{01} = 293 \text{ K}$  y  $P_{01} = 100 \text{ KPa}$  y tiene una relación de presión  $P_{02}/P_{01} = 5$ . Calcule la potencia mínima o ideal y la potencia real requerida para comprimir entre los niveles de presión si la eficiencia interna del compresor es 85%. Las propiedades del aire son  $R = 287 \text{ J/KgK}$ ,  $C_p = 1005 \text{ J/KgK}$  y  $k = 1.4$ .

$$\dot{m} = 1 \text{ kg/s}$$

El sistema bomba-turbina de la figura admite agua del depósito superior para proporcionar energía a la ciudad. Por la noche bombea agua del depósito inferior al superior para restablecer la situación anterior. Para un caudal de diseño de 15000 gal/min en cada dirección, la pérdida de carga por fricción es de 17 pies. Estime la potencia en KW (a) extraída por la turbina y (b) requerida por la bomba.



Por un conducto de 25 cm de diámetro está circulando aire a 20°C y 1 atm con 15 m/s. La salida es interrumpida por un cono de 90° como se muestra en la figura. Estime la fuerza del aire sobre el cono.



Un flujo estacionario de aire circula por un tubo de 20 cm de diámetro y 1500 m de longitud. En la entrada  $P_1=120$  kPa,  $T_1=20^\circ\text{C}$  y  $V_1=17$  m/s mientras que en la salida  $V_2=41$  m/s. Calcular (a)  $\dot{m}$  (b)  $P_2$  (c)  $T_2$