CIRCUNFERENCIA

En el curso de Sistemas de Representación 10 se omite, por falta de tiempo, el tema correspondiente a la construcción y proyecciones de la circunferencia, base fundamental para el estudio de superficies de revolución. Ahora bien, para abordar este tema se requiere un conocimiento mínimo de los Módulos I y II de SR 10, por lo que se recomienda un repaso previo de los apuntes y ejercicios correspondientes.

La circunferencia es una curva cerrada y plana, que se define como el *lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan de otro punto, denominado centro de la circunferencia "O".* La distancia que separa a cada punto de la curva se llama *Radio de la circunferencia.*

La proyección cilíndrica ortogonal de una circunferencia sobre un plano depende de la relación existente entre el plano δ que contiene la curva y el plano de proyección, obteniéndose tres casos generales (Fig. 1):

1. Si el plano δ es paralelo al plano de proyección, la circunferencia se proyecta como otra circunferencia, de igual radio y de centro en la proyección del punto O.
2. Si el plano δ es perpendicular al plano de proyección, la circunferencia se proyecta como un segmento de recta de longitud igual al doble del radio de la curva (diámetro) confundido con la traza del plano δ. La proyección del centro se ubica en el punto medio del segmento de recta señalado.
3. Si el plano δ es oblicuo con relación al plano de proyección, se proyecta como una *elipse*, cuyo eje mayor corresponde al diámetro de la circunferencia que es paralelo al plano de proyección, y de eje menor, perpendicular al mayor, de longitud igual al diámetro multiplicado por el coseno del ángulo formado entre δ y el plano de proyección. El centro de la elipse será la proyección del centro de la circunferencia.

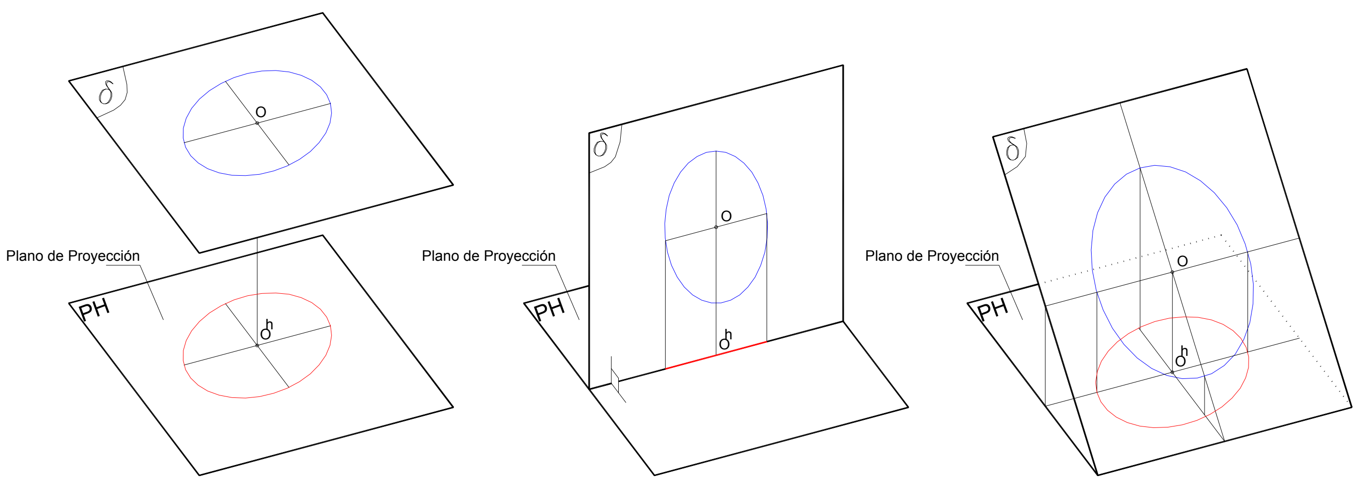

Fig. 1: Proyecciones de la circunferencia.

De lo anterior se infiere que la construcción de las proyecciones de diédricas de una circunferencia va a depender de la posición del plano δ que la contiene con respecto a los planos de proyección. En cualquier caso, siempre existirá un diámetro paralelo a PH, y por lo tanto en Verdadero tamaño en proyección horizontal, y otro paralelo a PV, cuyo Verdadero Tamaño se refleja en la proyección vertical. Estos dos *diámetros notables* son perpendiculares entre sí cuando el plano δ es proyectante horizontal, proyectante vertical o paralelo a LT, por lo que en cualquiera de estos casos, dichos diámetros son el eje mayor y el menor de las proyecciones de la circunferencia.

Si el plano δ que contiene la circunferencia se encuentra en posición accidental, los diámetros notables no son perpendiculares entre sí, y, en consecuencia, no son los ejes principales de las proyecciones.

En cualquiera de los casos señalados, siempre es posible determinar las proyecciones diédricas de una circunferencia si se conocen el centro de la curva y la magnitud de su radio.

Sea un plano δ en posición accidental (Fig. 2) y un punto O (centro de la circunferencia) perteneciente a él; supóngase que el radio de la curva R es conocido. El procedimiento para determinar las proyecciones diédricas de la circunferencia correspondiente es el siguiente:

Se comienza trazando por O las rectas características del plano δ (f y h), sobre las cuales se encuentran los diámetros notables. A partir de O^h se consigna el radio de la curva sobre la proyección horizontal de la recta h (a izquierda y derecha), obteniéndose los puntos 1^h y 2^h; alineando se hallan 1^v y 2^v sobre la proyección vertical de h. Luego, a partir de O^v se consigna el radio de la curva sobre la proyección vertical de la recta f y se procede de manera similar para encontrar las proyecciones diédricas de los puntos 3 y 4, extremos del diámetro paralelo a PV.

Obsérvese que 12 y 34 son diámetros no perpendiculares, que, en proyecciones, definen ejes conjugados. Si se construyen las elipses correspondientes, se obtienen las proyecciones diédricas de la circunferencia pedida.

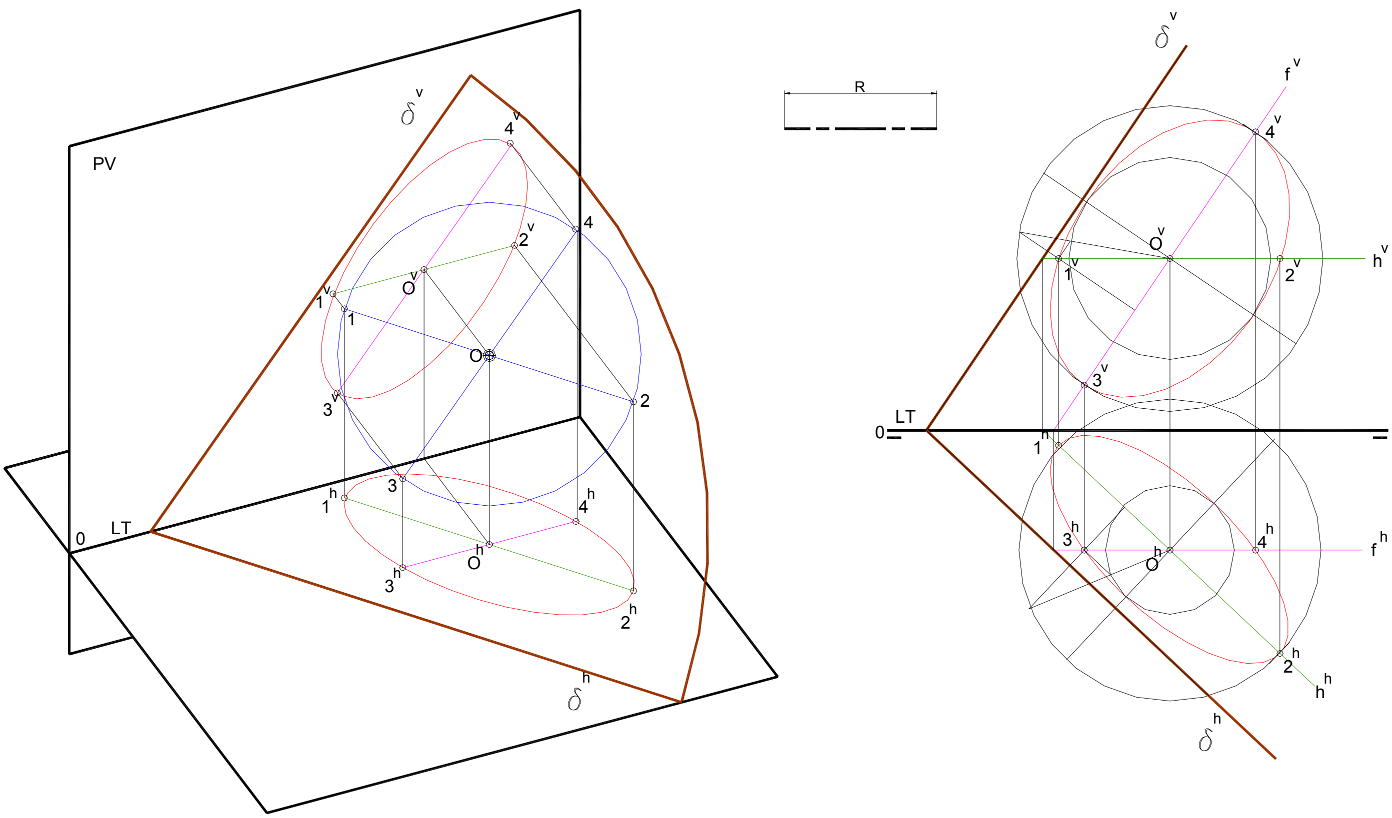

Fig.2: Circunferencia contenida en un plano en posición accidental.

Si la circunferencia esta contenida en un plano paralelo a la línea de tierra, uno de los diámetros notables será paralelo a LT y el otro de perfil; si el plano es proyectante horizontal, uno será de pié y el otro horizontal, y si el plano es proyectante vertical, uno de los diámetros notables será de punta y el otro frontal.

No se estudian las proyecciones de la circunferencia en planos en posiciones notables por tratarse de casos muy sencillos, dado que en estos casos las proyecciones son circunferencias o segmentos de rectas.

Nota: Para obtener información a cerca de la construcción de circunferencia y esfera consulte la sección Geometría Plana.

SUPERFICIES DE REVOLUCIÓN DE SIMPLE CURVATURA

Son superficies generadas por la rotación de una línea recta en torno a un eje determinado. Se clasifican en conos y cilindros.
La recta que realiza el movimiento e rotación recibe el nombre de *generatriz* y es coplanar con el eje; si sólo se considera un segmento de dicha recta, la superficie engendrada tendrá una altura determinada.

La construcción geométrica y representación en el Sistema Diédrico de estas superficies, requiere de un conocimiento suficiente por parte del estudiante de todos los temas abordados en la asignatura SR 10, por lo que se recomienda un repaso previo de los apuntes y ejercicios correspondientes.

Cilindro de Revolución

Si la recta generatriz es paralela al eje de revolución, la superficie engendrada es un cilindro de revolución (Fig. 3). Considerando un segmento de la generatriz de longitud H, se obtiene una superficie limitada en la que H es la altura del cilindro. Los extremos del segmento de generatriz describen circunferencias llamadas *directrices.* Los planos sobre los que descansan ambas directrices son paralelos entre sí y perpendiculares al eje del cilindro y a todas sus generatrices.

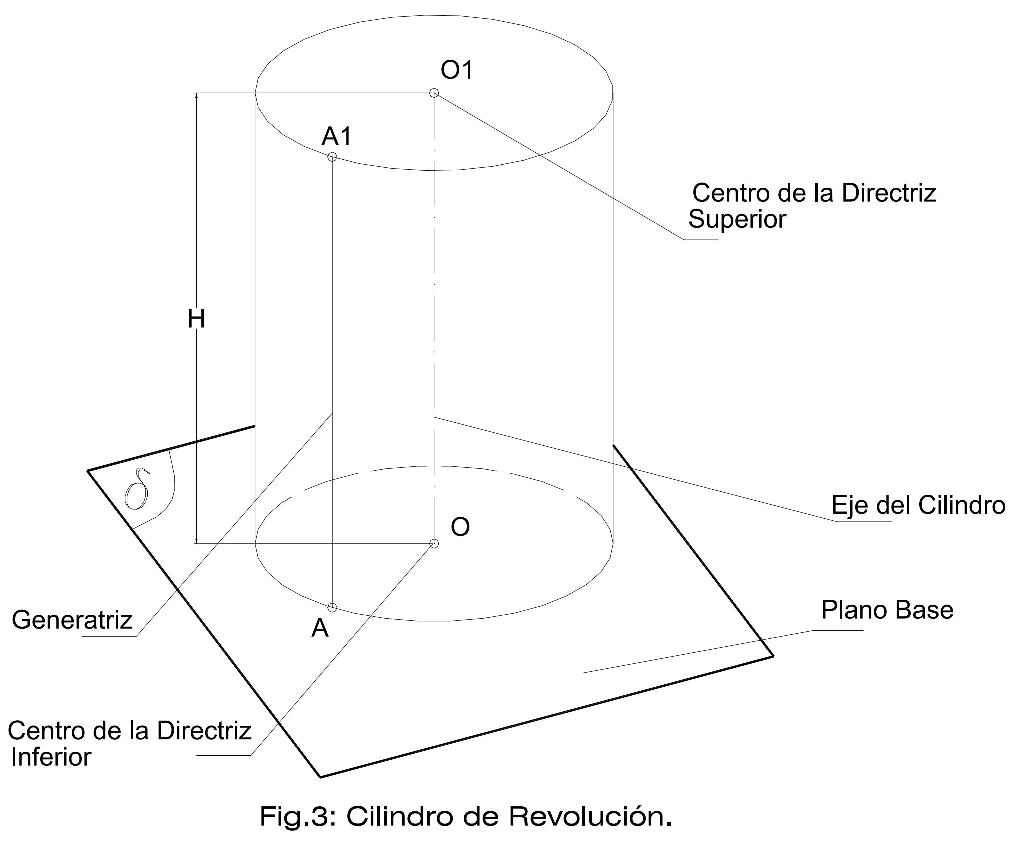

Fig.3: Cilindro de Revolución.

Si se realiza un corte a un cilindro de revolución mediante un plano π perpendicular al plano de base se obtiene una sección rectangular que puede ser de dos tipos:

Sección Sencilla: Se genera si el plano π corta al cilindro sin pasar por el eje del sólido. La figura resultante es un rectángulo de lados menores (AB y A1B1) iguales a una cuerda de la directriz y de lados mayores (AA1 y BB1) iguales a la altura del cilindro (Fig. 4-a).

Sección Principal: Se genera si el plano π contiene al eje del cilindro. La figura resultante es un rectángulo cuyos lados menores (AB y A1B1) son del tamaño del diámetro e la directriz, en tanto que los lados mayores (AA1 y BB1) son iguales a la altura del sólido (Fig. 4-b).

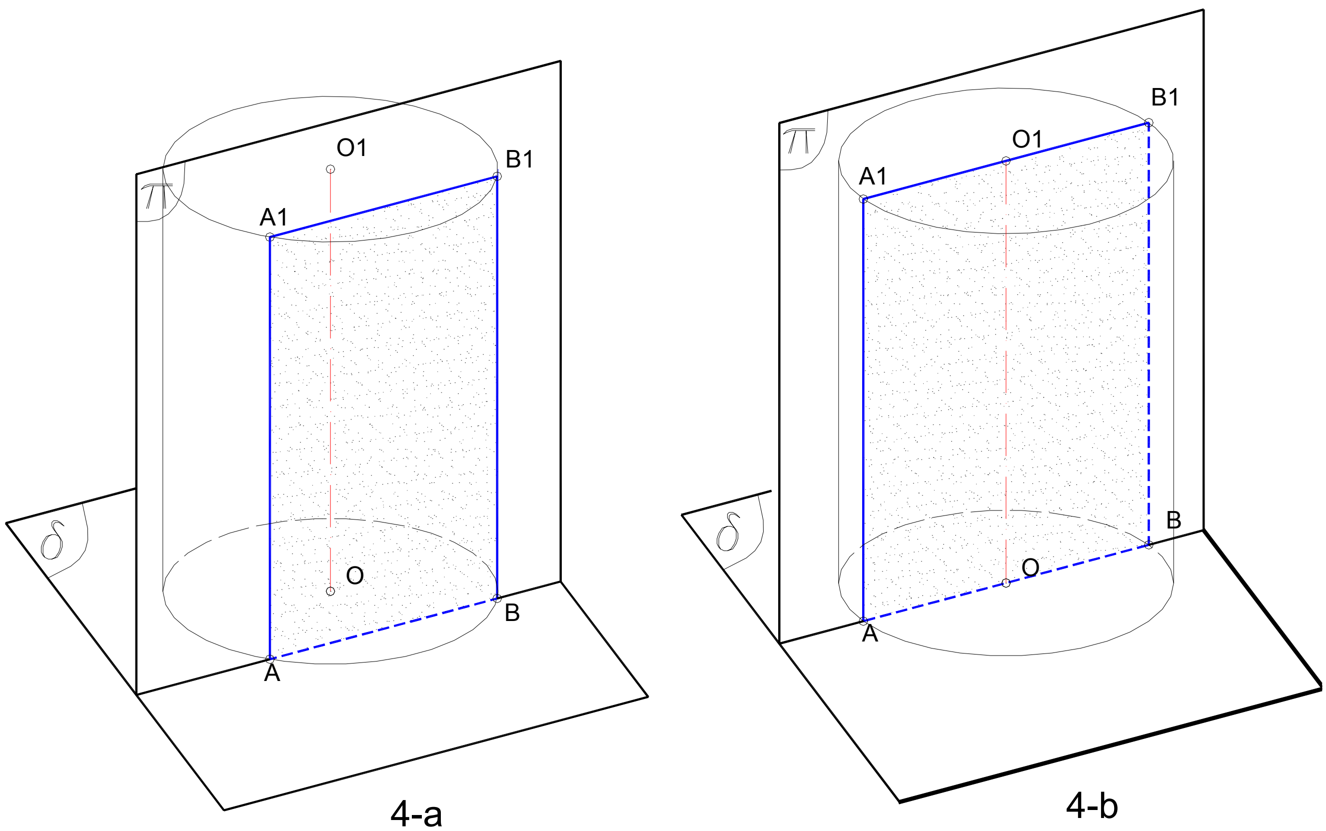

Fig.4: Secciones Rectangulares del cilindro de revolución.

Si se estudia el caso límite en el que los segmentos AB y A1B1 se reducen a dos puntos T y T1, el plano π resulta ser tangente al cilindro según la generatriz TT1 y será llamado, entonces, plano τ (Fig. 5). En tal situación, el punto T viene a ser la intersección entre tres planos: el de base δ, el de tangencia τ, y un plano de sección principal π; estos tres planos conforman un *triedro trirrectangular,* pues son perpendiculares entre sí.

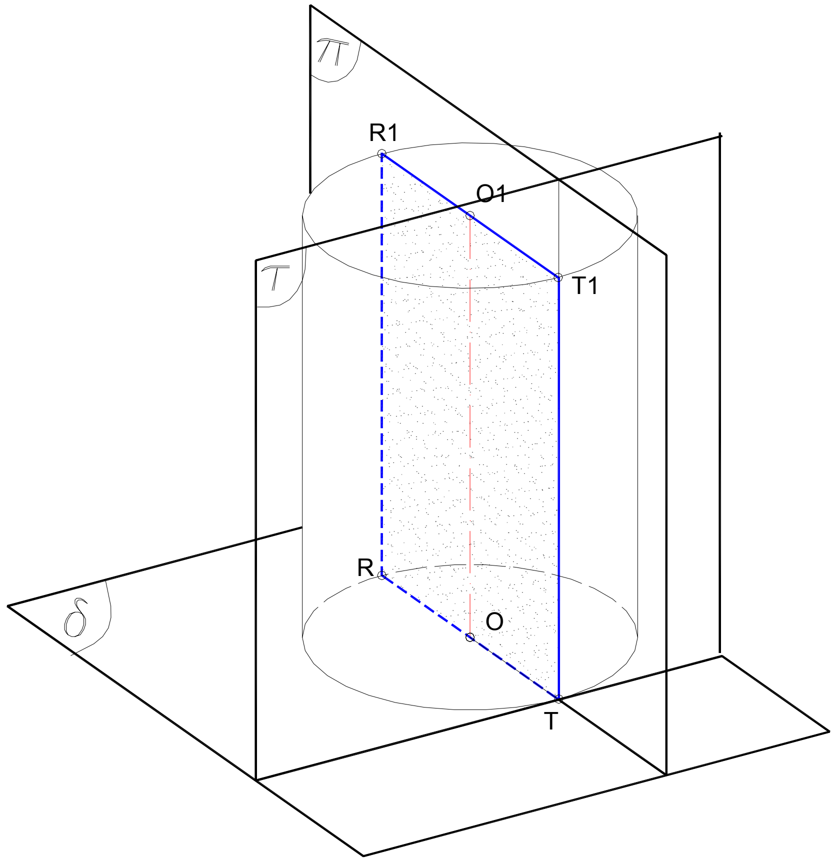

Fig.5: Plano tangente a un cilindro de revolución.

Para construir un plano tangente a un cilindro de revolución que pase por un punto K del espacio se procede de la siguiente manera:
Primero se traza por el punto K una recta “m” paralela al eje del sólido y se determina su intersección I con el plano de base δ. Luego, se construye una recta “t” tangente a la directriz del cilindro que pase por el punto I (hay dos soluciones). El plano definido por las rectas “m” y “t” es tangente al sólido; la generatriz de tangencia es aquella que pasa por el punto de tangencia T de la recta “t” a la directriz (Fig. 6).

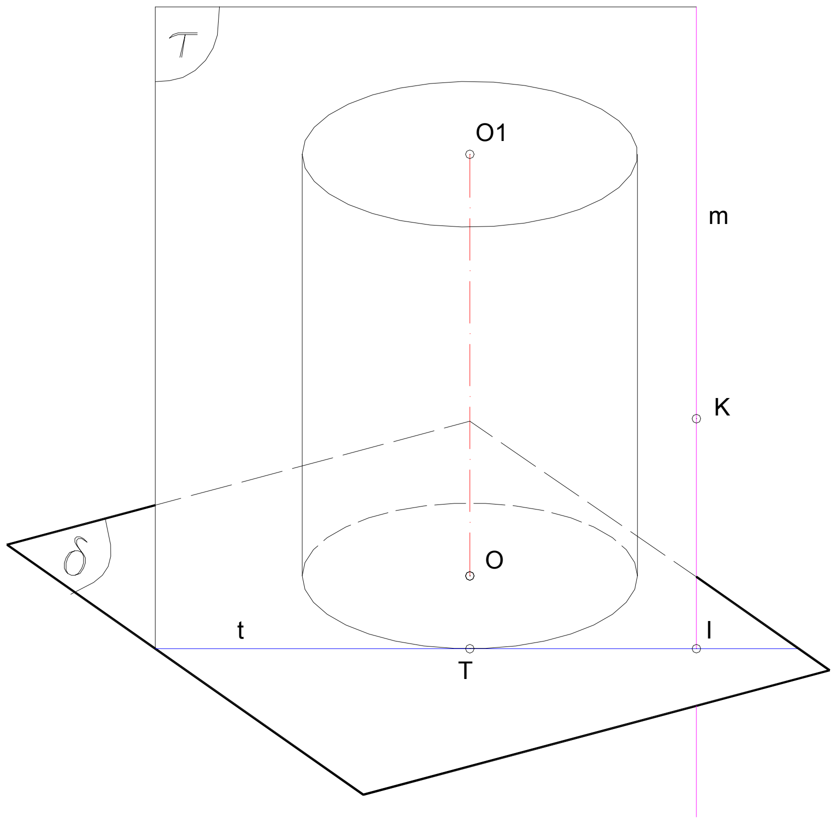

Fig.6: Plano tangente a un cilindro de revolución que pasa por un punto K del espacio.

Considérese un plano β secante a un cilindro de revolución que no es paralelo al eje, sino que es perpendicular. En este caso, la sección producida es una circunferencia idéntica a la directriz, de centro en la intersección del eje del cilindro con el plano β.

Ahora bien, si el plano β es oblicuo con respecto al eje del sólido, la sección resultante es una elipse, cuyo eje mayor es perpendicular la recta de intersección entre el plano secante y el plano δ que contiene la directriz, y, en consecuencia, su eje menor será paralelo a dicha recta. Entre la curva directriz (circunferencia) y la sección (elipse) se establece una relación de homología, de vértice en el corte de las generatrices (impropio) y eje en la recta de intersección de δ y β. La determinación de los ejes principales de la sección elíptica se realiza aprovechando tal situación; el procedimiento es el siguiente (Fig. 7):

En un principio es necesario determinar la intersección “e” (eje de la homología) entre el plano de base δ del cilindro y el plano secante β. Seguidamente, se traza una recta paralela al eje de homología por el centro O de la directriz del cilindro, la cual define el diámetro 12. Luego, se traza por O una recta perpendicular al eje de homología, para ello de determina una cuerda cualquiera de la directriz (PQ en la figura) y su punto medio M; la recta definida por M y O, es perpendicular a “e” y define al diámetro 34. Los puntos homólogos de 1 y 2 son los extremos del eje mayor de la elipse de sección, en tanto que los homólogos de 3 y 4 serán los extremos del eje menor.
Para encontrar los homólogos de 1, 2, 3 y 4, es necesario conocer al menos uno de ellos, por lo que se procede a intersecar una de las generatrices que pasan por esos puntos con el plano secante β; también se puede buscar la intersección del eje del cilindro con β, ya que el homólogo de O es el centro de la elipse de sección.

Supóngase que se ha encontrado el punto 1' por intersección entre recta y plano. El siguiente paso es trazar una recta que pase por el punto 1 (cuyo homólogo es conocido) y, por ejemplo, 2 (cuyo homólogo se desconoce). Esta recta corta al eje de homología en K, punto que debe ser unido con 1' a través de una segunda recta, que, al cortar la generatriz correspondiente a 2, genera el punto 2', homólogo de aquél.
El punto medio del segmento 1'2' es el centro O' de la elipse, y, como el segmento 34 es paralelo a "e", 3'4' se halla trazando por O' una paralela a 34 que corte a las generatrices del cilindro que pasan por 3 y 4.
Los puntos 5 y 6 son los pies de las generatrices de contorno de la proyección. Sus homólogos 5' y 6' se encuentran con un procedimiento análogo al utilizado para hallar el punto 2'.
En las proyecciones diédricas el trazado de la curva se puede realizar aplicando el *Método del Paralelogramo,* ya que los ejes de la elipse generalmente no se proyectan en verdadero tamaño.

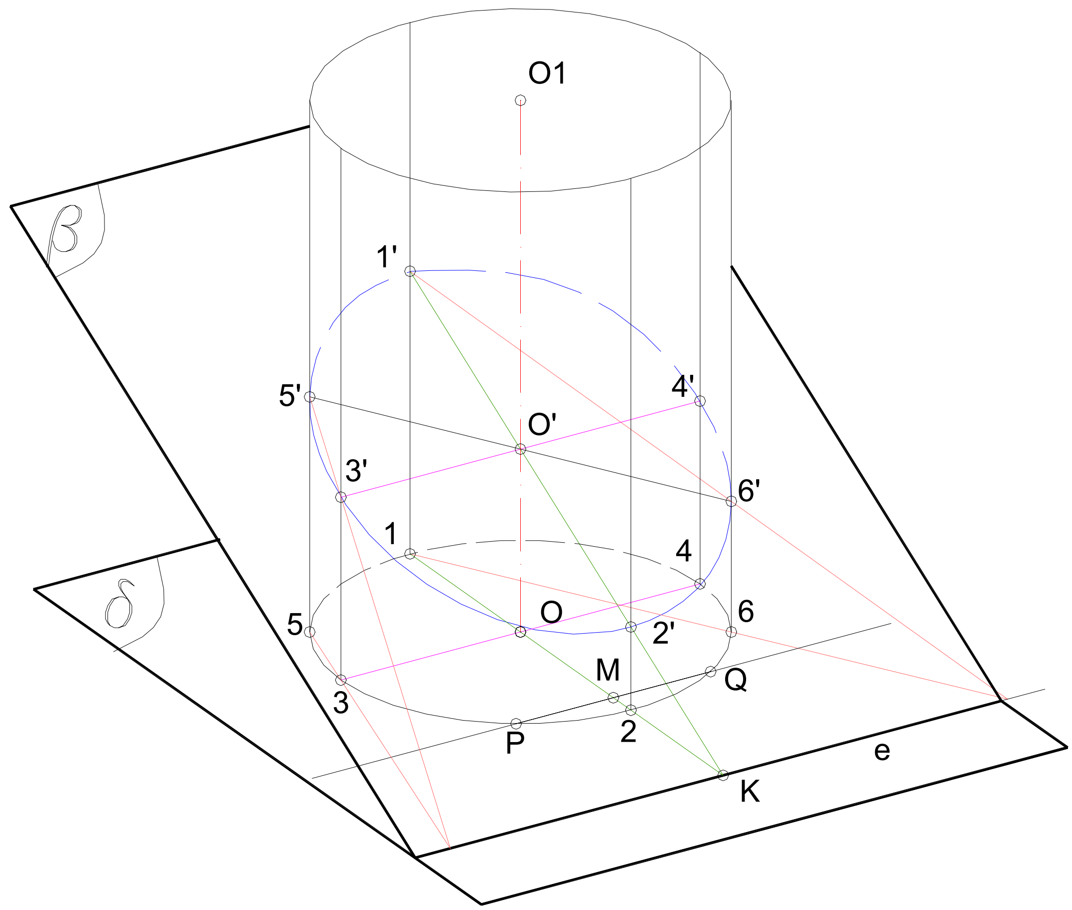

Fig. 7: Sección elíptica de cilindro de revolución.

Cono de Revolución

Si la recta generatriz corta al eje de revolución, la superficie engendrada es un cono de revolución (Fig. 8), siendo el punto de corte el *Vértice* del cono. Si se considera un segmento VA de la generatriz se obtiene una superficie limitada que encierra un volumen determinado (sólido), el cual constituye el elemento a representarse en SR 20.

La circunferencia descrita por el punto A (directriz del cono) se encuentra en un plano δ perpendicular al eje de revolución, el cual es definido por el vértice V y el centro O de dicha circunferencia; la distancia entre los puntos O y V es la altura H del sólido, relacionada con la longitud del segmento de generatriz VA a través del ángulo ψ formado entre esta recta y el plano de la directriz δ.

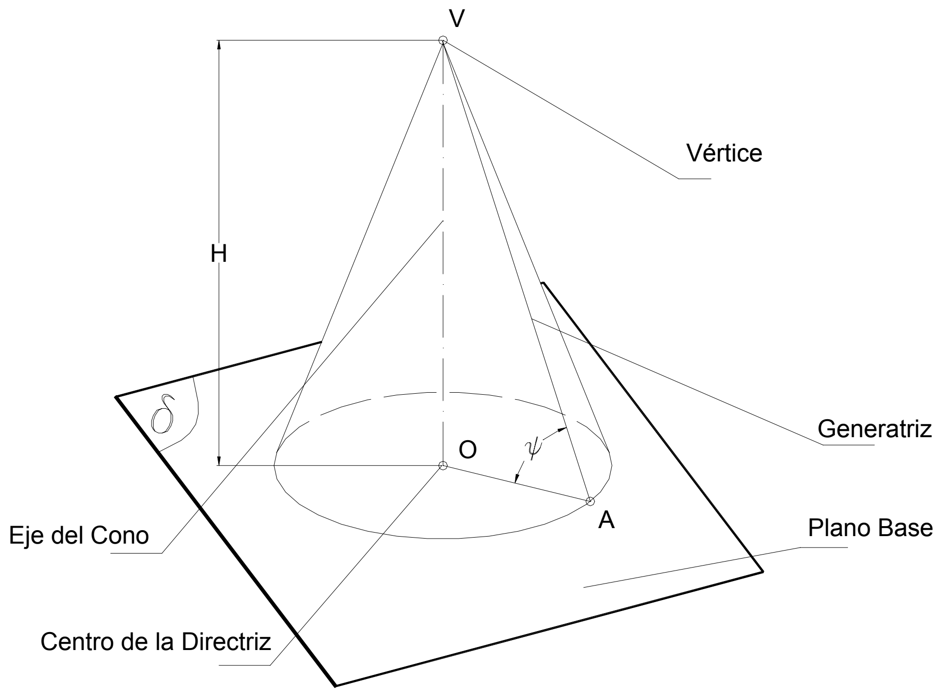

Fig. 8: Cono de Revolución.

Si se realiza un corte a un cono de revolución mediante un plano π que pase por el vértice V y que forme con el plano base un ángulo mayor que el de las generatrices (ψ), se obtiene una sección triangular que puede ser de dos tipos:

- **Sección Sencilla**: Se genera si el plano π corta al cono sin pasar por el eje del sólido. La figura resultante es un triángulo generalmente isósceles – es posible que sea equilátero - cuyos lados iguales (VA y VB) son generatrices, en tanto que el tercer lado (AB) es una cuerda de la directriz del cono (Fig. 9-a) contenida en la intersección de los planos π y δ.
- **Sección Principal**: Se genera si el plano π contiene al eje del cono y es, en consecuencia, perpendicular al plano de la directriz. La figura resultante es un triángulo generalmente isósceles – es posible que sea equilátero - cuyos lados iguales (VA y VB) son generatrices opuestas, en tanto que el tercer lado es un diámetro de la directriz del cono (Fig. 9-b) contenido en la intersección de los planos π y δ.

Por otra parte, es posible que el plano π no produzca una sección en el cono. Esta situación se presenta si el ángulo formado entre el plano π y el plano de la directriz es menor que el ángulo formado entre las generatrices del cono y este último plano. La intersección entre el plano π y el sólido será un punto (el vértice), en tanto que la recta de intersección entre los planos π y δ es exterior a la directriz.

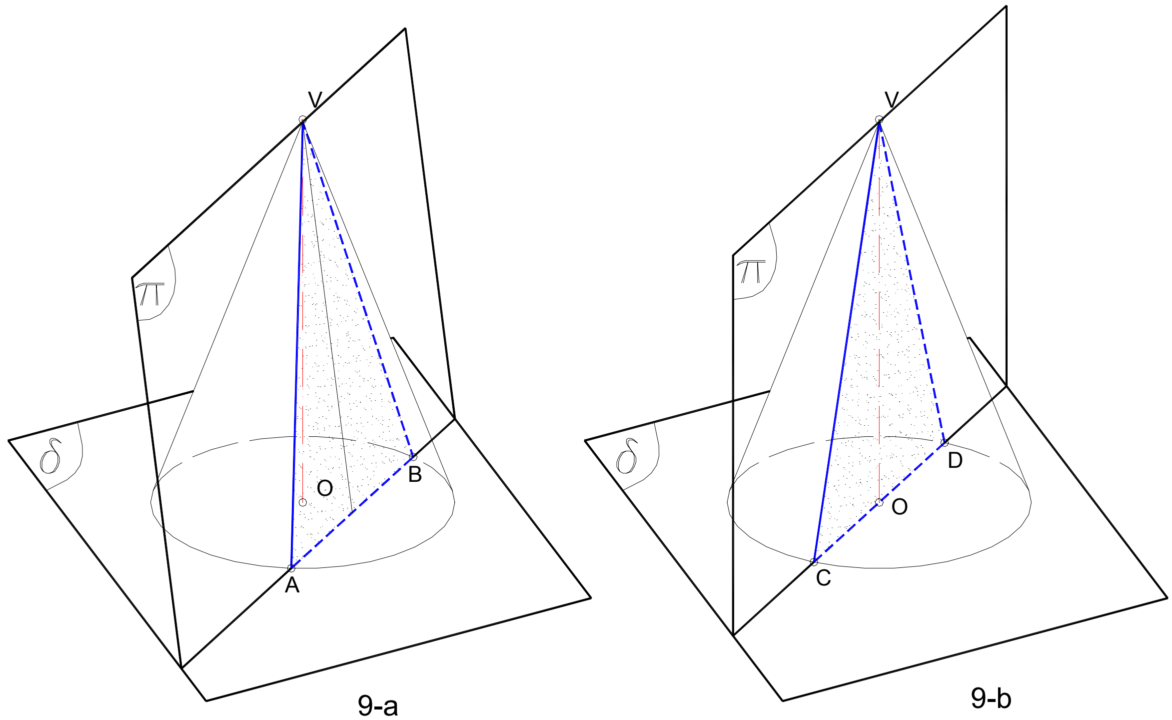

Fig. 9: Secciones Triangulares del Cono de revolución.

Si el segmento AB se reduce a un punto T, se obtiene el caso límite en el que el plano π es tangente al cono según la generatriz VT y será llamado, entonces, plano τ (Fig. 10). Al igual que en la situación de plano tangente a un cilindro, el punto T viene a ser la intersección entre tres planos: el de la directriz o de base δ, el de tangencia τ, y un plano de sección principal π. Se observa que el plano de tangencia es perpendicular al de sección principal y que forma un ángulo ψ con el de la directriz, igual al ángulo formado entre las generatrices del cono (VT entre ellas) y este último plano.

Para construir un plano tangente a un cono de revolución que pase por un punto K del espacio se procede de la siguiente manera:
Primero se traza por el punto K una recta "m" que pase por el vértice del sólido y se determina su intersección I con el plano de base δ. Luego, se construye una recta "t" tangente a la directriz del cono que pase por el punto I (hay dos soluciones). El plano definido por las rectas "m" y "t" es tangente al sólido; la generatriz de tangencia es aquella que pasa por el punto de tangencia T de la recta "t" a la directriz (Fig. 11).

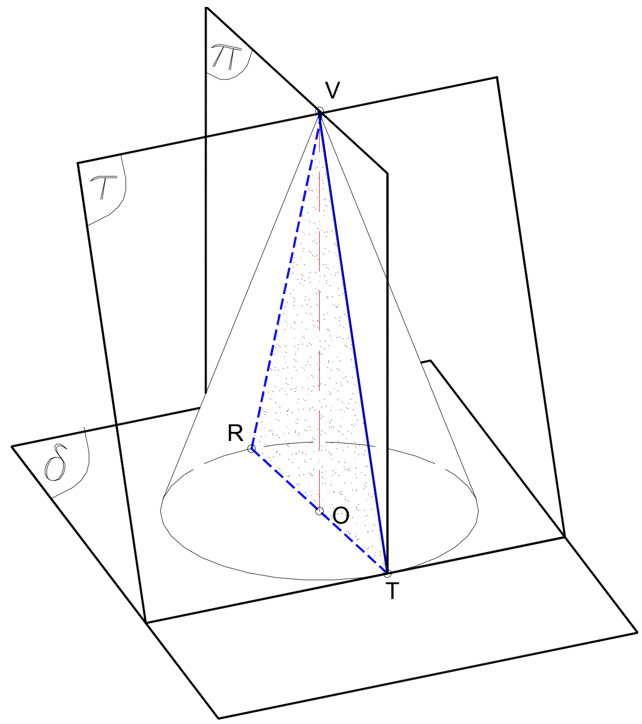

Fig. 10: Plano tangente a un cono de revolución.

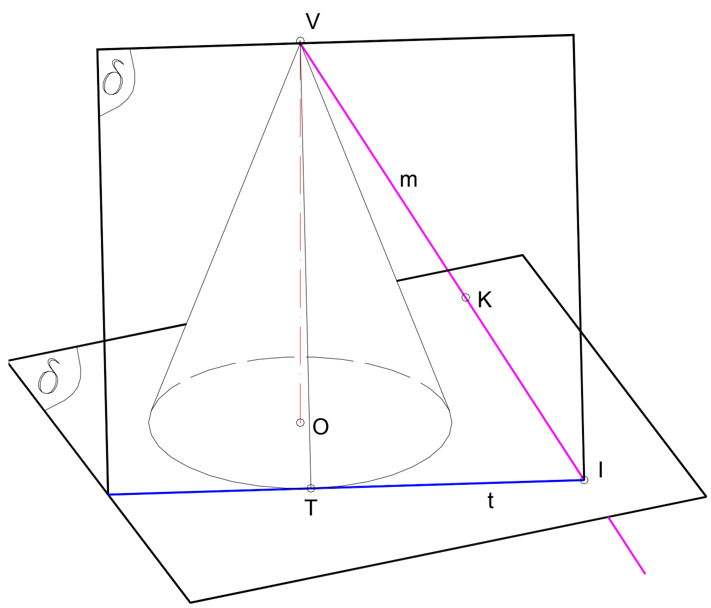

Fig. 11: Plano tangente a un cono de revolución que pasa por un punto K del espacio.

Considérese un plano β secante a un cono de revolución que no pasa por el vértice y que es perpendicular al eje del sólido. En este caso, la sección producida es una circunferencia de centro O' en la intersección del eje del cilindro con el plano β, y de radio igual a la distancia VO' dividida por la tangente del ángulo ψ.

Ahora bien, si el plano β no pasa por el vértice y no es perpendicular al eje del cono, la sección resultante puede ser:

- Elipse: si el plano β forma con el plano base un ángulo θ menor que el ángulo ψ formado entre las generatrices y éste último plano.
- Parábola: si el plano β forma con el plano base un ángulo θ igual al ángulo ψ formado entre las generatrices y éste último plano.
- Hipérbola: si el plano β forma con el plano base un ángulo θ mayor que el ángulo ψ formado entre las generatrices y éste último plano.

No siempre resulta sencillo comparar los valores angulares de θ y ψ cuando se estudian las proyecciones, puesto que se requiere una vista en la que los planos base y secante aparezcan de canto (como rectas). Por tal motivo, se prefiere el uso del siguiente método:
Se construye un plano β' paralelo al plano secante β y que pase por el vértice del cono; luego se procede a intersecar los planos β' y δ (plano base), lo que resulta en una recta "i". Si esta recta es exterior a la directriz del cono, la sección producida es elíptica, pues el plano auxiliar β' no contiene a ninguna de las generatrices; si es tangente, se trata de una sección parabólica, dado que β' es tangente al cono; finalmente, si la recta "i" es secante a la directriz, el plano β genera una sección hiperbólica, ya que el plano β' contiene a dos generatrices del sólido (Fig. 12)

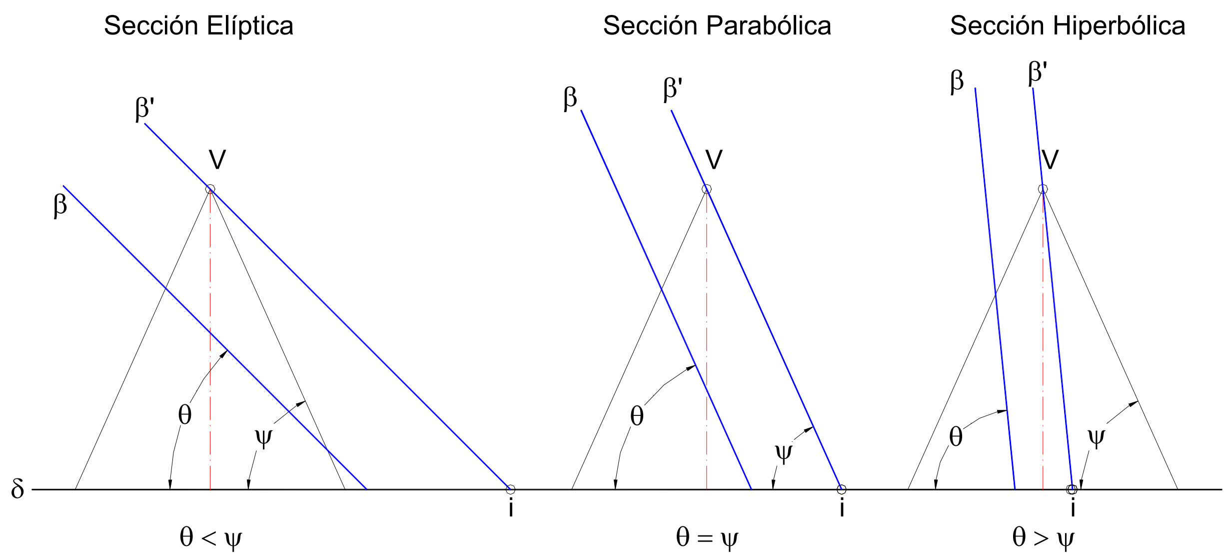

Fig. 12: Determinación de la naturaleza de la sección cónica.

Procedimientos para la determinación de las cónicas de sección

Sección Elíptica (Fig.13): En primer lugar es necesario determinar la naturaleza de la sección que produce el plano β en el cono, aplicando el procedimiento antes señalado. En seguida se procede a hallar la recta de intersección entre el plano secante y el plano base ("e"), la cual constituye el eje de la homología que se verifica entre la directriz del cono y la sección elíptica que se está buscando; el eje mayor de la elipse será perpendicular a dicho eje de homología, en tanto que su eje menor será paralelo a él. Atendiendo a esta realidad, se construye un diámetro 12 perpendicular a "e" y se determina la intersección entre la generatriz V2 (o la V1) con el plano β; el punto resultante es 2', homólogo de 2. Luego, se halla el corte K entre la dirección 12 y el eje de la homología; la intersección entre la recta definida por K y 2' y la generatriz V1 resulta en el punto 1', homólogo de 1. El punto medio M' del segmento 1'2' (eje mayor de la elipse) es el centro de la sección; hay que destacar que dicho punto **no es el homólogo del centro O de la directriz.** A continuación se dibuja la recta definida por el vértice y el punto M'; el corte entre esa recta y el diámetro 12 es el punto M, homólogo de M'. Si se traza una paralela al eje de la homología por el punto M, se obtiene la cuerda 34 de la directriz; los homólogos de 3 y 4 (3' y 4') se hallan trazando por M' una paralela a "e" que corta a las generatrices V3 y V4. Finalmente, los puntos 5 y 6 son los pies de las generatrices de contorno de la proyección. Sus homólogos 5' y 6' se encuentran con un procedimiento análogo al utilizado para hallar el punto 1'.

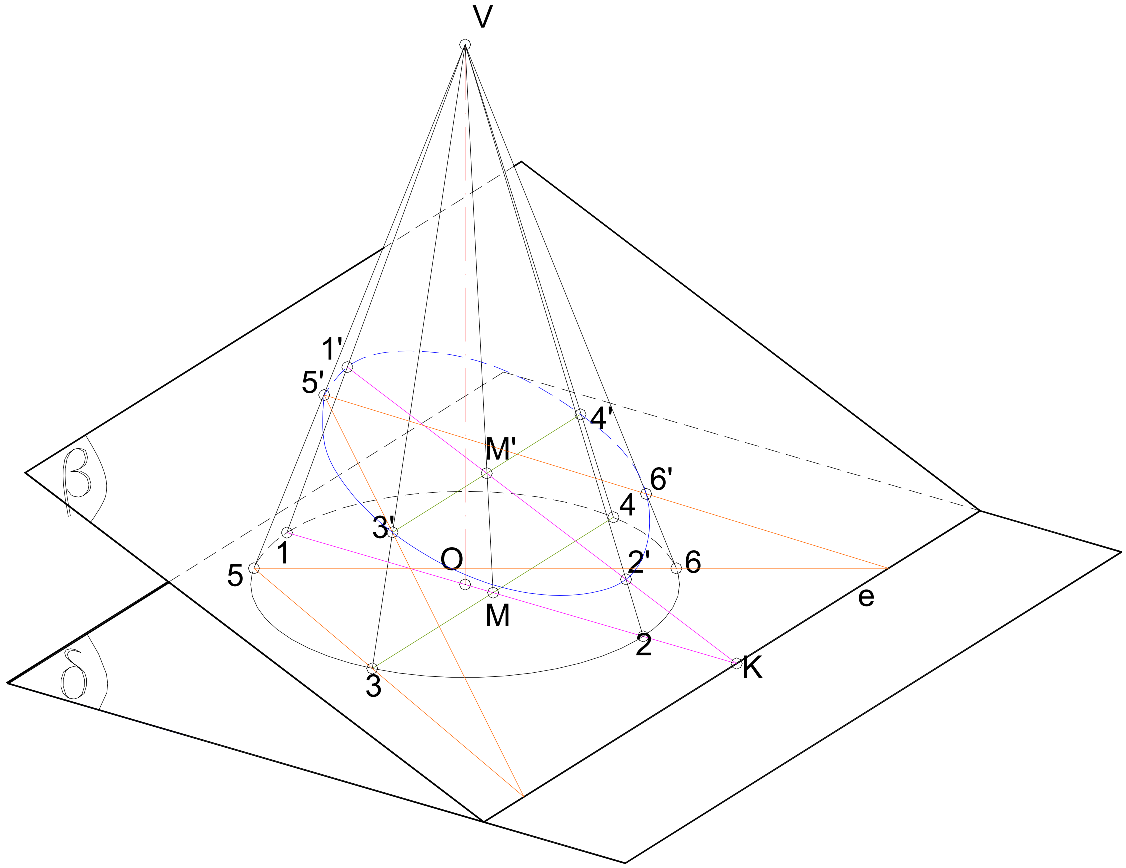

Fig. 13: Sección Elíptica.

<u>Sección Parabólica</u> (Fig. 14): En es te caso, el plano secante corta a todas las generatrices del cono menos una. Se comienza trazando el plano β'(paralelo a β y pasa por V) y determinando la recta de intersección "i" entre ese plano y el plano base, así como también la recta "e", intersección entre el plano secante β y el mencionado plano base (eje de la homología). La recta "i" resulta ser tangente a la directriz del cono en un punto T; la generatriz de tangencia VT es paralela al plano secante y su dirección es la misma que la del eje de la parábola. El opuesto de T – punto 1 en la figura – es el pié de la generatriz que contiene al vértice de la curva 1'. El eje de la homología "e" define en la directriz del cono una cuerda cuyos extremos 2 y 3 coinciden con los puntos homólogos 2' y 3', que conforman una cuerda de la parábola perpendicular a su eje. Para determinar el vértice 1' de la cónica se traza por el punto medio del segmento 23 (M) una recta paralela a la generatriz VT; el corte entre esa recta y la generatriz V1 es el punto buscado.
Para encontrar el punto de cambio de visibilidad de la sección 4', se une el punto 4 con T, luego, por el punto de corte K entre la dirección 4T y el eje de la homología, se traza una paralela a la generatriz VT – el homólogo de T es un punto impropio – que al cortar a la

generatriz V4 resulta en el punto buscado. Nótese como el punto de cambio de visibilidad 5' se va a encontrar por debajo del plano base en la prolongación de la superficie cónica.

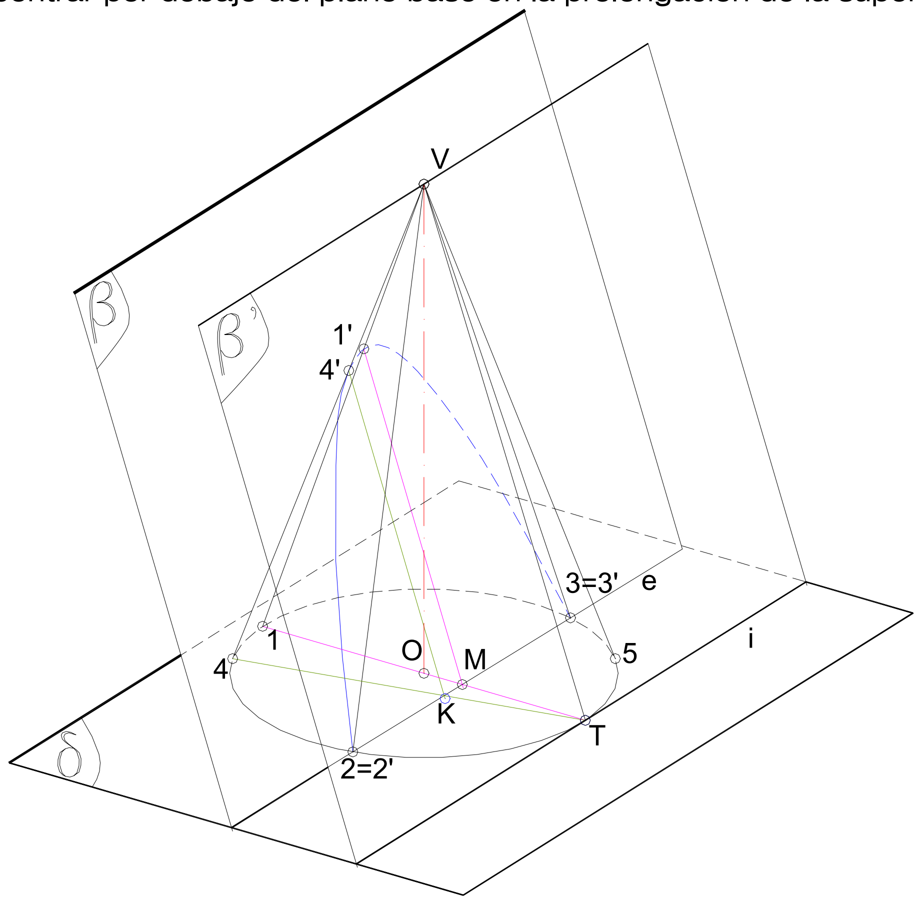

Fig. 14: Sección Parabólica.

Sección Hiperbólica (Fig. 15): En es te caso, el plano secante corta a todas las generatrices del cono menos dos. En primer lugar se traza el plano β'(paralelo a β y pasa por V) y se determina la recta de intersección "i" entre ese plano y el plano base, así como también la recta "e", intersección entre el plano secante β y el mencionado plano base (eje de la homología). La recta "i" resulta ser secante a la directriz del cono según la cuerda 12, en tanto que la recta "e" define una cuerda 34; los puntos homólogos de 3 y 4 (3' y 4') se confunden con éstos. A continuación, se trazan rectas tangentes a la directriz del cono por los puntos 1 y 2; tales rectas generan en los cortes con "e" un par de puntos I y II. Luego, por estos puntos se construyen rectas paralelas a las generatrices V1 y V2, que constituyen las asíntotas de la hipérbola; ambas se cortan en el punto C, centro de la cónica.
Es importante que resaltar que los puntos V, C y P son colineales, siendo P el corte de las tangentes a la directriz del cono trazadas por 1 y 2.
La recta definida por P y el centro O de la base es la mediatriz de las cuerdas 12 y 34, por lo que las corta en sus puntos medios M y N, respectivamente. Además, dicha recta genera en la directriz un punto 5, cuyo homólogo (5') es uno de los vértices de la hipérbola.
Por otra parte, la recta definida por los puntos C y N – la cual es paralela a la recta VN, altura de la sección sencilla que produce β' - es el eje real de la sección, en consecuencia, el corte entre esa recta y la generatriz V5 es el punto 5'.

Finalmente, el punto de cambio de visibilidad de la curva 6' puede ser hallado de la siguiente manera: Se dibuja el segmento 16 y se determina el corte K entre éste y el eje de la homología "e" . Luego, se traza por el punto K una paralela a la generatriz V1 – el homólogo de 1 (1') se encuentra en el infinito – que corta a la generatriz V6 en el punto buscado. Nótese como el punto de cambio de visibilidad 7' se va a encontrar en la rama superior del cono, en la que también se encuentra la otra rama de la hipérbola.

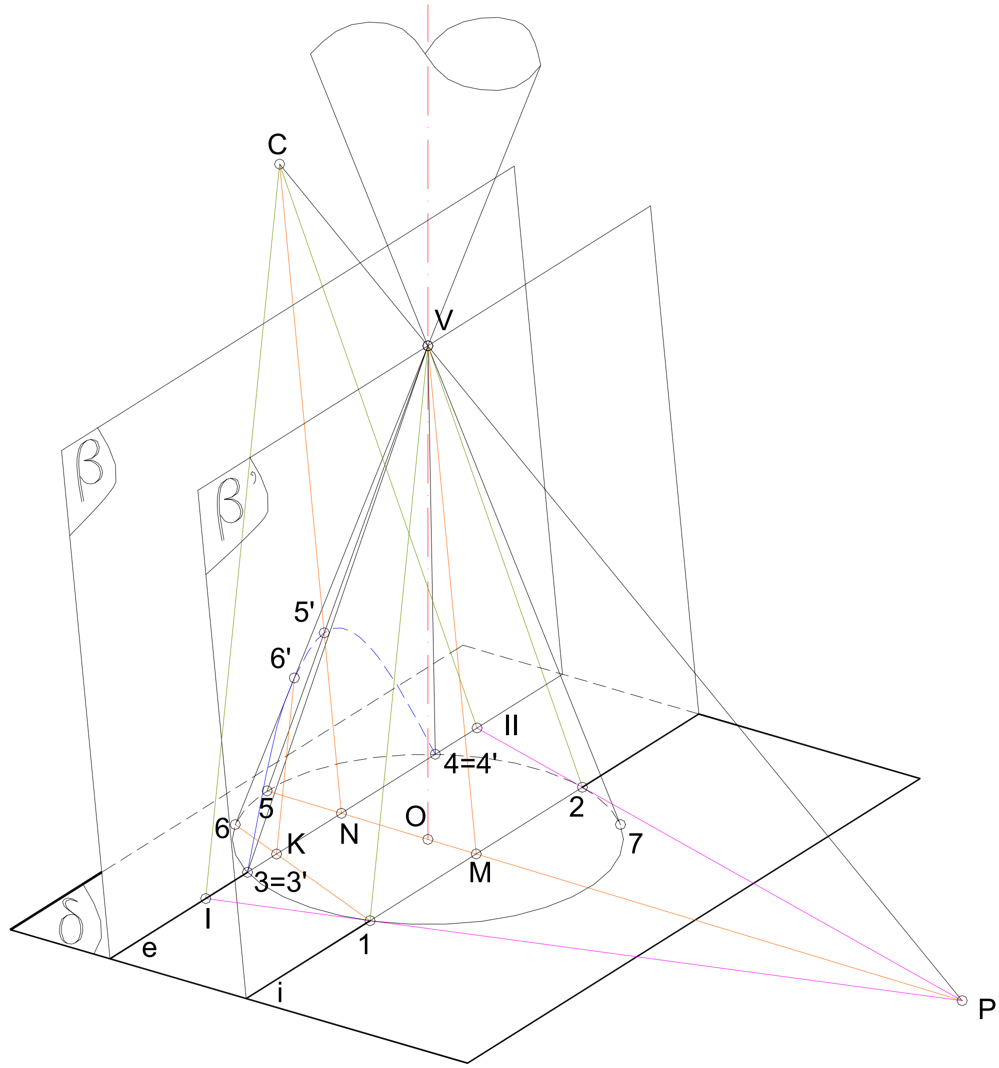

Fig. 15: Sección Hiperbólica.