SUPERFICIES DE REVOLUCIÓN DE DOBLE CURVATURA

Son superficies generadas por la rotación de una línea curva en torno a un eje determinado. Existe una gama infinita de este tipo de superficies, pues infinitos son los tipos de curvas planas.

La curva que realiza el movimiento de rotación recibe el nombre de generatriz y es coplanar con el eje. Las circunferencias perpendiculares al eje, producidas por la intersección de planos perpendiculares al eje, se llaman paralelos de la superficie. Los planos que contienen al eje cortan a la superficie determinando los meridianos. A partir de la superficie de revolución se generan diferentes sólidos que se llamarán sólidos de revolución de doble curvatura.

Entre las superficies de revolución de doble curvatura se encuentran aquellas engendradas por curvas de segundo grado, como lo son el paraboloide de revolución, los elipsoides de revolución, la esfera, el toro y los hiperboloides de una y de dos hojas. La construcción geométrica y representación en el Sistema Diédrico de estas superficies, requiere de un conocimiento suficiente por parte del estudiante de todos los temas abordados en la asignatura SR 10, por lo que se recomienda un repaso previo de los apuntes y ejercicios correspondientes.

El programa de la asignatura Sistemas de Representación 20 se limita al estudio de la esfera, considerándose que el conocimiento de las características y las proyecciones de esta superficie constituye una buena base conceptual y práctica.

ESFERA

La esfera es una superficie generada por la rotación de una semicircunferencia en torno a su diámetro. Se define como el lugar geométrico de todos los puntos del espacio que equidistan de otro denominado Centro de la Esfera (O). La distancia entre cada punto de la superficie esférica y su centro es el Radio de la esfera.

En el Sistema Diédrico, la proyección horizontal del contorno de una esfera corresponde a la proyección de la línea de tangencia entre ella y un cilindro de generatrices perpendiculares a PH. Dicha línea, denominada *Ecuador,* es una circunferencia cuyo centro es la proyección horizontal del centro de la esfera y de radio igual al de ésta (Fig. 1).

Del mismo modo, la proyección vertical del contorno de una esfera es una circunferencia de centro en la proyección vertical del centro de la esfera y de radio igual al de ésta. Dicha circunferencia es la proyección vertical del *Meridiano Principal,* aquel que se encuentra paralelo a PV.

Si un punto P de la superficie esférica se halla sobre el contorno en la proyección vertical, su proyección horizontal se debe encontrar sobre el diámetro paralelo a LT de la proyección horizontal de la esfera. Análogamente, si un punto Q se halla en proyección horizontal sobre el contorno de la esfera, su proyección vertical se ubicará en aquél diámetro de la proyección vertical de la superficie que sea paralelo a LT.

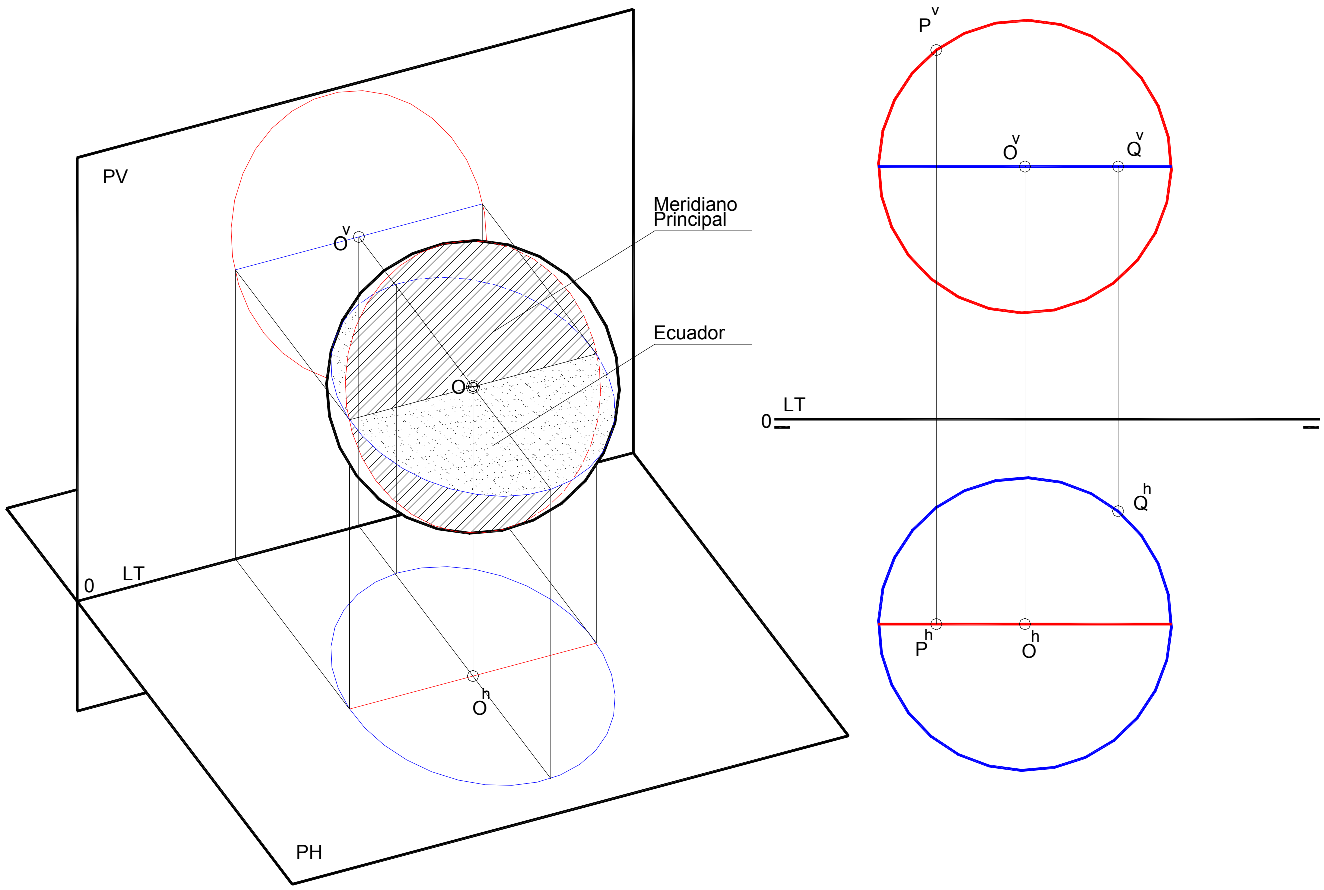


Fig. 1: Proyecciones Diédricas de la Esfera.

Secciones Planas

La sección que produce un plano en una esfera siempre es un círculo, cuyo centro es el punto de intersección entre una recta perpendicular al plano secante que pasa por el centro de la esfera y el propio plano secante.

Si dicho plano contiene al centro de la superficie esférica, la sección producida será un *Círculo Máximo*, de radio y centro iguales al radio y centro de la esfera. De lo contrario se producen *Círculos Menores,* siendo el caso extremo aquél en el que el radio de la sección es cero (Plano Tangente).

Si el plano secante resulta ser paralelo a uno de los planos de proyección, el círculo resultante se proyecta en verdadero tamaño. En vista de su simplicidad, este tipo de situación permite ubicar cualquier punto sobre la superficie esférica. Por ejemplo, si se conoce la proyección vertical del punto P (Fig. 2) y se desea determinar la otra proyección, se traza un plano horizontal χ, de cota igual a la del punto P, que secciona a la esfera según un círculo de diámetro AB, el cual se ve en verdadero tamaño sobre PH. Luego, los cortes entre la proyección horizontal de la circunferencia de diámetro AB y la referencia del punto P, se obtienen las dos posibles soluciones (P^h y $P1^h$) para la proyección faltante del mencionado punto. De igual manera, si se conoce la proyección horizontal se aplicará igual procedimiento empleando un plano secante en posición frontal.

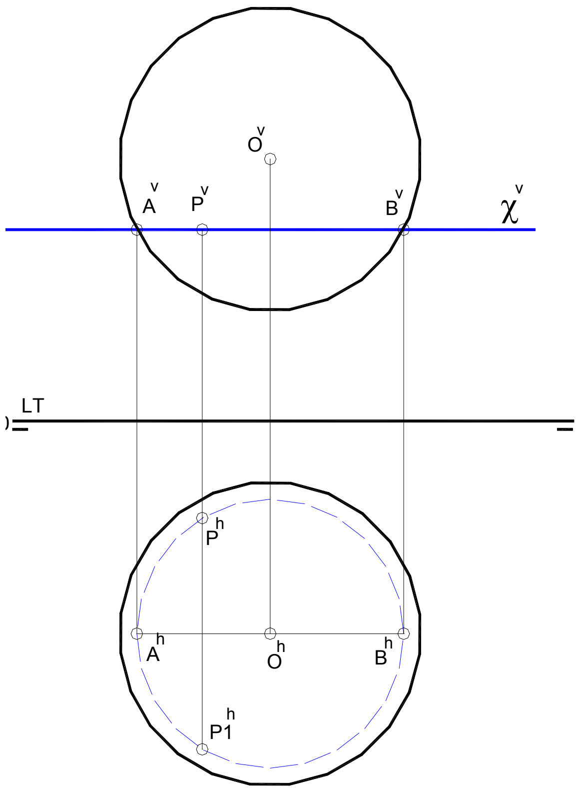


Fig. 2: Proyecciones de un punto sobre la superficie esférica

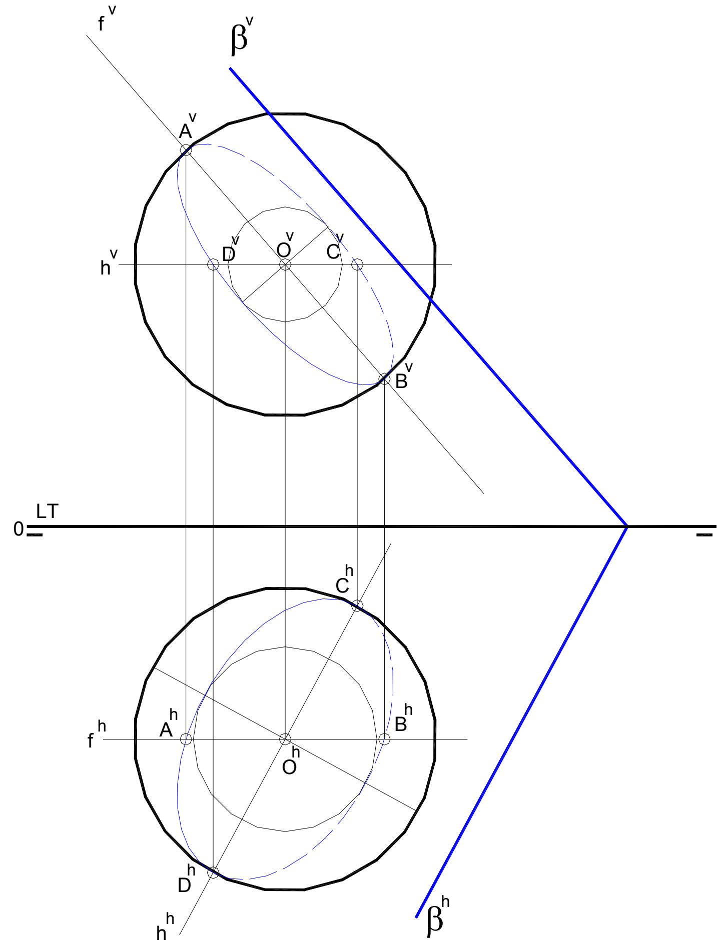


Fig. 3: Círculo Máximo

Si un plano no paralelo a alguno de los planos de proyección genera un círculo máximo (Fig. 3), el problema de determinar las proyecciones diédricas de la sección se reduce a la construcción de una circunferencia de centro en O y radio igual al de la esfera. Para ello se recomiendo un repaso del tema “Circunferencia”, correspondiente al Módulo I de la asignatura Sistemas de Representación 20.

La circunferencia producida tiene una parte visible y otra invisible en cada proyección. Los puntos en donde se produce ese cambio de visibilidad son los puntos de tangencia entre la proyección de la sección y el contorno correspondiente.

En la Fig. 3 se muestra un ejemplo de sección circular máxima. El primer paso del procedimiento de solución es verificar que el plano secante β contiene al centro de la esfera. Seguidamente, se trazan por O las rectas características del plano secante y se consigna sobre ellas el tamaño del diámetro de la sección (igual al diámetro de la esfera), con lo cual se obtienen los puntos A, B, C y D; luego se procede con la construcción de las proyecciones de la circunferencia de sección, aplicando los métodos gráficos necesarios. La visibilidad en proyección vertical cambia en los puntos A y B; como el punto C se encuentra por detrás (con menor vuelo) del meridiano principal, la porción de la curva en la que se encuentra C^v es invisible. Análogamente, la porción de la proyección horizontal de la circunferencia de sección en la que se halla B^h es invisible, por encontrarse B por debajo (con menor cota) del ecuador, siendo las proyecciones horizontales de C y D los puntos de cambio de visibilidad.

Cuando el plano secante β no contiene al centro de la esfera, sin ser exterior ni tangente a ella, se genera un Círculo Menor. El centro de la sección en este caso se determina construyendo por el centro de la esfera O una recta “p” perpendicular al plano de sección; la intersección entre “p” y este plano resulta ser el punto buscado O’ (Fig. 4-a). El radio de un círculo menor “r” es el cateto O’K del triángulo OO’K, el cual es rectángulo en O’ y tiene por hipotenusa al radio de la esfera OK. El punto K es cualquier punto situado sobre la circunferencia de sección producida por el plano β.

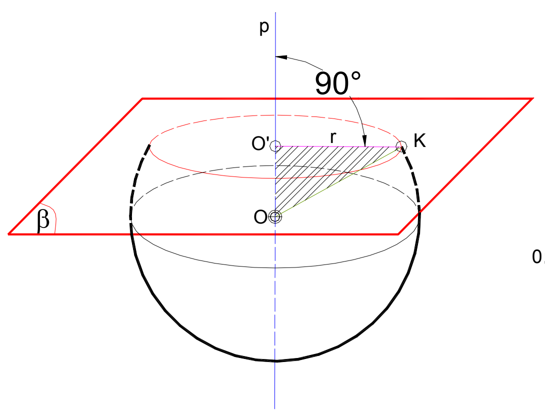


Fig. 4-a

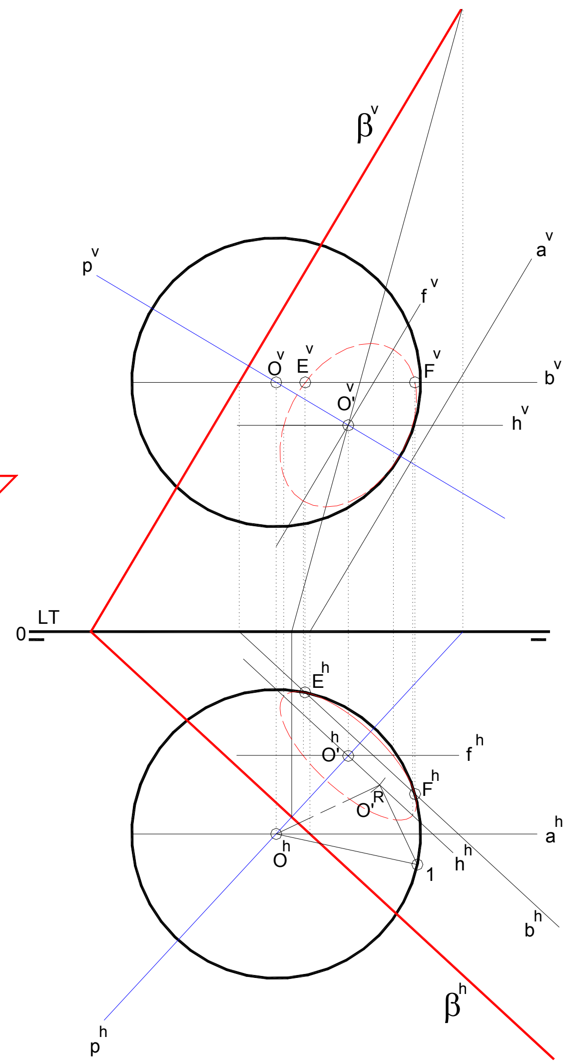


Fig. 4-b

Fig. 4: Círculo Menor.

En la Fig. 4-b se presenta un ejemplo ilustrativo. El procedimiento para determinar las proyecciones diédricas de una sección circular menor comienza por verificar que el centro de la esfera O no pertenece al plano secante β. Seguidamente se debe trazar por O una recta “p” perpendicular al plano secante, determinándose luego el punto de intersección entre la recta y dicho plano (centro de la sección O’). A continuación, es necesario hallar el verdadero tamaño del segmento OO’, lo que se ha hecho abatiendo al centro de la sección en O^R. Si se traza por el punto O' abatido una perpendicular al verdadero tamaño del segmento OO' que corte al contorno aparente de la esfera en el punto 1, se obtiene un triángulo rectángulo $O^hO'^RK$, en el cual el cateto O'^R1 corresponde al verdadero tamaño del radio "r" de la sección producida por β.

Una vez que se conoce el centro y el radio de la sección, el problema se reduce a la construcción de una circunferencia contenida en el plano β, de centro en O' y radio "r", consignando este valor sobre las rectas notables (frontal y horizontal) del mencionado plano.

Para determinar los puntos de cambio de visibilidad de la circunferencia en cada proyección, se hallan las rectas de intersección "a" y "b" entre el plano β y los planos que contienen al meridiano principal (frontal) y al ecuador (horizontal), respectivamente; los puntos comunes a esas rectas y al contorno de la superficie esférica en cada proyección son los puntos buscados. Nótese cómo en la Fig. 4-b la recta "a" no corta al contorno de la esfera, por lo que la proyección vertical de la sección no presenta cambios de visibilidad. Lo contrario ocurre con la proyección horizontal, ya que la recta "b" corta al contorno de la esfera proyectada sobre PH en los puntos E y F.

Finalmente, se realiza el análisis de visibilidad correspondiente aplicando el criterio ya señalado: La porción de la curva situada por debajo del ecuador es invisible en proyección horizontal, en tanto que la porción que tiene menor vuelo que el meridiano principal es invisible en la proyección vertical.

Recta y plano tangentes a una esfera

Una recta "t" tangente a una esfera en un punto T, es tangente a la circunferencia mayor producida por el plano γ definido por la propia recta "t" y el centro O de la esfera. Por esta condición, la recta definida por dicho centro y el punto de tangencia T es perpendicular a la recta "t" (Fig. 5).

De lo anterior se concluye que *por un punto cualquiera T sobre la superficie esférica pasan infinitas rectas tangentes*, pues infinitas son las rectas perpendiculares a OT que pasan por T, formando un haz de rectas contenidas en un plano perpendicular a OT.

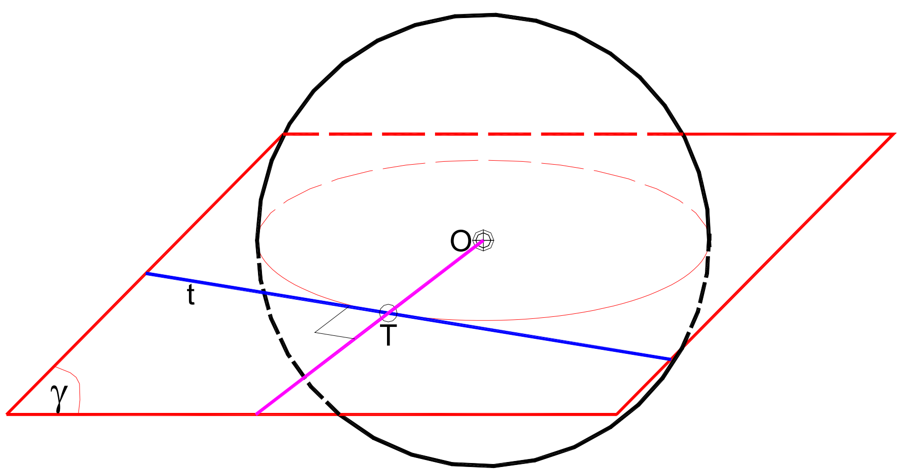


Fig. 5: Recta tangente a esfera.

Ese plano resulta ser, en consecuencia, un plano τ tangente a la esfera en el punto T, por ello, se concluye que *por un punto cualquiera T sobre la superficie esférica pasa un único plano* *tangente a ella.* Ese plano tangente es perpendicular al radio OT de la esfera en el punto de tangencia (Fig. 6).

Otra forma de definir el plano τ tangente a una esfera en el punto T consiste en buscar dos circunferencias de la superficie que contengan al punto T; luego, las tangentes a esas curvas que pasan por dicho punto serán dos rectas que determinan el plano buscado.

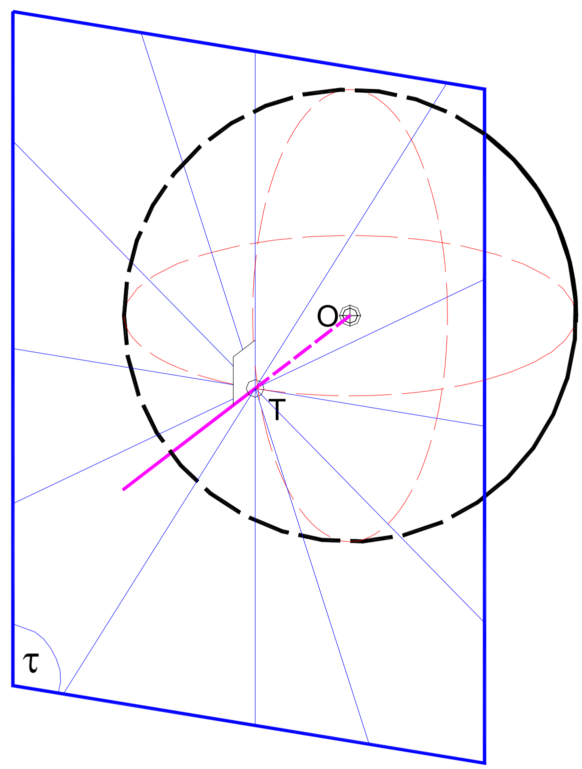


Fig. 5: Plano tangente a esfera.

Potencia de un punto exterior a una esfera

Análogamente al caso bidimensional (potencia de un punto exterior a una circunferencia), la potencia de un punto K exterior a una esfera con respecto a ella, se define como el producto de las distancias entre K y dos puntos A y B en la superficie esférica, medidas sobre una misma secante.

$$P = \overline{KA} \times \overline{KB}$$

Este producto es un valor constante (Fig. 6) para todas las rectas que pasan por el punto K y son secantes a la esfera, por lo que

$$P = \overline{KA} \times \overline{KB} = \overline{KC} \times \overline{KD} = \overline{KE} \times \overline{KF}$$

En el caso límite en el que las rectas que pasan por K son tangentes a la superficie esférica, se cumple que:

$$P = \overline{KT}^2$$

Donde T es el punto de tangencia de la recta considerada.

De lo anterior se concluye que la distancia entre un punto K y los puntos de tangencia de las infinitas rectas que pasan por K y son tangentes a la esfera, es constante. Además, el uso de esta propiedad permite resolver fácilmente muchos problemas de construcción de esfera.

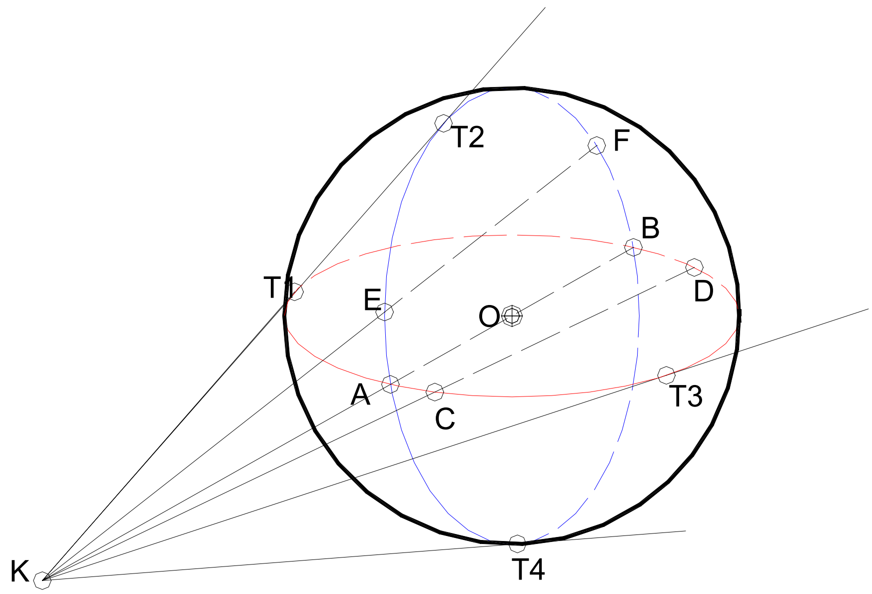


Fig. 6: Potencia de un punto exterior a una esfera.

Construcción de Esfera

Los elementos de mayor importancia de una esfera con, sin duda, el centro y el radio. El objetivo perseguido por un algoritmo que se pretenda usar para construir una esfera, es la determinación de esos elementos a partir de ciertas condiciones (datos) mínimas, entre las que se encuentran las siguientes:

Condición Geométrica	Valor
Punto sobre la superficie esférica	1
Recta que contiene al centro	2
Recta tangente	1
Recta tangente con punto de tangencia	2
Plano Tangente	1
Plano tangente con recta de tangencia	2
Plano tangente con punto de tangencia	3

Es posible asignar un valor a cada una de esas condiciones geométricas, de manera que si en un enunciado tales valores suman un número igual a cuatro (4), es posible determinar la esfera pedida manipulando los correspondientes lugares geométricos (ver “Estudio de Geometría Descriptiva” por Harry Osers), algunos de los cuales se presentan a continuación:

1. Dos puntos A y B sobre la superficie esférica.

   Dado que ambos puntos equidistan del centro, el lugar geométrico de las infinitas soluciones para este punto se encuentra sobre el plano mediador μ del segmento AB, el cual pasa por el punto medio de dicho segmento y es perpendicular a él (Fig. 7).

2. Tres puntos A, B y C sobre la superficie esférica.

   Tres puntos sobre la superficie de la esfera definen un plano β que contiene una sección, sobre cuya circunferencia se hallan A, B y C. En consecuencia, el lugar geométrico para los infinitos centros posibles es un recta “p” perpendicular al plano β y que pasa por el centro O’ de la circunferencia definida por A, B y C (Fig. 8)

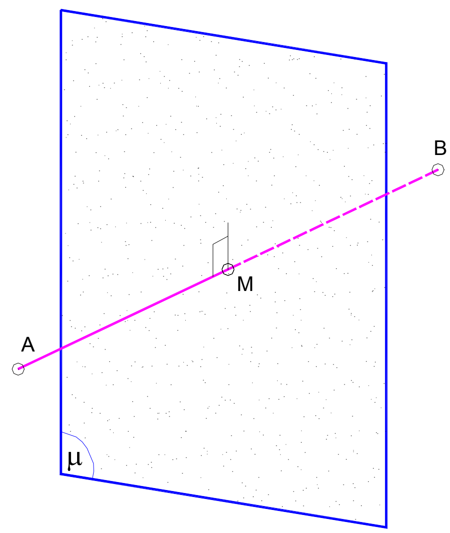


Fig. 7

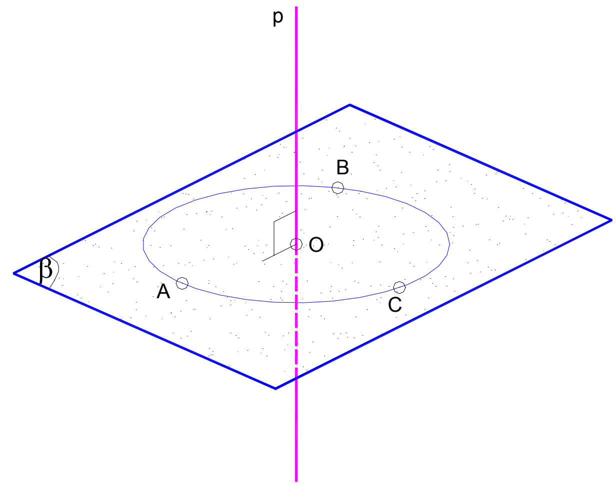


Fig. 8

3. Recta “m” tangente a la esfera, conocido el punto de tangencia T.

   Si se considera que en el caso número uno la longitud del segmento AB tiende a cero, la recta “m” definida por A y B pasa a ser tangente a la superficie esférica, por lo que los puntos A, B y M se confunden en uno solo: el punto de tangencia T de la recta “m”. Luego, el lugar geométrico de los centros de las infinitas esferas posibles es un plano π perpendicular a la recta “m” y que pasa por el punto T (Fig. 9)

4. Plano τ tangente a la superficie esférica, conocido el punto de tangencia T.

   Como ya se ha indicado, un plano tangente a una esfera es perpendicular al radio en el punto de tangencia, por lo que el centro de las infinitas esferas tangentes al plano τ en el punto T será una recta “p” perpendicular a τ y que pasa por T (Fig. 10).

5. Dos planos χ y δ tangentes a una esfera.

   Si una esfera es tangente a dos planos, los centros de las infinitas esferas se encuentran sobre alguno de los dos planos bisectores λ de aquellos. Por otra parte, el centro de cada una de esas esferas debe ser coplanar con los dos puntos de tangencia correspondientes; el plano ω definido por estos tres puntos será perpendicular a cada uno de los planos tangentes, y, en consecuencia, perpendicular a su recta de intersección “i” (Fig. 11).

6. Rectas tangentes a la esfera que pasan por un punto K exterior a ella.

   El lugar geométrico de las infinitas soluciones para el centro de la esfera es el eje de un cono de revolución de vértice K, en el que las generatrices son las rectas tangentes. Los puntos de tangencia correspondientes se hallan sobre una circunferencia menor situada en un plano ε perpendicular al eje del mencionado cono (Fig. 12).

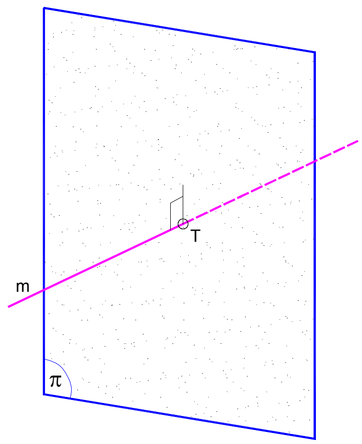


Fig. 9

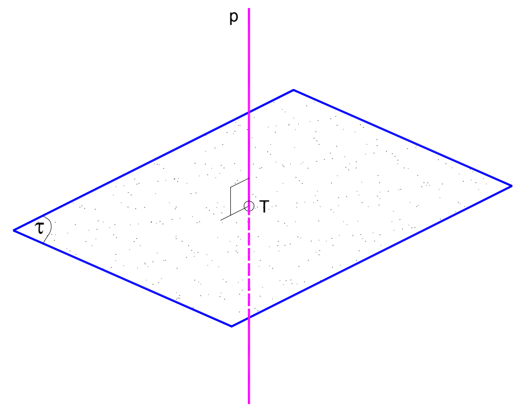


Fig. 10

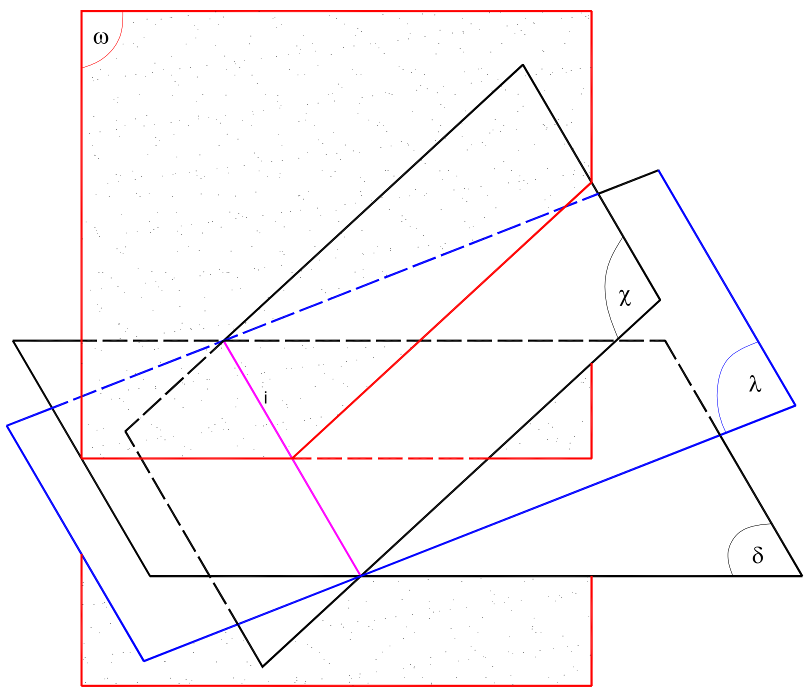


Fig. 11

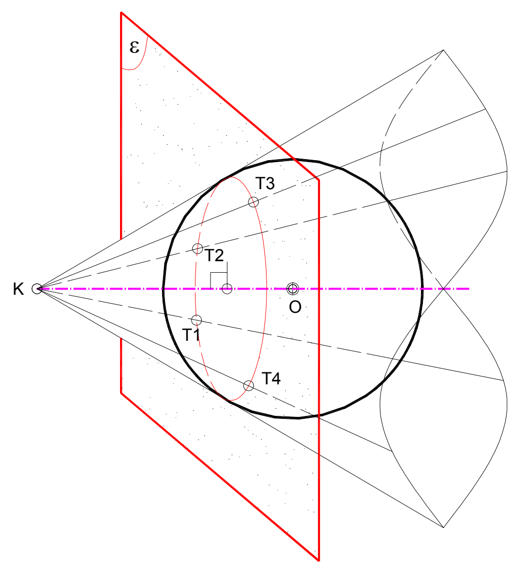


Fig. 12

A continuación se presentan algunos casos de construcción de esfera en los que se aplica la manipulación de los lugares geométricos explicados.

a) Dados dos puntos A y B sobre la superficie esférica y una recta “r” que contiene a su centro.

Se construye en primer lugar el plano μ mediador del segmento AB. Luego se determina el punto de intersección de la recta “r” con este plano, lo que da como resultado el centro O de la esfera. El radio es igual al tamaño del segmento OA o del segmento OB (Fig. 13).

b) Dados cuatro puntos A, B, C y D (no coplanares) sobre la superficie esférica.

Se comienza construyendo los planos mediadores μ1, μ2 y μ3 de tres de los segmentos definidos por los puntos dados, por ejemplo AB, BC y BD. Luego se determina la recta de intersección “i” de dos de esos planos mediadores; finalmente se halla el punto de intersección O de la recta “i” y el tercer plano mediador. El radio es OA=OB=CC=OD (Fig. 14).

c) Dados dos puntos A y B sobre la superficie esférica y una recta tangente “m” (no coplanares), conocido el punto de tangencia T.

Se construye el plano mediador μ1 del segmento AB y el plano π perpendicular a la recta “m” que pasa por T, determinándose luego la recta de intersección “i” de esos planos. Seguidamente se construye el plano mediador μ2 del segmento BT (o del segmento AT) y se halla la intersección O entre la recta “i” y este plano. El radio es OA=OB=OT (Fig. 15).

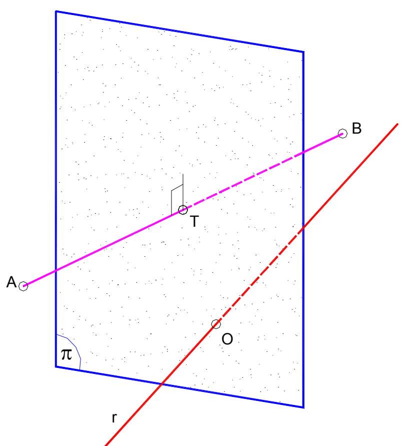


Fig. 13

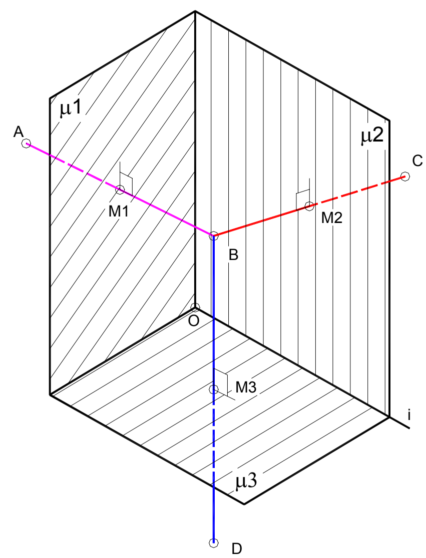


Fig. 14

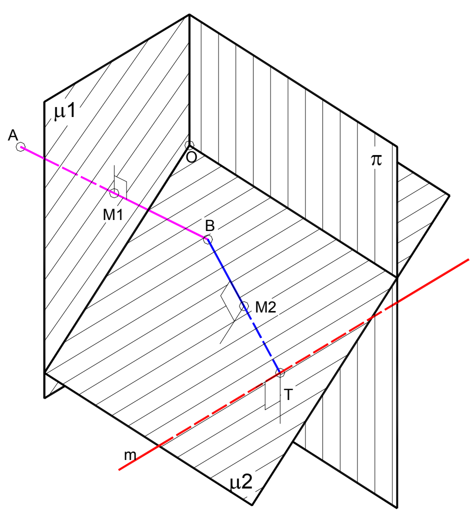


Fig. 15

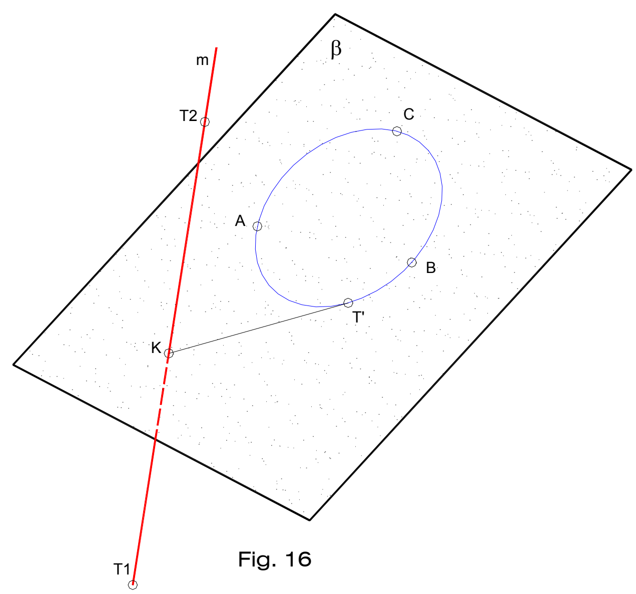


Fig. 16

d) Dados tres puntos A, B y C sobre la superficie esférica y una recta tangente "m" (no coplanares).

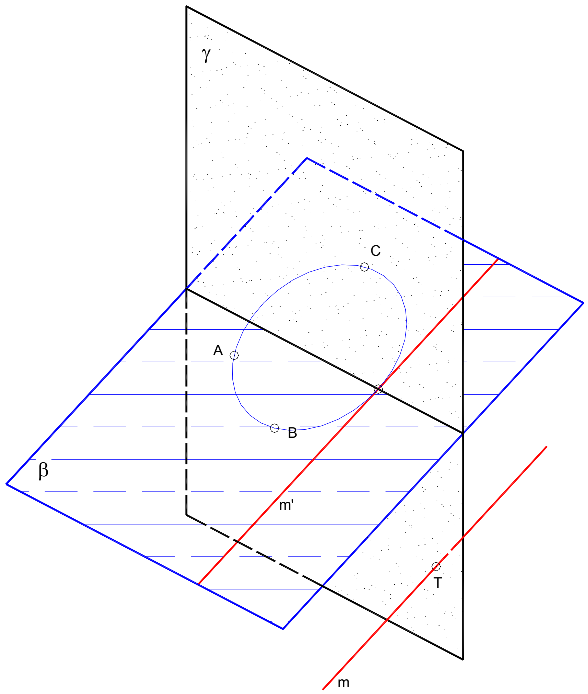
En primer lugar se determina el punto de intersección K de la recta "m" y el plano β que definen los puntos A, B y C. Luego se traza una tangente a la circunferencia que pasa por A, B y C desde el punto K; la distancia de éste a uno de los puntos de tangencia resultante T' es igual a la distancia desde K al punto de tangencia de la recta "m" a la esfera, por lo que se copia esa distancia a partir de K sobre la recta "m" obteniéndose así dos soluciones (T1 y T2). Finalmente, se procede como en el caso b) o c) para hallar el centro y el radio (Fig. 16).

e) Dados tres puntos A, B y C sobre la superficie esférica y una recta tangente "m" paralela al plano ABC.

Primero se dibuja la circunferencia que pasa por los puntos A, B y C y se construye una recta "m'" paralela a la recta "m" y tangente a dicha circunferencia. Luego se construye un plano γ perpendicular al plano β definido por A, B y C y que pase por el punto de tangencia de la recta "m'" con la circunferencia ABC. A continuación se halla el punto de intersección T de la recta "m" y el plano γ, el cual viene a ser el punto de tangencia de la recta "m" a la esfera pedida. Finalmente, se procede como en el caso b) o c) para hallar el centro y el radio (Fig. 17).

f) Dadas dos rectas que se cruzan "m" y "n" tangentes a la superficie esférica en los puntos T1 y T2, respectivamente.

Se construyen los planos $\pi 1$ y $\pi 2$ perpendiculares a las rectas "m" y "n" por sus correspondientes puntos de tangencia (T1 y T2). Luego, se determina la recta de intersección "i" de esos planos y construye el plano mediador μ del segmento T1T2. Finalmente, se halla el punto de intersección O de la recta "i" y el plano μ. El radio de la esfera es OT1=OT2 (Fig. 18).



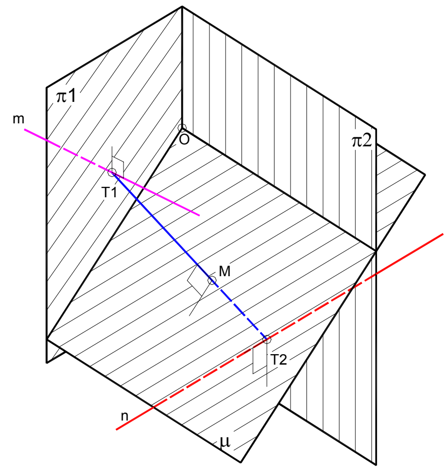


Fig. 18

Fig. 17

g) Dado un punto A sobre la superficie esférica y un plano τ tangente en el punto T.

En primer lugar se construye el plano μ del segmento AT para luego trazar una recta "p" perpendicular al plano τ por el punto T. Seguidamente se determina el punto de intersección O de la recta "p" y el plano μ. El radio de la esfera es OA=OA (Fig. 19).

h) Dado un plano τ tangente a la superficie esférica en el punto T y una recta tangente "m".

Primero se halla el punto de intersección K de la recta "m" y el plano τ. Luego se copia la distancia KT sobre la recta "m" a partir de K, con lo cual se obtienen dos soluciones (T1 y T2) para el punto de tangencia de la recta "m". Finalmente se procede como en el caso anterior para determinar el centro O y el radio de la esfera (Fig. 20).

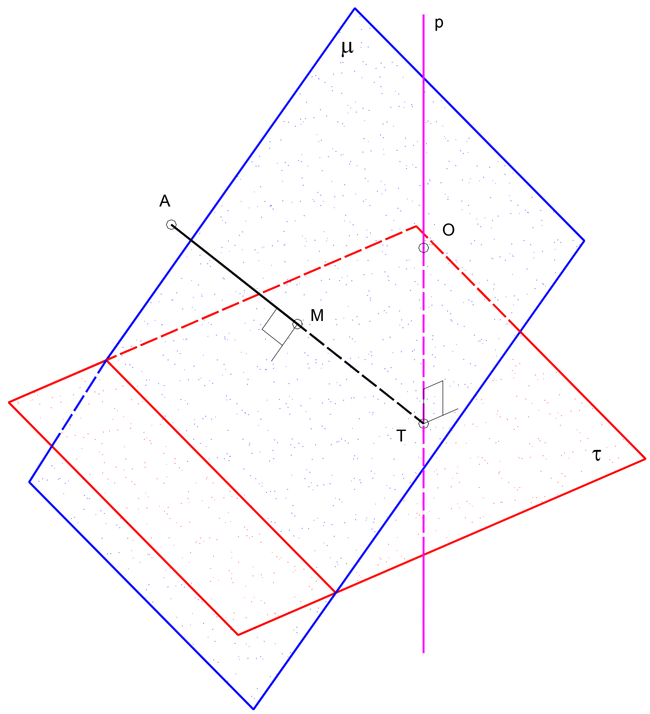


Fig. 19

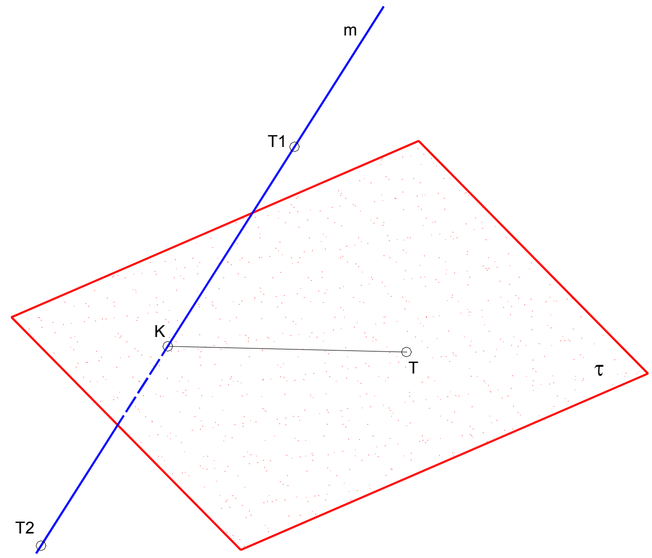


Fig. 20

i) Dada una recta “m” tangente a la esfera contenida en un plano β y dos puntos A y B sobre la superficie esférica.

En primer lugar se determina el punto de intersección K de la recta definida por AB y el plano β. Luego se construye una circunferencia cualquiera que pase por los puntos A y B (contenida en cualquier plano ω que contenga a dichos puntos) y se traza por K una recta “r” tangente a dicha circunferencia en el punto T’. Seguidamente, se construye un arco (contenido en β) de centro en K y radio igual a KT’, el cual corta a la recta “m” en el punto de tangencia T. Evidentemente, es posible obtener una, dos o ninguna solución para ese punto. Finalmente, se procede como en el caso g) para hallar el centro y el radio de la esfera (Fig. 21).

j) Dado un plano τ tangente a la esfera en el punto T1 y otro plano tangente ρ.

Primero se halla la recta de intersección “i” de los planos τ y ρ. Luego se construye por el punto T1 un plano π perpendicular a la recta “i”, el cual es perpendicular a los planos tangentes y contienen al centro de la esfera. Seguidamente, se determina la recta de intersección “a” de los planos ρ y π, la cual corta a la recta “i” en el punto K. A continuación, se copia la distancia KT sobre la recta “a” a partir del punto K, con lo que se obtienen dos soluciones (T2 y T2’) para el punto de tangencia de la esfera en el plano ρ. Luego se construyen por los puntos T1 y T2 dos rectas “p1” y “p2” perpendiculares a los planos τ y ρ, respectivamente; el corte de esas rectas es el centro O de la esfera. El radio es OT=OT1 (Fig. 22).

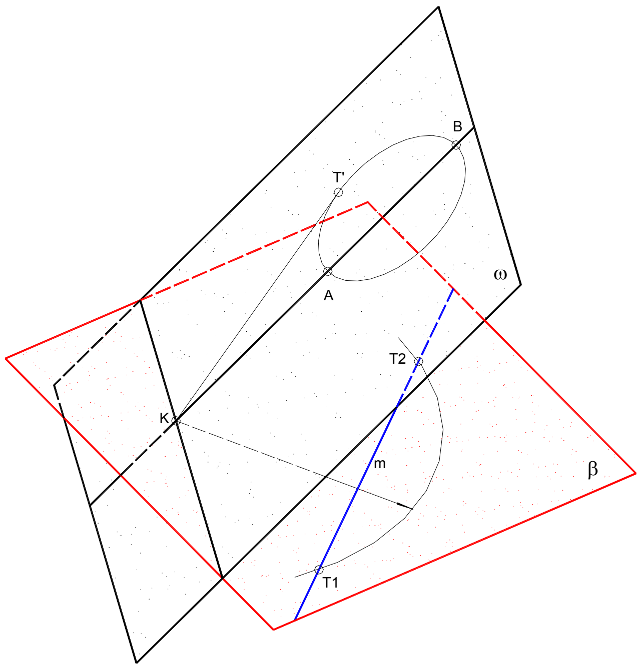


Fig. 21

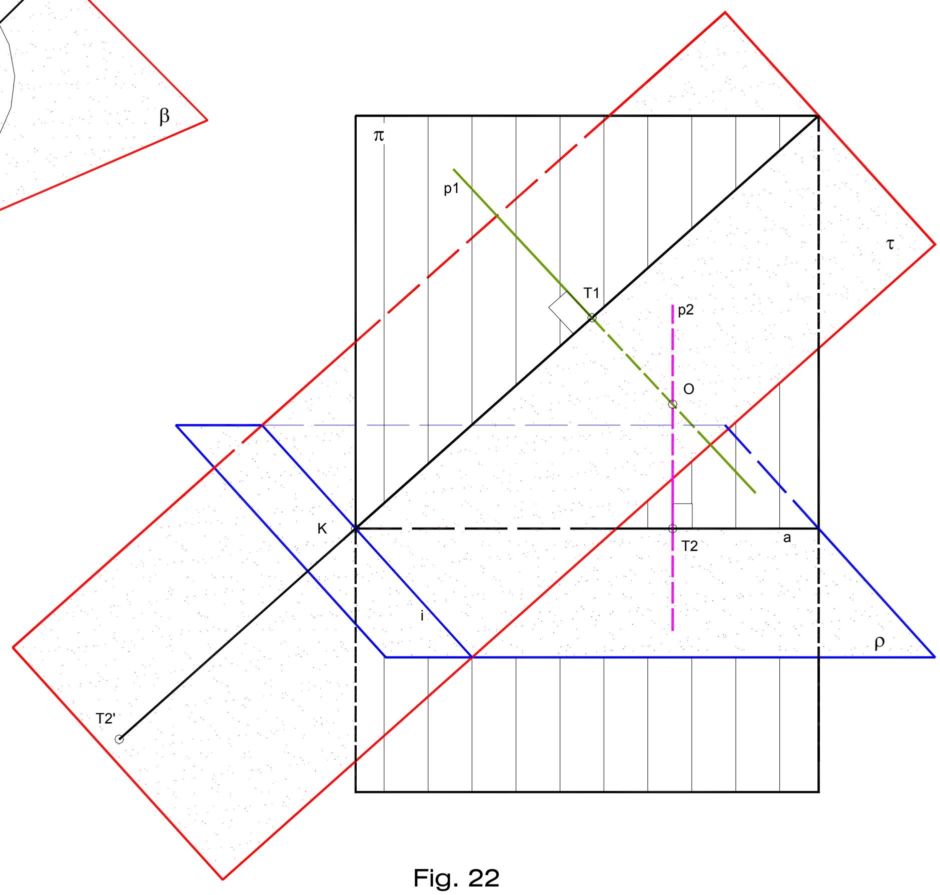


Fig. 22