

la temperatura real (no la temperatura adimensional) de una varilla de acero tal que $L = 30$ cm. Haga una simulación para un tiempo aproximadamente igual a la mitad del tiempo necesario para el estado estacionario (es decir, el tiempo que tarda la varilla en alcanzar una distribución de temperatura constante). También calcule el tiempo para la mitad del tiempo de estado estacionario. Utilice los siguientes valores para dicha estimación: $T_0 = 20^\circ\text{C}$, 100°C ; $C = 0.460 \text{ W} \cdot \text{s}/(\text{kg} \cdot \text{C})$, $\rho = 7880 \text{ kg}/\text{m}^3$, y $k = 40 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{C})$.

Problema del flujo de calor transiente radial como función de tiempo en una varilla circular se describe en forma 31.1 por

$$\frac{\partial u}{\partial t} = b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\begin{aligned} \text{es de frontera} & \quad u(1, t) = 1 & \quad \frac{\partial u}{\partial r}(0, t) = 0 \\ \text{es iniciales} & \quad u(r, 0) = 0 & \quad 0 \leq r \leq 1 \end{aligned}$$

ecuación adimensional transiente radial para la concentración en una varilla circular para la distribución de

temperatura a diversos tiempos conforme la varilla se aproxima al estado estacionario. Utilice análogos de diferencias finitas con precisión de orden dos para las derivadas con una formulación de Crank-Nicholson. Escriba un programa de computadora para la solución. Elija valores Δr y Δt para una buena precisión. Grafique la temperatura u contra el radio r para diversos tiempos t .

30.15 Resuelva la siguiente EDP

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\begin{aligned} \text{Condiciones de frontera} & \quad u(0, t) = 0 & \quad u(1, t) = 1 \\ \text{Condiciones iniciales} & \quad u(x, 0) = 0 & \quad 0 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

Utilice análogos de diferencias finitas con precisión de orden dos para las derivadas con una formulación de Crank-Nicholson para integrar con respecto al tiempo. Escriba un programa de computadora para la solución, incremente el valor de Δx un 10% en cada paso del tiempo para obtener más rápidamente la solución en estado estacionario, y elija valores de Δx y Δt para una buena precisión. Grafique u contra x para varios valores de t . Resuélvala para valores de $b = 4, 2, 0, -2, -4$.

CAPÍTULO 31

Método del elemento finito

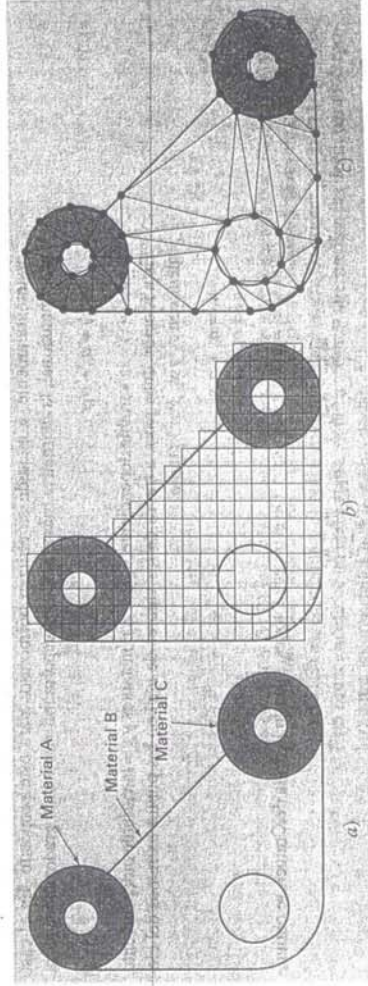
Hasta aquí hemos empleado métodos por diferencias finitas para resolver ecuaciones diferenciales parciales. En estos métodos, el dominio de la solución se divide en una malla con puntos discretos o nodos (figura 31.1b). Entonces, se aplica la EDP en cada nodo, donde las derivadas parciales se reemplazan por diferencias finitas divididas. Aunque tal aproximación por puntos es conceptualmente fácil de entender, tiene varias desventajas. En particular, es difícil de aplicar a sistemas con una geometría irregular, con condiciones de frontera no usuales o de composición heterogénea.

El método del elemento finito ofrece una alternativa que es más adecuada para tales sistemas. A diferencia de las técnicas por diferencias finitas, la técnica del elemento finito divide el dominio de la solución en regiones con formas sencillas o "elementos" (figura 31.1c). Se puede desarrollar una solución aproximada de la EDP para cada uno de estos elementos. La solución total se genera uniendo, o "ensamblando", las soluciones individuales, teniendo cuidado de asegurar la continuidad de las fronteras entre los elementos. De este modo, la EDP se satisface por secciones.

Como se observa en la figura 31.1c, el uso de elementos, en lugar de una malla rectangular, proporciona una mejor aproximación para sistemas con forma irregular. Además, se pueden generar continuamente valores de las incógnitas a través de todo el dominio de la solución en lugar de puntos aislados.

FIGURA 31.1

a) Un empaque con geometría irregular y composición no homogénea. b) Un sistema así es muy difícil de modelar con la técnica por diferencias finitas. Esto se debe al hecho de que se necesitan aproximaciones complicadas en las fronteras del sistema y en las fronteras entre las regiones de diferente composición. c) Una discretización por elementos finitos es mucho más adecuada para tales sistemas.



Debido a que una descripción completa va más allá del alcance de este libro, el presente capítulo ofrece sólo una introducción general al método del elemento finito. Nuestro objetivo principal es familiarizar al lector con esta técnica y darle a conocer sus capacidades. Por lo tanto, la siguiente sección ofrece una visión general de los pasos para la solución de un problema, usando el elemento finito. Después se analizará un ejemplo sencillo: una barra calentada unidimensional en estado estacionario. Aunque este ejemplo no usa EDP, nos permite desarrollar y demostrar los principales aspectos de la técnica del elemento finito, evitando llegar a factores complicados. Después podremos analizar algunos problemas con el empleo del método del elemento finito para resolver EDP.

31.1 EL ENFOQUE GENERAL

Aunque las particularidades varían, la implementación del método del elemento finito usualmente sigue un procedimiento estándar paso a paso. A continuación se presenta un panorama general de cada uno de estos pasos. La aplicación de tales pasos a problemas de ingeniería se desarrollará en las siguientes secciones.

31.1.1 Discretización

Este paso consiste en dividir el dominio de la solución en elementos finitos. En la figura 31.2 se muestran ejemplos de los elementos empleados en una, dos y tres dimensiones. Los puntos de intersección de las líneas que forman los lados de los elementos se conocen como nodos, y los mismos lados se denominan *líneas o planos nodales*.

31.1.2 Ecuaciones de los elementos

El siguiente paso consiste en desarrollar ecuaciones para aproximar la solución de cada elemento y consta de dos pasos. Primero, se debe elegir una función apropiada con coeficientes desconocidos que aproximarán la solución. Segundo, se evalúan los coeficientes de modo que la función aproxime la solución de manera óptima.

Elección de las funciones de aproximación. Debido a que son fáciles de manipular matemáticamente, a menudo se utilizan polinomios para este propósito. En el caso unidimensional, la alternativa más sencilla es un polinomio de primer grado o línea recta.

$$u(x) = a_0 + a_1x \quad (31.1)$$

donde $u(x)$ es la variable dependiente, a_0 y a_1 = constantes y x = la variable independiente. Esta función debe pasar a través de los valores de $u(x)$ en los puntos extremos del elemento en x_1 y x_2 . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} u_1 &= a_0 + a_1x_1 \\ u_2 &= a_0 + a_1x_2 \end{aligned}$$

donde $u_1 = u(x_1)$ y $u_2 = u(x_2)$. De estas ecuaciones, usando la regla de Cramer, se obtiene

$$a_0 = \frac{u_1x_2 - u_2x_1}{x_2 - x_1} \quad a_1 = \frac{u_2 - u_1}{x_2 - x_1}$$

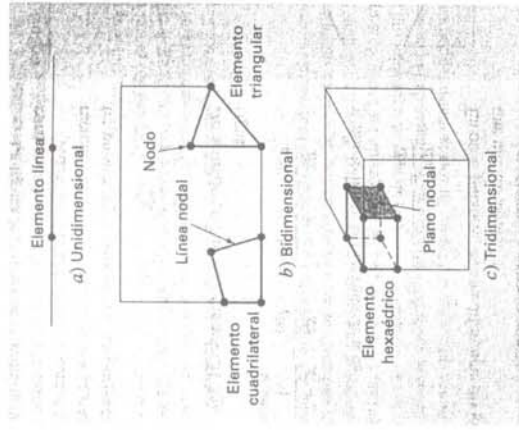


FIGURA 31.2

Ejemplos de los elementos empleados en a) una, b) dos y c) tres dimensiones.

Estos resultados se sustituyen en la ecuación (31.1) la cual, después de reagrupar términos, se escribe como

$$u = N_1u_1 + N_2u_2 \quad (31.2)$$

donde

$$N_1 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \quad (31.3)$$

y

$$N_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad (31.4)$$

La ecuación (31.2) se conoce como una *función de aproximación*, o *de forma*, y N_1 y N_2 se denominan *funciones de interpolación*. Una inspección cuidadosa revela que la ecuación (31.2) es, en realidad, el polinomio de interpolación de primer grado de Lagrange. Esta ecuación ofrece un medio para predecir valores intermedios (es decir, para interpolar) entre valores dados u_1 y u_2 en los nodos.

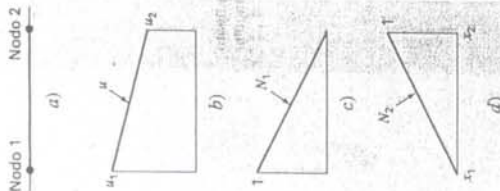


FIGURA 31.3
 b) Una aproximación lineal o función de forma para un elemento lineal. Las funciones de interpolación correspondientes se muestran en c) y d).

La figura 31.3 muestra la función de forma junto con las funciones de interpolación correspondientes. Observe que la suma de las funciones de interpolación es igual a uno.

Además, el hecho de que estemos tratando con ecuaciones lineales facilita las operaciones como la diferenciación y la integración. Tales manipulaciones serán importantes en secciones posteriores. La derivada de la ecuación (31.2) es

$$\frac{du}{dx} = \frac{dN_1}{dx} u_1 + \frac{dN_2}{dx} u_2 \quad (31.5)$$

De acuerdo con las ecuaciones (31.3) y (31.4), las derivadas de las N se calculan como sigue

$$\frac{dN_1}{dx} = -\frac{1}{x_2 - x_1} \quad \frac{dN_2}{dx} = \frac{1}{x_2 - x_1} \quad (31.6)$$

y, por lo tanto, la derivada de u es

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x_2 - x_1} (-u_1 + u_2) \quad (31.7)$$

En otras palabras, es una diferencia dividida que representa la pendiente de la línea recta que une los nodos.

La integral se expresa como

$$\int_{x_1}^{x_2} u \, dx = \int_{x_1}^{x_2} (N_1 u_1 + N_2 u_2) \, dx$$

Cada uno de los términos del lado derecho es simplemente la integral de un triángulo rectángulo con base $x_2 - x_1$ y altura u . Es decir,

$$\int_{x_1}^{x_2} N_1 u \, dx = \frac{1}{2} (x_2 - x_1) u$$

Así, la integral completa es

$$\int_{x_1}^{x_2} u \, dx = \frac{h_1 + h_2}{2} (x_2 - x_1) \quad (31.8)$$

En otras palabras, esto es simplemente la regla del trapecio.

Oblención de un ajuste óptimo de la función a la solución. Una vez que se ha elegido la función de interpolación, se debe desarrollar la ecuación que rige el comportamiento del elemento. Esta ecuación representa un ajuste de la función a la solución de la ecuación diferencial de que se trate. Existen varios métodos para este propósito; entre los más comunes están el método directo, el método de los residuos ponderados y el método variacional. Los resultados de todos estos métodos son análogos al ajuste de curvas. Sin embargo, en lugar de ajustar funciones a datos, estos métodos especifican relaciones entre las incógnitas de la ecuación (31.2) que satisfacen de manera óptima la EDP.

Matemáticamente, las ecuaciones del elemento resultante a menudo consisten en un sistema de ecuaciones algebraicas lineales que puede expresarse en forma matricial,

$$[K]\{u\} = \{F\} \quad (31.9)$$

donde $[K]$ = una propiedad del elemento o matriz de rigidez, $\{u\}$ = vector columna de las incógnitas en los nodos y $\{F\}$ = vector columna determinado por el efecto de cualquier influencia externa aplicada a los nodos. Observe que, en algunos casos, las ecuaciones pueden ser no lineales. Sin embargo, en los ejemplos elementales descritos aquí, así como en muchos problemas prácticos, los sistemas son lineales.

31.1.3 Ensamble

Una vez obtenidas las ecuaciones de elementos individuales, éstas deben unirse o ensamblarse para caracterizar el comportamiento de todo el sistema. El proceso de ensamble está regido por el concepto de continuidad. Es decir, las soluciones de elementos contiguos se acoplan, de manera que los valores de las incógnitas (y algunas veces las derivadas) en sus nodos comunes sean equivalentes. Así, la solución total será continua.

Cuando finalmente todas las versiones individuales de la ecuación (31.9) están ensambladas, el sistema completo se expresa en forma matricial como

$$[K]\{u'\} = \{F'\} \quad (31.10)$$

donde $[K]$ = la matriz de propiedades de ensamble y $\{u'\}$ y $\{F'\}$ = vectores columna de las incógnitas y de las fuerzas externas, marcadas con apóstrofos para denotar que son ensamble de los vectores $\{u\}$ y $\{F\}$ de los elementos individuales.

31.1.4 Condiciones de frontera

Antes de resolver la ecuación (31.10) debe modificarse para considerar las condiciones de frontera del sistema. Dichos ajustes dan como resultado

$$[\bar{K}]\{u'\} = \{\bar{F}'\} \quad (31.11)$$

donde la barra significa que las condiciones de frontera se han incorporado.

31.1.5 Solución

Las soluciones de la ecuación (31.11) se obtienen con las técnicas que se describieron en la parte tres, tal como la descomposición LU . En muchos casos, los elementos pueden configurarse de manera que las ecuaciones resultantes sean bandeadas. Así, es posible utilizar los esquemas de solución altamente eficientes para estos sistemas.

31.1.6 Procesamiento posterior

Una vez obtenida la solución, ésta se despliega en forma tabular o de manera gráfica. Además, pueden determinarse las variables secundarias y también mostrarse. Aunque los pasos anteriores son muy generales, son comunes a la mayoría de las implementaciones del método del elemento finito. En la siguiente sección ilustraremos

cómo se aplican para obtener resultados numéricos de un sistema físico simple (una barra calentada).

31.2 APLICACIÓN DEL ELEMENTO FINITO EN UNA DIMENSIÓN

En la figura 31.4 se muestra un sistema que puede modelarse mediante la forma unidimensional de la ecuación de Poisson

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = -f(x) \quad (31.12)$$

donde $f(x)$ es una función que define una fuente de calor a lo largo de la barra, y donde los extremos de la barra se mantienen a temperaturas fijas.

$$T(0, t) = T_1$$

y

$$T(L, t) = T_2$$

Observe que ésta no es una ecuación diferencial parcial, sino una EDO con valor en la frontera. Se usa este modelo sencillo porque nos permitirá introducir el método del elemento finito sin algunas de las complicaciones de una EDP bidimensional por ejemplo.

EJEMPLO 31.1 Solución analítica para una barra calentada

Planteamiento del problema. Resuelva la ecuación (31.12) para una barra de 10 cm con las siguientes condiciones de frontera, $T(0, t) = 40$ y $T(10, t) = 200$ y una fuente de calor uniforme de $f(x) = 10$.

Solución. La ecuación a resolver es

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = -10$$

Suponga una solución de la forma

$$T = ax^2 + bx + c$$

la cual se deriva dos veces para obtener $T'' = 2a$. Sustituyendo este resultado en la ecuación diferencial da $a = -5$. Las condiciones de frontera se utilizan para evaluar los coeficientes restantes. Para la primera condición en $x = 0$,

$$40 = -5(0)^2 + b(0) + c$$

o $c = 40$. De manera similar, para la segunda condición,

$$200 = -5(10)^2 + b(10) + 40$$

de donde se obtiene $b = 66$. Por lo tanto, la solución final es

$$T = -5x^2 + 66x + 40$$

Los resultados se grafican en la figura 31.5.

FIGURA 31.5

Distribución de temperatura a lo largo de una placa calentada sujeta a una fuente de calor uniforme y mantenida a temperaturas fijas en los extremos.

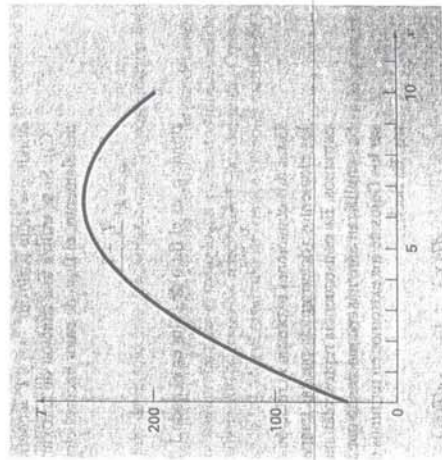
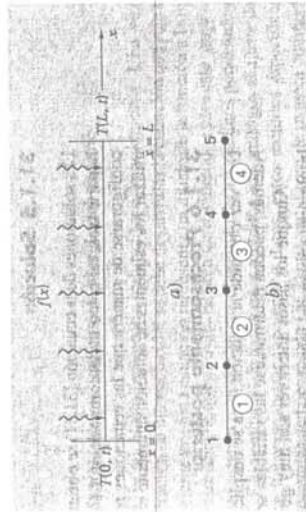


FIGURA 31.4

a) Barra larga y delgada sujeta a condiciones de frontera fijas y una fuente de calor continua a lo largo de su eje. b) Representación del elemento finito que consta de cuatro elementos de igual longitud y cinco nodos.



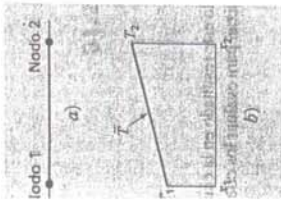


FIGURA 31.6

Un elemento individual usado para caracterizar la distribución de temperatura a lo largo del elemento.

31.2.1 Discretización

Una configuración simple para modelar el sistema consiste en una serie de elementos de igual longitud (figura 31.4b). Así, el sistema se trata como cuatro elementos de igual longitud y cinco nodos.

31.2.2 Ecuaciones de los elementos

En la figura 31.6a se muestra un elemento individual. La distribución de temperatura para el elemento se representa por la función de aproximación

$$\bar{T} = N_1 T_1 + N_2 T_2 \quad (31.13)$$

donde N_1 y N_2 = funciones de interpolación lineales especificadas por las ecuaciones (31.3) y (31.4), respectivamente. De esta manera, como se ilustra en la figura 31.6b, la función de aproximación corresponde a una interpolación lineal entre las dos temperaturas nodales.

Como se presentó en la sección 31.1, existen diferentes métodos para desarrollar la ecuación del elemento. En esta sección empleamos dos de ellos. Primero, se usará un *método directo* para el caso sencillo donde $f(x) = 0$. Posteriormente, debido a su aplicabilidad general en ingeniería, dedicamos la mayor parte de la sección al *método de los residuos ponderados*.

El método directo. En el caso donde $f(x) = 0$, se utiliza un método directo para generar las ecuaciones de los elementos. La relación entre el flujo de calor y el gradiente de temperatura puede representarse mediante la ley de Fourier:

$$q = -k' \frac{dT}{dx}$$

donde q = flujo [cal/(cm² · s)] y k' = coeficiente de conductividad térmica [cal/(s · cm · °C)]. Si se utiliza una función de aproximación lineal para caracterizar la temperatura del elemento, el flujo de calor hacia el elemento a través del nodo 1 se representa por

$$q_1 = k' \frac{T_1 - T_2}{x_2 - x_1}$$

donde q_1 es el flujo de calor en el nodo 1. De manera similar, para el nodo 2,

$$q_2 = k' \frac{T_2 - T_1}{x_2 - x_1}$$

Estas dos ecuaciones expresan la relación de la distribución de la temperatura interna de los elementos (determinada por las temperaturas nodales) con el flujo de calor en sus extremos. En consecuencia representan nuestras ecuaciones de los elementos deseadas. Se simplifican aún más reconociendo que la ley de Fourier se puede utilizar para expresar los flujos de los extremos en términos de los gradientes de temperatura en las fronteras. Es decir,

$$q_1 = -k' \frac{dT(x_1)}{dx} \quad q_2 = k' \frac{dT(x_2)}{dx}$$

que se sustituyen en las ecuaciones de los elementos para dar

$$\frac{1}{x_2 - x_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{dT(x_1)}{dx} \\ \frac{dT(x_2)}{dx} \end{Bmatrix} \quad (31.14)$$

Observe que la ecuación (31.14) se presentó en el formato de la ecuación (31.9). Así, logramos generar una ecuación matricial que describa el comportamiento de un elemento típico de nuestro sistema.

El método directo resulta muy intuitivo. Siendo utilizado en áreas como la mecánica, para resolver problemas importantes. Sin embargo, en otros contextos a menudo es difícil, si no es que imposible, obtener directamente las ecuaciones del elemento finito. En consecuencia, como se describe a continuación, se cuenta con técnicas matemáticas más generales.

El método de los residuos ponderados. La ecuación diferencial (31.12) se reexpresa como

$$0 = \frac{d^2 T}{dx^2} + f(x)$$

La solución aproximada [ecuación (31.13)] se sustituye en esta ecuación. Como la ecuación (31.13) no es la solución exacta, el lado izquierdo de la ecuación resultante no será cero, sino que será igual a un residuo,

$$R = \frac{d^2 \bar{T}}{dx^2} + f(x) \quad (31.15)$$

El *método de los residuos ponderados* (MRP) consiste en encontrar un mínimo para el residuo, de acuerdo con la fórmula general

$$\int_D R W_i dD = 0 \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (31.16)$$

donde D = dominio de la solución y W_i = funciones de ponderación linealmente independientes.

Aquí, se tienen múltiples opciones para las funciones de ponderación (cuadro 31.1). El procedimiento más común para el método del elemento finito consiste en emplear las funciones de interpolación N_i como las funciones de ponderación. Cuando éstas se sustituyen en la ecuación (31.16), el resultado se conoce como el método de Galerkin,

$$\int_D R N_i dD = 0 \quad i = 1, 2, \dots, m$$

En nuestra barra unidimensional, la ecuación (31.15) se sustituye en esta formulación para dar

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{d^2 \bar{T}}{dx^2} + f(x) \right] N_i dx \quad i = 1, 2$$

que se pueden reexpresar como sigue:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{d^2 \bar{T}}{dx^2} N_i(x) dx = - \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) N_i(x) dx \quad i = 1, 2 \quad (31.17)$$

Ahora, se aplicarán varias manipulaciones matemáticas para simplificar y evaluar la ecuación (31.17). Una de las más importantes es la simplificación del lado izquierdo usando la integración por partes. Del cálculo, recuerde que esta operación se expresa como

$$\int_a^b u dv = uv|_a^b - \int_a^b v du$$

Cuadro 31.1 Esquemas de residuos alternativos

Se puede elegir entre varias funciones de ponderación para la ecuación (31.16). Cada una representa un procedimiento alternativo para el MRP.

En el método de la colocación, elegimos tantas posiciones como coeficientes desconocidos existan. Después, se ajustan los coeficientes hasta que los residuos desaparezcan en cada una de estas posiciones. En consecuencia, la función de aproximación dará resultados perfectos en las posiciones elegidas, pero en las posiciones restantes tendremos un residuo diferente de cero. Así, este método es parecido a los de interpolación del capítulo 18. Observe que la colocación corresponde a usar la función de ponderación

$$W = \delta(x - x_i) \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n$$

donde $n =$ el número de coeficientes desconocidos y $\delta(x - x_i) =$ la función delta de Dirac, que es igual a cero en todas partes excepto en $x = x_i$, donde es igual a 1.

En el método del subdominio, el intervalo se divide en tantos segmentos, o "subdominios", como coeficientes desconocidos existan. Después, se ajustan los coeficientes hasta que el valor promedio del residuo sea cero en cada subdominio. Así, en cada subdominio, la función de ponderación será igual a 1, y la ecuación (31.16) se convierte en

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} R dx = 0 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n$$

donde x_{i-1} y x_i son las fronteras del subdominio.

Si u y v se eligen adecuadamente, la nueva integral en el lado derecho será más fácil de evaluar que la integral original del lado izquierdo. Esto se puede hacer para el término del lado izquierdo de la ecuación (31.17), escogiendo $N_i(x)$ como u , y $(d^2 \bar{T}/dx^2)$ como dv , se obtiene

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} N_i(x) \frac{d^2 \bar{T}}{dx^2} dx = N_i(x) \frac{d \bar{T}}{dx} \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} - \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dN_i}{dx} \frac{d \bar{T}}{dx} dx \quad i = 1, 2 \quad (31.18)$$

Así, hemos dado el importante paso de bajar el orden en la formulación; de una segunda a una primera derivada.

A continuación, se evalúa cada uno de los términos que hemos creado en la ecuación (31.18). Para $i = 1$, el primer término del lado derecho de la ecuación (31.18) se evalúa como sigue

$$N_1(x) \frac{d \bar{T}}{dx} \Big|_{x_1}^{x_2} = N_1(x_2) \frac{d \bar{T}(x_2)}{dx} - N_1(x_1) \frac{d \bar{T}(x_1)}{dx}$$

Sin embargo, de la figura 31.3 recuerde que $N_1(x_2) = 0$ y $N_1(x_1) = 1$, por lo tanto,

$$N_1(x) \frac{d \bar{T}}{dx} \Big|_{x_1}^{x_2} = - \frac{d \bar{T}(x_1)}{dx} \quad (31.19)$$

De manera similar, para $i = 2$,

$$N_2(x) \frac{d \bar{T}}{dx} \Big|_{x_1}^{x_2} = \frac{d \bar{T}(x_2)}{dx} \quad (31.20)$$

Así, el primer término en el lado derecho de la ecuación (31.18) representa las condiciones de frontera naturales en los extremos de los elementos.

Ahora, antes de continuar, reagrupemos sustituyendo en la ecuación original los términos correspondientes por nuestros resultados. Empleemos las ecuaciones (31.18) a (31.20) para hacer las sustituciones correspondientes en la ecuación (31.17); para $i = 1$,

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{d \bar{T}}{dx} \frac{dN_1}{dx} dx = - \frac{d \bar{T}(x_1)}{dx} + \int_{x_1}^{x_2} f(x) N_1(x) dx \quad (31.21)$$

y para $i = 2$,

$$\int_{x_2}^{x_3} \frac{d \bar{T}}{dx} \frac{dN_2}{dx} dx = \frac{d \bar{T}(x_2)}{dx} + \int_{x_2}^{x_3} f(x) N_2(x) dx \quad (31.22)$$

Observe que la integración por partes nos llevó a dos importantes resultados. Primero, ha incorporado las condiciones de frontera directamente dentro de las ecuaciones del elemento. Segundo, ha bajado la evaluación de orden superior, de una segunda a una primera derivada. Este último resultado tiene como consecuencia significativa que las funciones de aproximación necesitan preservar continuidad de valor, pero no pendiente en los nodos.

Observe también que ahora podemos comenzar a darles significado físico a cada uno de los términos que obtuvimos. En el lado derecho de cada ecuación, el primer término representa una de las condiciones de frontera del elemento; y el segundo es el efecto de la función de fuerza del sistema, en este caso, la fuente de calor $f(x)$. Como ahora será evidente, el lado izquierdo representa los mecanismos internos que rigen la

distribución de la temperatura del elemento. Es decir, en términos del método del elemento finito, el lado izquierdo será la matriz de propiedad del elemento.

Para ver esto nos concentramos en los términos del lado izquierdo. Para $i = 1$, el término es

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dT}{dx} \frac{dN_1}{dx} dx \quad (31.23)$$

Recordemos de la sección 31.1.2 que la naturaleza lineal de la función hace que la diferenciación y la integración sean sencillas. Si empleamos las ecuaciones (31.6) y (31.7) para hacer las sustituciones correspondientes en la ecuación (31.23), obtenemos

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{T_1 - T_2}{(x_2 - x_1)^2} dx = \frac{1}{x_1 - x_2} (T_1 - T_2) \quad (31.24)$$

De manera similar para $i = 2$ [ecuación (31.22)].

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{-T_1 + T_2}{(x_2 - x_1)^2} dx = \frac{1}{x_1 - x_2} (-T_1 + T_2) \quad (31.25)$$

Una comparación con la ecuación (31.14) nos muestra que éstas son similares a las relaciones obtenidas con el método directo usando la ley de Fourier, lo cual se aclara más al expresar las ecuaciones (31.24) y (31.25) en forma matricial como sigue:

$$\frac{1}{x_2 - x_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix}$$

Si este resultado se sustituye en las ecuaciones (31.21) y (31.22), y después se expresa en forma matricial, obtenemos la versión final de las ecuaciones de los elementos.

$$\frac{1}{x_2 - x_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \{T\} = \underbrace{\begin{Bmatrix} -\frac{dT(x_1)}{dx} \\ \frac{dT(x_2)}{dx} \end{Bmatrix}}_{\text{Condición de frontera}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} \int_{x_1}^{x_2} f(x)N_1(x) dx \\ \int_{x_1}^{x_2} f(x)N_2(x) dx \end{Bmatrix}}_{\text{Efectos externos}} \quad (31.26)$$

Observe que las ecuaciones del elemento pueden obtenerse no sólo mediante los métodos directo y de los residuos ponderados, sino también usando el cálculo de variaciones (por ejemplo, véase Allaire, 1985). En el caso presente, este método proporcionará ecuaciones idénticas a las deducidas arriba.

EJEMPLO 31.2

Ecuación del elemento en una barra calentada

Planteamiento del problema. Emplee la ecuación (31.26) para desarrollar las ecuaciones del elemento dada una barra de 10 cm, con condiciones en la frontera de $T(0, t) = 40$ y $T(10, t) = 200$ y una fuente de calor uniforme con $f(x) = 10$. Utilice cuatro elementos del mismo tamaño con longitud = 2.5 cm.

Solución. El término de la fuente de calor en el primer renglón de la ecuación (31.26) se evalúa sustituyendo la ecuación (31.3), e integrando para obtener

$$\int_0^{2.5} 10 \frac{2.5-x}{2.5} dx = 12.5$$

De manera similar, la ecuación (31.4) se sustituye en el término de la fuente de calor del segundo renglón de la ecuación (31.26), el cual también se integra para obtener

$$\int_0^{2.5} 10 \frac{x-0}{2.5} dx = 12.5$$

Estos resultados, junto con los valores de los otros parámetros, se emplean para sustituirse en la ecuación (31.26) y así obtener

$$0.4T_1 - 0.4T_2 = -\frac{dT}{dx}(x_1) + 12.5$$

y

$$-0.4T_1 + 0.4T_2 = \frac{dT}{dx}(x_2) + 12.5$$

31.2.3 Ensamble

Antes de que se ensamblen las ecuaciones del elemento, se debe establecer un esquema de numeración global que especifique la topología o el arreglo espacial del sistema. Como en la tabla 31.1, esto define la conectividad de los elementos en la malla. Debido a que este caso es unidimensional, el esquema de numeración parecerá tan predecible que resulta trivial. Sin embargo, en problemas para dos y tres dimensiones, tal esquema es el único medio para especificar qué nodos pertenecen a qué elementos.

Una vez que se ha especificado la topología, la ecuación del elemento (31.26) se puede escribir para otros elementos usando las coordenadas del sistema. Después, éstas se agregan (una por una) para ensamblar la matriz de todo el sistema (este proceso se continuará explorando en la sección 32.4). El proceso se ilustra en la figura 31.7.

TABLA 31.1 Topología del sistema para el esquema de segmentación del elemento finito de la figura 31.4b.

Elemento	Número de nodos	
	Local	Global
1	1	1
2	2	2
3	1	3
4	2	4
5	1	5

$$\begin{aligned}
 a) \begin{bmatrix} 0.4 & -0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.4 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -dT(x_1)/dx + 12.5 \\ dT(x_2)/dx + 12.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 b) \begin{bmatrix} 0.4 & -0.4 & -0.4 & 0 & 0 & 0 \\ -0.4 & 0.4 & -0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -dT(x_1)/dx + 12.5 \\ 12.5 + 12.5 \\ dT(x_2)/dx + 12.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 c) \begin{bmatrix} 0.4 & -0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.4 & 0.8 & -0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.4 & 0.4 & -0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.4 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -dT(x_1)/dx + 12.5 \\ 25 \\ 12.5 + 12.5 \\ dT(x_2)/dx + 12.5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 d) \begin{bmatrix} 0.4 & -0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.4 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.4 & 0.8 & -0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 & -0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.4 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -dT(x_1)/dx + 12.5 \\ 25 \\ 25 \\ 12.5 + 12.5 \\ dT(x_2)/dx + 12.5 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 e) \begin{bmatrix} 0.4 & -0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.4 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 & -0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.4 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -dT(x_1)/dx + 12.5 \\ 25 \\ 25 \\ 12.5 + 12.5 \\ dT(x_2)/dx + 12.5 \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

FIGURA 31.7
 Inscrito de las ecuaciones de todo el sistema.

31.2.4 Condiciones en la frontera

Observe que conforme se ensamblan las ecuaciones, se cancelan las condiciones de frontera internas. Así, el resultado final de (F) en la figura 31.7e tiene condiciones de frontera sólo para el primero y el último nodos. Ya que T_1 y T_6 están dados, dichas condiciones de frontera naturales en los extremos de la barra, $dT(x_1)/dx$ y $dT(x_2)/dx$, representan incógnitas. Por lo tanto, las ecuaciones se reexpresan como sigue:

$$\begin{aligned}
 \frac{dT}{dx}(x_1) &= -0.4T_2 &= -3.5 \\
 0.8T_2 &= -0.4T_3 &= 41 \\
 -0.4T_2 &= +0.8T_3 - 0.4T_4 &= 25 \\
 -0.4T_3 &= +0.8T_4 - 0.4T_5 &= 105 \\
 -0.4T_4 &= -0.4T_5 &= -67.5 \\
 \frac{dT}{dx}(x_2) &= -67.5
 \end{aligned}$$

31.2.5 Solución

De la ecuación (31.27) se obtiene

$$\begin{aligned}
 \frac{dT}{dx}(x_1) &= 66 & T_2 &= 173.75 & T_3 &= 245 \\
 T_4 &= 253.75 & \frac{dT}{dx}(x_2) &= -34
 \end{aligned}$$

31.2.6 Proceso posterior

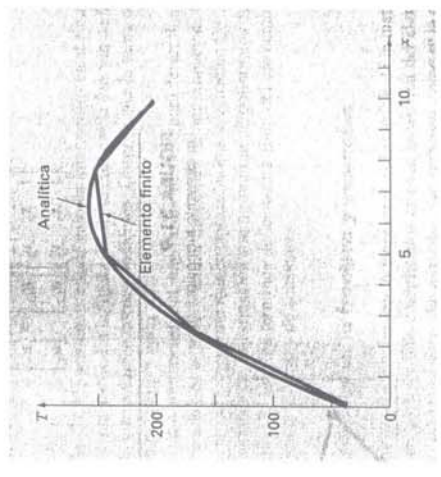
Los resultados se representan gráficamente. En la figura 31.8 se muestran los resultados del método del elemento finito, junto con la solución exacta. Observe que el cálculo del elemento finito capta la tendencia general de la solución exacta y, además, da una coincidencia exacta en los nodos. Sin embargo, existe una discrepancia en el interior de cada elemento debido a la naturaleza lineal de las funciones de forma.

31.3 PROBLEMAS BIDIMENSIONALES

Aunque la "contabilidad" matemática aumenta de forma notable, la extensión del método del elemento finito a dos dimensiones es similar, conceptualmente, a los problemas

FIGURA 31.8

Resultados al aplicar el método del elemento finito a una barra calentada. También se muestra la solución exacta.



unidimensionales analizados hasta ahora. De manera que se siguen los mismos pasos señalados en la sección 31.1.

31.3.1 Discretización

Comúnmente se emplean elementos sencillos, como triángulos o cuadriláteros, en la malla del elemento finito para dos dimensiones. En este análisis, nos limitaremos a elementos triangulares del tipo ilustrado en la figura 31.9.

31.3.2 Ecuaciones del elemento

Tal como en el caso unidimensional, el siguiente paso consiste en desarrollar una ecuación para aproximar la solución del elemento. Para un elemento triangular, la aproximación más sencilla es el polinomio lineal [compare con la ecuación (31.1)]

$$u(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y \quad (31.28)$$

donde $u(x, y)$ es la variable dependiente, las a = coeficientes, x y y = variables independientes. Esta función debe pasar a través de los valores de $u(x, y)$ en los nodos del triángulo (x_1, y_1) , (x_2, y_2) y (x_3, y_3) . Por lo tanto,

$$u_1(x, y) = a_0 + a_1x_1 + a_2y_1$$

$$u_2(x, y) = a_0 + a_1x_2 + a_2y_2$$

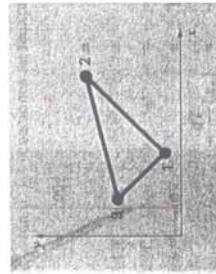
$$u_3(x, y) = a_0 + a_1x_3 + a_2y_3$$

o, en forma matricial,

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

FIGURA 31.9

Un elemento triangular.



de donde se obtiene

$$a_0 = \frac{1}{2A_e} [u_1(x_2y_3 - x_3y_2) + u_2(x_3y_1 - x_1y_3) + u_3(x_1y_2 - x_2y_1)] \quad (31.29)$$

$$a_{1,1} = \frac{1}{2A_e} [u_1(y_2 - y_3) + u_2(y_3 - y_1) + u_3(y_1 - y_2)] \quad (31.30)$$

$$a_{1,2} = \frac{1}{2A_e} [u_1(x_3 - x_2) + u_2(x_2 - x_1) + u_3(x_1 - x_3)] \quad (31.31)$$

donde A_e es el área del elemento triangular,

$$A_e = \frac{1}{2} [(x_2y_3 - x_3y_2) + (x_3y_1 - x_1y_3) + (x_1y_2 - x_2y_1)]$$

Las ecuaciones (31.29) a (31.31) se sustituyen en la ecuación (31.28). Después de reagrupar términos semejantes, el resultado se expresa como sigue:

$$u = N_1u_1 + N_2u_2 + N_3u_3 \quad (31.32)$$

donde

$$N_1 = \frac{1}{2A_e} [(x_2y_3 - x_3y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y]$$

$$N_2 = \frac{1}{2A_e} [(x_3y_1 - x_1y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y]$$

$$N_3 = \frac{1}{2A_e} [(x_1y_2 - x_2y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y]$$

La ecuación (31.32) permite predecir valores intermedios en el elemento, con base en los valores de sus nodos. En la figura 31.10 se muestra la función de forma junto con las funciones de interpolación correspondientes. Observe que la suma de las funciones de interpolación es siempre igual a 1.

Como en el caso unidimensional, hay varios métodos para desarrollar las ecuaciones del elemento, basados en la EDP y en las funciones de aproximación. Las ecuaciones resultantes son considerablemente más complicadas que la ecuación (31.26). Sin embargo, como las funciones de aproximación son normalmente polinomios de grado inferior como la ecuación (31.28), los términos de la matriz final del elemento consistirán de polinomios de grado inferior y de constantes.

31.3.3 Condiciones en la frontera y ensamble

La incorporación de condiciones en la frontera y el ensamble de la matriz del sistema también se hacen un poco más complicados cuando la técnica del elemento finito se aplique a problemas en dos y tres dimensiones. Sin embargo, como en la deducción de la

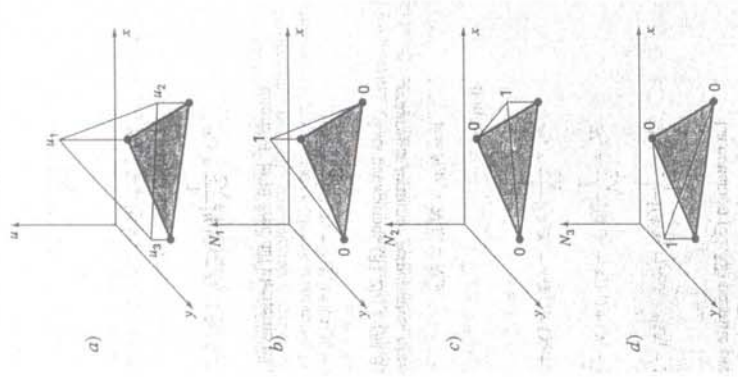


FIGURA 31.10 a) Una función de aproximación lineal para un elemento triangular. Las funciones de interpolación correspondientes se muestran en los incisos b) a d).

matriz del elemento, la dificultad está más relacionada con la mecánica del proceso que con la complejidad conceptual. Por ejemplo, el establecimiento de la topología del sistema, que fue trivial para el caso unidimensional, se convierte en un asunto de gran importancia en los casos de dos y tres dimensiones. En particular, la elección de un esquema de numeración determinará el bandedo de la matriz del sistema resultante y, por lo tanto, la eficiencia con la que puede resolverse. En la figura 31.11 se muestra el esquema desarrollado antes para una placa calentada, y que se resolvió con los métodos por diferencias finitas en el capítulo 29.

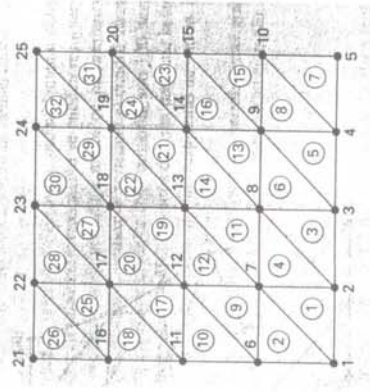


FIGURA 31.11 El esquema de numeración de los nodos y los elementos de una aproximación por elemento finito de la placa calentada, que se caracterizó previamente por diferencias finitas en el capítulo 29.

31.3.4 Solución y procesamiento posterior

Aunque los mecanismos de solución son complicados, la matriz del sistema es tan sólo un conjunto de n ecuaciones simultáneas que pueden usarse para encontrar los valores de la variable dependiente en los n nodos. En la figura 31.12 se muestra una solución que corresponde a la solución por diferencias finitas de la figura 29.5.

31.4

RESOLUCIÓN DE EDP CON BIBLIOTECAS Y PAQUETES DE SOFTWARE

Bibliotecas y paquetes de software pueden ayudarnos a resolver directamente las EDP. Sin embargo, como se describe en las siguientes secciones, muchas de las soluciones están limitadas a problemas sencillos, lo cual es particularmente cierto para los casos de dos y de tres dimensiones. En tales situaciones, los paquetes genéricos (es decir, los no desarrollados expresamente para resolver EDP, como los paquetes para el elemento finito) a menudo están limitados a simples dominios rectangulares.

Aunque esto podría parecer una limitante, los problemas sencillos llegan a tener gran utilidad desde el punto de vista pedagógico. Ocurre así cuando las herramientas de visualización de los paquetes se utilizan para desplegar los resultados de los cálculos.

31.4.1 Excel

Aunque Excel no tiene la posibilidad de resolver directamente EDP, es un buen ambiente para desarrollar soluciones sencillas para las EDP elípticas. Por ejemplo, la presentación

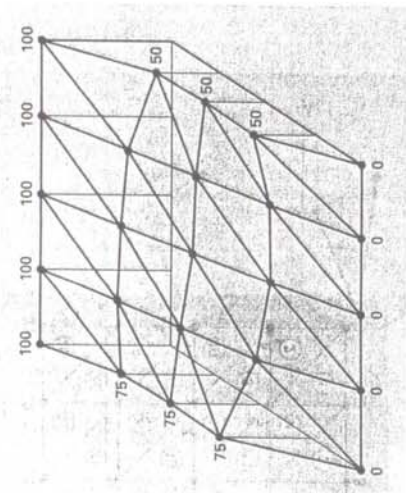
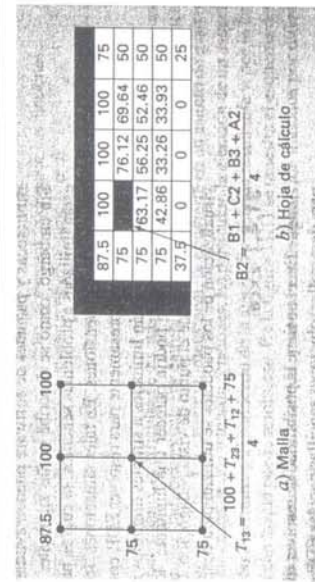


FIGURA 31.12
Distribución de temperatura en una placa calentada, calculada con el método del elemento finito.

ortogonal de las celdas de la hoja de cálculo (figura 31.13b) es análogo a la malla utilizada en el capítulo 29 para modelar la placa calentada (figura 31.13a).

Como en la figura 31.13b, las condiciones de frontera de Dirichlet pueden introducirse primero en el contorno del bloque de la celda. La fórmula del método de Liebmann se implementa al introducir la ecuación (29.11) en una de las celdas del interior (como la celda B2 de la figura 31.13b). Así, el valor de la celda se calcula en función de las celdas adyacentes. Luego se copia la celda a las otras celdas interiores. Debido a la naturaleza

FIGURA 31.13
Analogía entre a) una malla rectangular y b) las celdas de una hoja de cálculo.



relativa de la instrucción copiar de Excel, todas las demás celdas serán dependientes de sus celdas adyacentes.

Una vez que usted ha copiado la fórmula, probablemente obtendrá un mensaje de error: **Cannot resolve circular references** (No se pueden resolver referencias circulares). Usted puede rectificar esto yendo al menú de herramientas y seleccionando **Opciones**. Luego seleccione **Calcular** y verifique el cuadro **Iteración**. Esto permite que la hoja de cálculo vuelva a calcular (por omisión, son 100 iteraciones) y seguir el método de Liebmann iterativamente. Después de esto, presione la tecla F9 para volver a calcular de forma manual la hoja hasta que las respuestas no varíen, lo cual significa que ha convergido la solución.

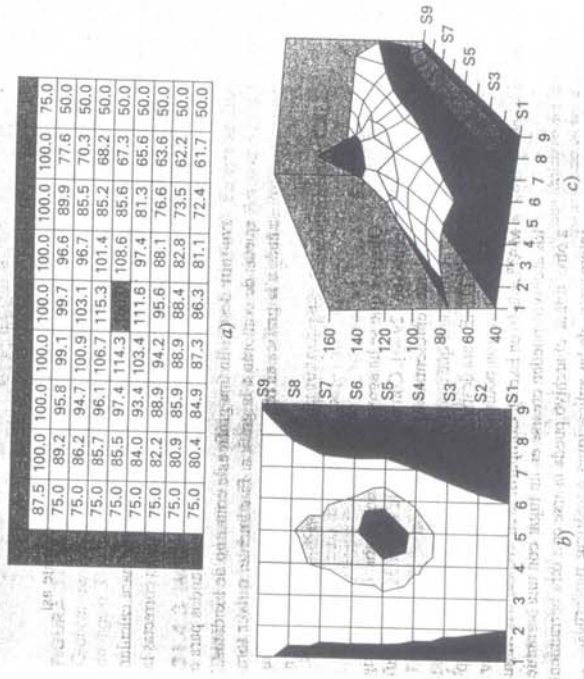
Una vez resuelto el problema, se utilizan las herramientas gráficas de Excel para visualizar los resultados. En la figura 31.14a se muestra un ejemplo. En tal caso, se tiene que

- Se usó una malla fina
- Se aisló la frontera inferior
- Se agregó una fuente de calor de 150 a la mitad de la placa (celda E5).

Los resultados numéricos de la figura 31.14a pueden ilustrarse con el asistente para gráficos de Excel. Las figuras 31.14b y c muestran gráficas de superficies tridimensionales.

FIGURA 31.14

a) Solución en Excel de la ecuación de Poisson para una placa con un extremo inferior aislado y una fuente de calor. b) Mapa topográfico y c) Ilustración tridimensional de las temperaturas.



Por lo general, la orientación y de éstas es la inversa de la hoja de cálculo. Así, el extremo superior de las temperaturas más altas (100) normalmente se representará en la parte inferior de la gráfica. Hemos invertido los valores de y en nuestra hoja antes de graficar, de modo que las gráficas sean consistentes con la hoja de cálculo.

Advertir como las gráficas nos ayudan a visualizar lo que sucederá. El calor fluye hacia abajo desde la fuente hasta las fronteras, formando una imagen parecida a una montaña. El calor también fluye hacia abajo desde la frontera con temperatura alta hasta los dos extremos laterales. Observe cómo el calor fluye hacia el extremo de baja temperatura (50). Por último, observe cómo el gradiente de temperatura en la dimensión y tiende a cero para el extremo inferior aislado ($\partial T/\partial y \rightarrow 0$).

31.4.2 MATLAB

Aunque el paquete MATLAB estándar no tiene grandes capacidades para resolver las EDP, se pueden desarrollar archivos m y funciones con este propósito. Además, su capacidad para mostrar imágenes es muy útil, en particular para visualizar problemas bidimensionales.

Para ilustrar esta capacidad, primero desarrollamos la hoja de cálculo en Excel de la figura 31.1.4a. Estos resultados pueden guardarse como un archivo de texto, con un nombre como `plate.txt`. Después este archivo se traslada al directorio de MATLAB.

Una vez en MATLAB, se carga este archivo escribiendo

```
>> load plate.txt
```

Luego, los gradientes se calculan simplemente así

```
>> [px,py]=gradient(plate);
```

Observe que éste es el método más simple para calcular gradientes usando los valores por omisión de $dx = dy = 1$. Por lo tanto, serán correctas las direcciones y las magnitudes relativas.

Por último, se utilizan una serie de comandos para obtener la gráfica. El comando `contour` desarrolla una gráfica de contorno de los datos. El comando `clabel` agrega etiquetas de contorno a la gráfica. Finalmente, `quiver` toma los datos del gradiente y los añade a la gráfica en forma de flechas.

```
>> cs=contour(plate);clabel(cs);hold on
>> quiver(-px,-py);hold off
```

Observe que se ha agregado el signo menos, debido al signo menos de la ley de Fourier [ecuación (29.4)]. Como se ve en la figura 31.15, la gráfica resultante proporciona una excelente representación de la solución.

Considere que cualquier archivo que esté en el formato adecuado puede introducirse en MATLAB para desplegarse de esta manera. Por ejemplo, el cálculo con IMSL descrito a continuación podría programarse para generar un archivo que se pueda utilizar en MATLAB (o en Excel). Compartir archivos entre herramientas es muy común. Además, los archivos pueden crearse en un lugar con una herramienta, y transmitirse vía Internet a otro, donde el archivo pueda usarse con otra herramienta. Éste es uno de los aspectos interesantes de las aplicaciones numéricas modernas.

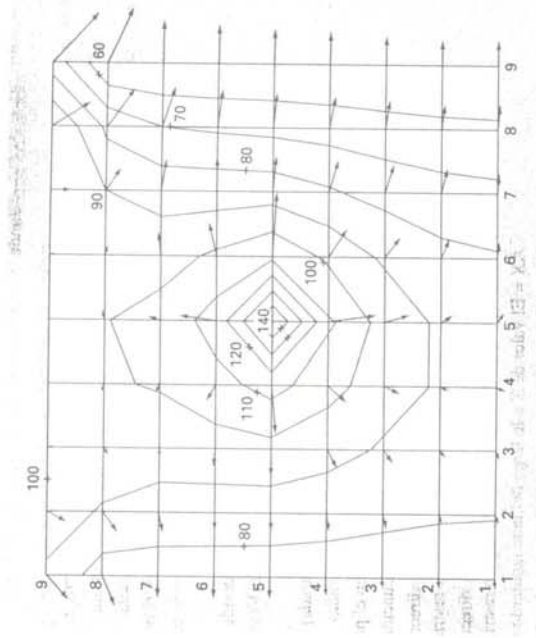


FIGURA 31.15

Gráficas de contorno generadas en MATLAB y calculadas con Excel, para la placa calentada (figura 31.1.4).

31.4.3 IMSL

IMSL tiene algunas rutinas para resolver EDP (tabla 31.2). En este análisis, nos dedicamos a la rutina `fps2h`. Esta rutina resuelve la ecuación de Poisson o la de Helmholtz en un rectángulo bidimensional usando una solución rápida de Poisson en una malla uniforme.

La subrutina `fps2h` se implementa con la siguiente instrucción CALL:

```
CALL FPS2H(PRH, BRH, COEF, NX, NY, AX, BX, AY, BY, IBCT, IORD, U, LDU)
```

TABLA 31.2 Rutinas IMSL para resolver EDP.

Categoría	Rutinas	Capacidad
Solución de sistemas de EDP en una dimensión	MOICH	Método de líneas con una base cúbica de Hermite
Solución de una EDP en dos y tres dimensiones	FPS2H FPS3H	Solución de Poisson rápida en dos dimensiones Solución de Poisson rápida en tres dimensiones

donde

PRH = FUNCIÓN suministrada por el usuario para evaluar el lado derecho de la ecuación diferencial parcial. La forma es PRH(X, Y), donde

X = valor de la coordenada X. (Entrada)

Y = valor de la coordenada Y. (Entrada)

PRH debe declararse EXTERNA en el programa de llamada.

BRH = FUNCIÓN suministrada por el usuario para evaluar el lado derecho de las condiciones de frontera.

La forma es BRHS(ISIDE, X, Y), donde

ISIDE = Número de lado. (Entrada) Véase IBCTY abajo para la definición de los números laterales.

X = valor de la coordenada X. (Entrada)

Y = valor de la coordenada Y. (Entrada)

BRH debe declararse EXTERNA en el programa de llamada.

COEF = Valor del coeficiente de U en la ecuación diferencial. (Entrada)

NX = Número de líneas de la malla en la dirección X. (Entrada) NX debe ser al menos 4. Véase el comentario 2 para restricciones adicionales en NX.

NY = Número de líneas de la malla en la dirección Y. (Entrada) NY debe ser al menos 4. Véase el comentario 2 para restricciones adicionales en NY.

AX = El valor de X a lo largo del lado izquierdo del dominio. (Entrada)

BX = El valor de X a lo largo del lado derecho del dominio. (Entrada)

AY = El valor de Y a lo largo de la parte inferior del dominio. (Entrada)

BY = El valor de Y a lo largo de la parte superior del dominio. (Entrada)

IBCT = Arreglo de tamaño 4 que indica el tipo de condición de frontera en cada lado del dominio o que la solución es periódica. (Entrada) Los lados están numerados de 1 a 4 como sigue:

Lado	Posición
1—Derecho	(X = BX)
2—Inferior	(Y = AY)
3—Izquierdo	(X = AX)
4—Superior	(Y = BY)

Hay tres tipos de condiciones de frontera

IBCTY

1 El valor de U está dado (Dirichlet)

2 El valor de dU/dX está dado (lados 1 y/o 3). (Neumann)

3 El valor de dU/dY está dado (lados 2 y/o 4). Periódico.

IORD = Orden de precisión de la aproximación por diferencias finitas. (Entrada) Puede ser 2 o 4. Normalmente se usa IORD = 4.

U = Arreglo de tamaño NX por NY que contiene la solución en los puntos de la malla. (Salida)

LDU = Dimensión principal de U exactamente como se especificó en el enunciado de dimensión del programa de llamada. (Entrada)

EJEMPLO 31.3

Uso del IMSL para encontrar la temperatura de una placa calentada

Planteamiento del problema. Utilice fps2h para determinar las temperaturas de una placa cuadrada calentada, con las condiciones de frontera fijas del ejemplo 29.1.

Solución. Un ejemplo de un programa principal en Fortran 90 que usa la función fps2h para resolver este problema se escribe así:

```

Program Plate
USE IMSL
IMPLICIT NONE
INTEGER :: ncv, nx, nctabl, ny, nytabl
PARAMETER (ncv=11, nx=33, nctabl=5, ny=33, nytabl=5)
INTEGER :: i, ibcty(4), iorder, j, nout
REAL :: QD2VL, ax, ay, brhs, bx, by, coefu, prhs, u(nx, ny), utabl, x, xdata(nx), y, ydata(ny)
EXTERNAL brhs, prhs
ax = 0.0
bx = 40.
ay = 0.0
by = 40.
ibcty(1) = 1
ibcty(2) = 1
ibcty(3) = 1
ibcty(4) = 1
coefu = 0.0
iorder = 4
CALL FPS2H(prhs, brhs, coefu, nx, ny, ax, bx, ay, by, ibcty, iorder, u, nx)
DO i=1, nx
  xdata(i) = ax + (bx-ax)*FLOAT(i-1)/FLOAT(nx-1)
END DO
DO j=1, ny
  ydata(j) = ay + (by-ay)*FLOAT(j-1)/FLOAT(ny-1)
END DO
CALL UMACH (2, nout)
WRITE (nout, '(8X,A,11X,A,11X,A)') 'X', 'Y', 'U'
DO i=1, nctabl
  x = ax + (bx-ax)*FLOAT(i-1)/FLOAT(nctabl-1)
  y = ay + (by-ay)*FLOAT(j-1)/FLOAT(nytabl-1)
  utabl = QD2VL(x, y, nx, xdata, ny, ydata, u, nx, .FALSE.)
  WRITE (nout, '(4F12.4)') x, y, utabl
END DO
END PROGRAM
FUNCTION prhs (x, y)
IMPLICIT NONE
REAL :: prhs, x, y
prhs = 0.0
END FUNCTION
REAL FUNCTION brhs (iside, x, y)
IMPLICIT NONE
INTEGER :: iside

```

```

REAL :: x, y
IF (lside == 1) then
  brhs = 50.
ELSEIF (lside == 2) THEN
  brhs = 0.
ELSEIF (lside == 3) THEN
  brhs = 75.
ELSE
  brhs = 100.
END IF
END FUNCTION

```

Una corrida de ejemplo proporcionará la siguiente salida:

X	Y	u	x	y	u
.0000	.0000	37.5000	30.0000	20.0000	52.3849
10.0000	.0000	.0000	40.0000	20.0000	50.0000
20.0000	.0000	.0000	.0000	30.0000	75.0000
30.0000	.0000	.0000	10.0000	30.0000	79.0032
40.0000	.0000	25.0000	20.0000	30.0000	76.8058
.0000	10.0000	75.0000	30.0000	30.0000	69.9017
10.0000	10.0000	42.5976	40.0000	30.0000	50.0000
20.0000	10.0000	32.2945	.0000	40.0000	87.5000
30.0000	10.0000	33.4962	10.0000	40.0000	100.0000
40.0000	10.0000	50.0000	20.0000	40.0000	100.0000
.0000	20.0000	75.0000	30.0000	40.0000	100.0000
10.0000	20.0000	63.5128	40.0000	40.0000	75.0000
20.0000	20.0000	56.2493			

es una variable. El extremo derecho tiene un gradiente de temperatura variable y la temperatura es fija. La fuente de calor, $f(x)$, tiene un valor constante. Las condiciones son

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = 0.25^\circ\text{C/m} \quad T_{x=50} = 100^\circ\text{C} \quad f(x) = 30 \text{ W/cm}$$

Desarrolle las ecuaciones nodales que deben resolverse para encontrar las temperaturas y los gradientes de las temperaturas en cada uno de los seis nodos. Ensamble las ecuaciones, inserte las condiciones de frontera y encuentre los valores de las incógnitas del conjunto de ecuaciones resultantes.

31.13 Encuentre la distribución de temperatura en una barra (figura P31.13) con generación interna de calor. Use el método del elemento finito; obtenga las ecuaciones nodales del elemento usando la fórmula de conducción del calor de Fourier

$$q_x = -kA \frac{dT}{dx}$$

y la ecuación de conservación del calor

$$\sum [q_x + f(x)] = 0$$

donde q_x = flujo de calor (W), k = conductividad térmica (W/(m · °C)), A = área de la sección transversal (m²) y $f(x)$ = fuente de calor (W/cm). La barra tiene una longitud de 50 cm, la coordenada x es cero en el extremo izquierdo y positiva hacia la derecha. La barra también está distribuida linealmente con un valor de $kA = 100 \text{ W m}^2/\text{C}$ y $50 \text{ W m}^2/\text{C}$ en $x = 0$ y en $x = 50$, respectivamente. Divida la barra en 5 elementos (6 nodos, cada uno de 10 cm de longitud). Ambos extremos de la barra tienen temperaturas fijas. La fuente de calor, $f(x)$, tiene un valor constante. Las condiciones son

$$T_{x=0} = 100^\circ\text{C} \quad T_{x=50} = 50^\circ\text{C} \quad f(x) = 30 \text{ W/cm}$$

Figura P31.13

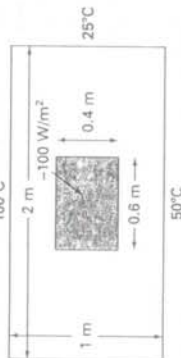
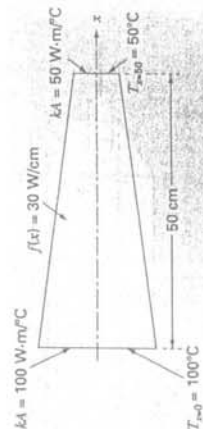


Figura P31.9

31.10 Use MATLAB para desarrollar una gráfica de contorno con flechas de flujo para la solución en Excel del problema 31.9.

31.11 Use IMSL para efectuar el mismo cálculo que en el ejemplo 31.3, pero aisle el extremo inferior de la placa.

31.12 Encuentre la distribución de temperatura en una barra (figura P31.12) con generación interna de calor, usando el método del elemento finito. Obtenga las ecuaciones nodales del elemento empleando la fórmula de conducción de calor de Fourier

$$q_x = -kA \frac{dT}{dx}$$

y la ecuación de conservación de calor

$$\sum [q_x + f(x)] = 0$$

donde q_x = flujo de calor (W), k = conductividad térmica (W/(m · °C)), A = área de la sección transversal (m²) y $f(x)$ = fuente de calor (W/cm). La barra tiene un valor de $kA = 100 \text{ W m}^2/\text{C}$ y una longitud de 50 cm; la coordenada x es cero en el extremo izquierdo y positiva hacia la derecha. Divida la barra en 5 elementos (6 nodos, cada uno de 10 cm de longitud). El extremo izquierdo tiene un gradiente de temperatura fijo y la temperatura

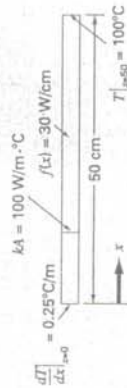


Figura P31.12

31.6 Desarrolle un programa computacional amigable, para modelar la distribución de temperatura en estado estacionario para una barra con una fuente constante de calor, usando el método del elemento finito. Escriba el programa de manera que se puedan utilizar nodos irregularmente espaciados.

31.7 Use Excel para efectuar el mismo cálculo que en la figura 31.14, pero aisle el extremo derecho y considere un sumidero de calor de -110 en la celda C7.

31.8 Utilice MATLAB para desarrollar una gráfica de contorno con flechas de flujo para la solución en Excel del problema 31.7.

31.9 Utilice Excel para modelar la distribución de temperatura de la placa mostrada en la figura P31.9. La placa tiene 0.01 m de espesor y una conductividad térmica de 2.5 W/(m · °C).

PROBLEMAS

1.1 Repita el ejemplo 31.1, pero ahora con $T(0, t) = 50$ y $T(10, t) = 100$ y una fuente uniforme de calor de 20.

1.2 Repita el ejemplo 31.2, pero ahora con las condiciones de frontera $T(0, t) = 50$ y $T(10, t) = 100$ y una fuente de calor de 20.

1.3 Aplique los resultados del problema 31.2 para calcular la distribución de temperatura en la barra completa, usando el método del elemento finito.

1.4 Utilice el método de Galerkin para desarrollar una ecuación del elemento para una versión en estado estacionario de la ecuación de advección-difusión que se describe en el problema 0.7. Expresé el resultado final en el formato de la ecuación 31.26), de modo que cada término tenga una interpretación física.

1.5 Una versión de la ecuación de Poisson que se presenta en mecánica es el siguiente modelo de la deflexión vertical de una barra con una carga distribuida $P(x)$:

$$A_x E \frac{d^2 u}{dx^2} = P(x)$$

áreas distribuidas deben tratarse como si fueran constantes a lo largo de un elemento. Por lo tanto, promedie los valores kA en el extremo del nodo y tome el promedio como una constante para todo el nodo. Desarrolle las ecuaciones nodales que deben resolverse para encontrar las temperaturas y los gradientes de las temperaturas en cada uno de los seis nodos. Ensamble las ecuaciones, inserte las condiciones de frontera y encuentre los valores de las incógnitas del conjunto de ecuaciones resultantes.

CAPÍTULO 32

Aplicaciones en ingeniería: ecuaciones diferenciales parciales

El propósito de este capítulo es aplicar los métodos de la parte ocho a problemas prácticos de ingeniería. En la *sección 32.1* se utiliza una EDP parabólica para calcular la distribución de una sustancia química, dependiente del tiempo a lo largo del eje longitudinal de un reactor rectangular. Este ejemplo ilustra cómo la inestabilidad de una solución puede deberse a la naturaleza de la EDP, más que a las propiedades del método numérico.

Las secciones 32.2 y 32.3 presentan aplicaciones de las ecuaciones de Poisson y Laplace a problemas de ingeniería civil y eléctrica. Entre otras cuestiones, esto le permitirá distinguir tanto las similitudes como las diferencias entre los problemas en esas áreas de la ingeniería. Además, se pueden comparar con el problema de la placa calentada que ha servido como sistema prototipo en esta parte del libro. La *sección 32.2* trata de la deflexión de una placa cuadrada; mientras que la *sección 32.3* se dedica al cálculo de la distribución del voltaje y el flujo de carga en una superficie bidimensional con un extremo curvado.

La *sección 32.4* presenta un análisis del elemento finito aplicado a una serie de resortes. Este problema de mecánica y estructuras ilustra mejor las aplicaciones del elemento finito, que al problema de temperatura usado para analizar el método en el capítulo 31.

32.1 BALANCE DE MASA UNIDIMENSIONAL DE UN REACTOR (INGENIERIA QUIMICA/BIOINGENIERIA)

Antecedentes. Los ingenieros químicos utilizan mucho los reactores idealizados en su trabajo de diseño. En las secciones 12.1 y 28.1 nos concentramos en reactores simples o acoplados bien mezclados, los cuales constituyen ejemplos de *sistemas de parámetros localizados* (recuerde la sección PT3.1.2).

FIGURA 32.1

Reactor alargado con un solo punto de entrada y salida. Un balance de masa se desarrolla alrededor de un segmento finito a lo largo del eje longitudinal del tanque con el objetivo de deducir una ecuación diferencial para la concentración.

