

CAPITULO 5

PROCEDIMIENTOS TOPOGRAFICOS

5.	Procedimientos topográficos	
5.1.	Poligonales	5-1
5.1.1.	Cálculo y compensación de poligonales	5-1
5.1.1.1.	Cálculo y compensación del error de cierre angular	5-3
5.1.1.2.	Ley de propagación de los acimutes	5-4
5.1.1.3.	Cálculo de las proyecciones de los lados	5-5
5.1.1.4.	Cálculo del error de cierre lineal	5-7
5.1.1.5.	Compensación del error lineal	5-8
5.1.1.5.1.	Método de la brújula	5-10
5.1.1.6.	Cálculo de las coordenadas de los vértices	5-10
5.2.	Triangulación	5-11
5.2.1.	Consistencia de los triángulos	5-20
5.2.2.	Compensación de triángulos	5-22
5.2.2.1.	Compensación de una red de triángulos	5-22
5.2.2.1.1.	Condición angular	5-22
5.2.2.1.2.	Condición de lado	5-22
5.2.2.2.	Compensación de un cuadrilátero	5-25
5.2.2.2.1.	Condición angular	5-25
5.2.2.2.2.	Condición de lado	5-25
	Problemas propuestos	5-29

5. PROCEDIMIENTOS TOPOGRÁFICOS

Es difícil imaginar un proyecto de ingeniería, por sencillo que este sea, en el que no se tenga que recurrir a la topografía en todas y cada una de sus fases.

En la figura 5.1, se observa, en forma esquemática, la relación que existe entre la topografía y otras disciplinas de la ingeniería.

En la figura 5.2 se puede apreciar la participación de los procesos topográficos a lo largo de las distintas fases de un proyecto, desde la recolección de información y producción de informes preliminares en la fase de planificación, hasta el control de operaciones y planificación de mantenimiento en la fase de operación.

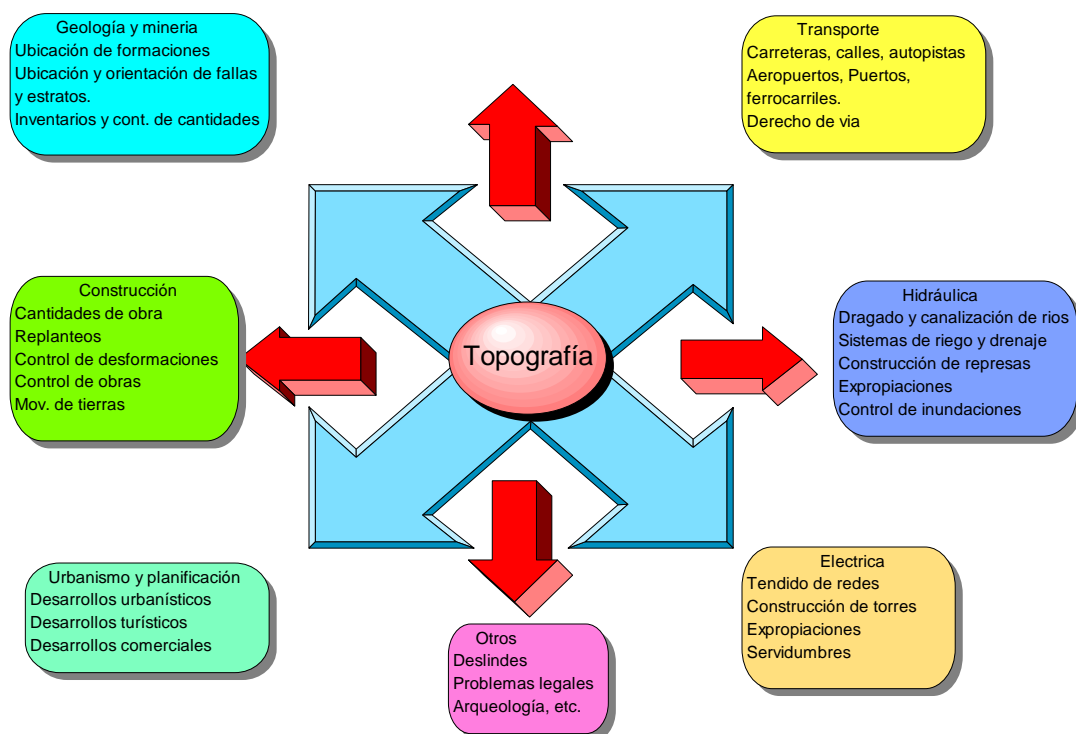


Figura 5.1. Relación de la topografía con otras disciplinas

5.1. Poligonales

La poligonación es uno de los procedimientos topográficos más comunes. Las poligonales se usan generalmente para establecer puntos de control y puntos de apoyo para el levantamiento de detalles y elaboración de planos, para el replanteo de proyectos y para el control de ejecución de obras.

Una poligonal es una sucesión de líneas quebradas, conectadas entre sí en los vértices. Para determinar la posición de los vértices de una poligonal en un sistema de coordenadas rectangulares planas, es necesario medir el ángulo horizontal en cada uno de los vértices y la distancia horizontal entre vértices consecutivos.

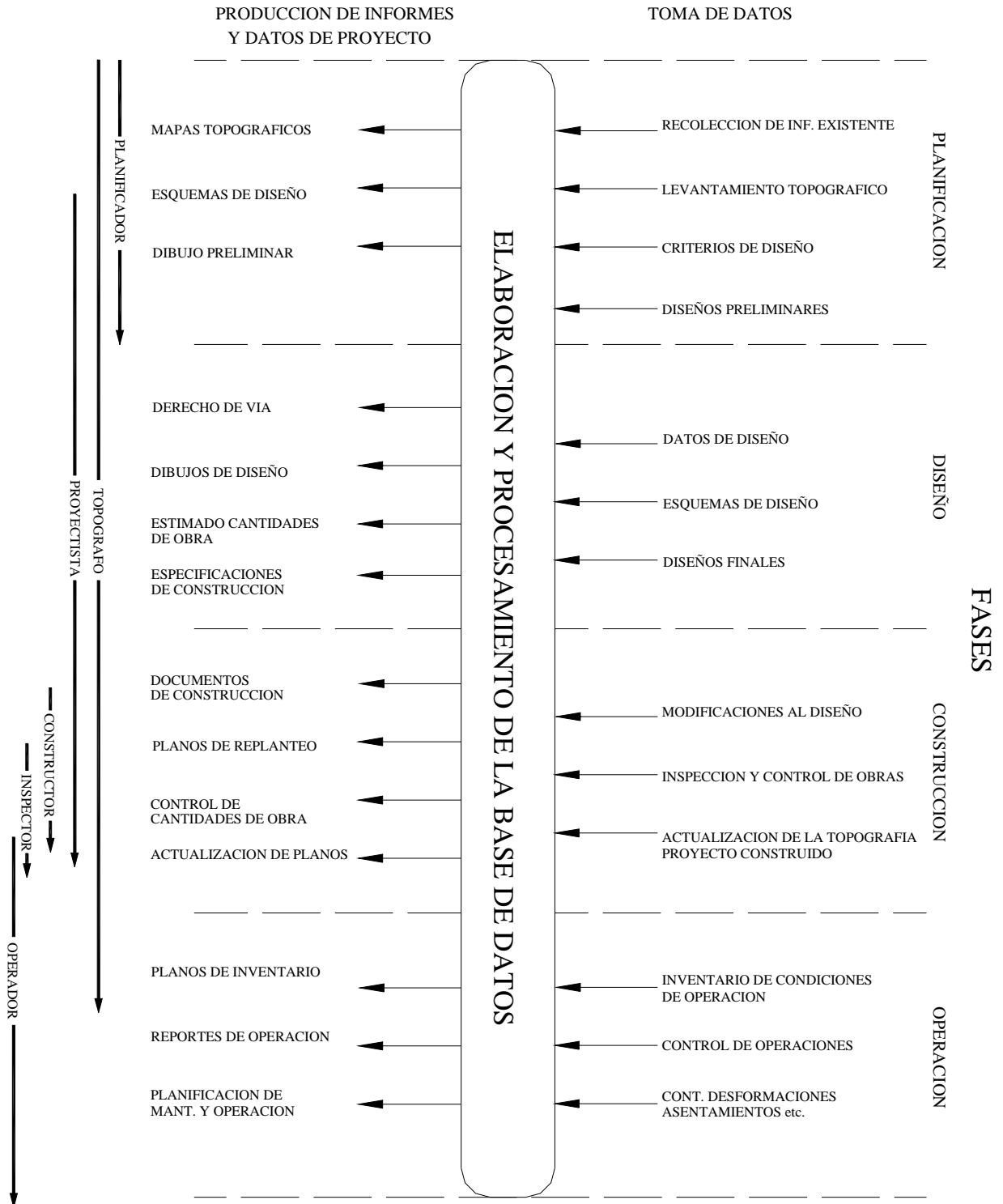
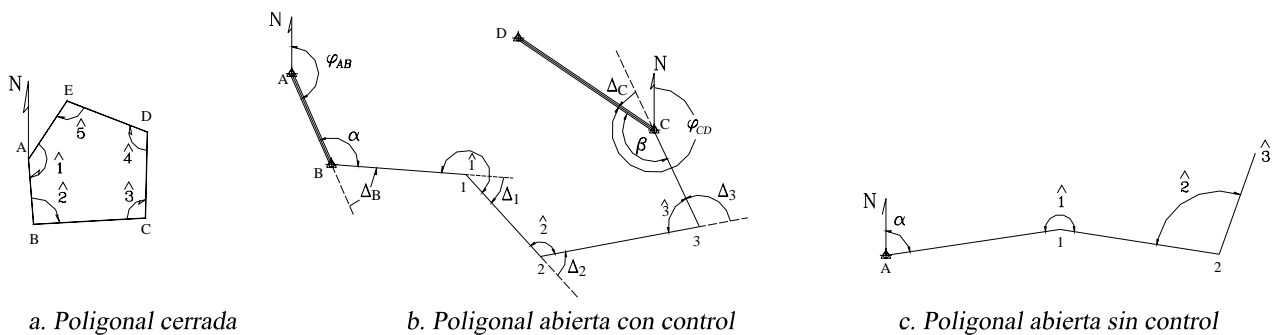


Figura 5.2. Participación de los procesos topográficos en las distintas fases de un proyecto

En forma general, las poligonales pueden ser clasificadas en:

- Poligonales cerradas (figura 5.3.a), en las cuales el punto de inicio es el mismo punto de cierre, proporcionando por lo tanto control de cierre angular y lineal.
- Poligonales abiertas o de enlace con control de cierre (figura 5.3.b), en las que se conocen las coordenadas de los puntos inicial y final, y la orientación de las alineaciones inicial y final, siendo también posible efectuar los controles de cierre angular y lineal.
- Poligonales abiertas sin control (figura 5.3.c), en las cuales no es posible establecer los controles de cierre, ya que no se conocen las coordenadas del punto inicial y/o final, o no se conoce la orientación de la alineación inicial y/o final.



a. Poligonal cerrada

b. Poligonal abierta con control

c. Poligonal abierta sin control

Figura 5.3. Diferentes tipos de poligonales

5.1.1. Cálculo y Compensación de Poligonales

La solución de una poligonal consiste en el cálculo de las coordenadas rectangulares de cada uno de los vértices o estaciones.

En poligonales cerradas y en poligonales abiertas de enlace con control, se realizan las siguientes operaciones:

1. Cálculo y compensación del error de cierre angular.
2. Cálculo de acimutes o rumbos entre alineaciones (ley de propagación de los acimutes).
3. Cálculo de las proyecciones de los lados.
4. Cálculo del error de cierre lineal.
5. Compensación del error lineal.
6. Cálculo de las coordenadas de los vértices.

En poligonales abiertas sin control, solamente se realizan los pasos 2, 3 y 6 ya que no existe control angular ni lineal.

5.1.1.1. Cálculo y compensación del error de cierre angular

En una poligonal cerrada se debe cumplir que la suma de los ángulos internos debe ser

$$\sum \angle_{\text{int}} = (n - 2)180^\circ \quad (5.1)$$

en donde:

$n =$ número de lados

Como se estableció previamente en el capítulo 4, la medición de los ángulos de una poligonal estará afectada por los inevitables errores instrumentales y operacionales, por lo que el error angular vendrá dado por la diferencia entre el valor medido y el valor teórico.

$$Ea = \sum \angle_{\text{int}} - (n - 2)180 \quad (5.2)$$

Se debe verificar que el error angular sea menor que la tolerancia angular, generalmente especificada por las normas y términos de referencia dependiendo del trabajo a realizar y la apreciación del instrumento a utilizar, recomendándose los siguientes valores.

<i>Poligonales principales</i>	$Ta = a\sqrt{n}$
<i>Poligonales secundarias</i>	$Ta = a\sqrt{n} + a$

en donde

$Ta =$ tolerancia angular
 $a =$ apreciación del instrumento.

Si el error angular es mayor que la tolerancia permitida, se debe proceder a medir de nuevo los ángulos de la poligonal.

Si el error angular es menor que la tolerancia angular, se procede a la corrección de los ángulos, repartiendo por igual el error entre todos los ángulos, asumiendo que el error es independiente de la magnitud del ángulo medido.

$$Ca = -\frac{Ea}{n} \quad (5.3)$$

En poligonales abiertas con control, el error angular viene dado por la diferencia entre el acimut final, calculado a partir del acimut inicial conocido y de los ángulos medidos en los vértices (ver 5.1.1.2. ley de propagación de los acimutes), y el acimut final conocido.

$$Ea = \phi_c - \phi_f \quad (5.4)$$

en donde:

Ea = Error angular

φ_{fc} = acimut final calculado

φ_f = acimut final conocido

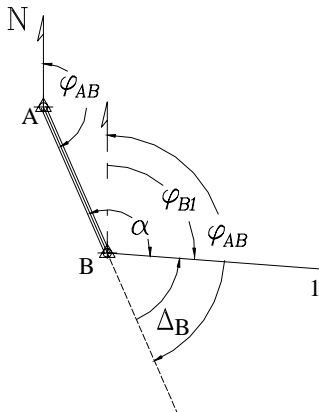
Al igual que en poligonales cerradas, se compara el error con la tolerancia angular. De verificarse la condición, se procede a la corrección angular, repartiendo el error en partes iguales entre los ángulos medidos.

La corrección también se puede efectuar sobre los acimutes, aplicando una corrección acumulativa, (múltiplo de la corrección angular), a partir del primer ángulo medido. En otras palabras, el primer acimut se corrige con Ca , el segundo con $2Ca$ y así sucesivamente, hasta el último acimut que se corrige con nCa .

5.1.1.2. Ley de propagación de los acimutes

Los acimutes de los de lados una poligonal se pueden calcular a partir de un acimut conocido y de los ángulos medidos, aplicando la ley de propagación de los acimutes, la cual se puede deducir de la figura 5.3.b.

Supongamos que en la figura 5.3.b, se tienen como datos el acimut φ_{AB} y los ángulos en los vértices y se desea calcular los acimutes de las alineaciones restantes, para lo cual procedemos de la siguiente manera:



El acimut φ_{B1} será

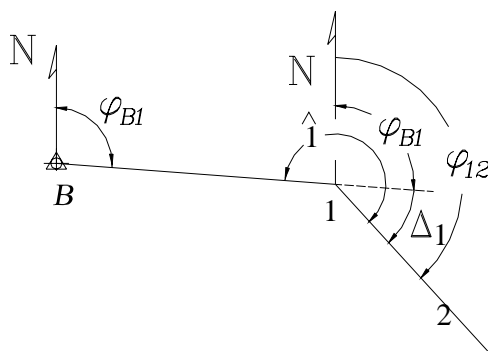
$$\varphi_{B1} = \varphi_{AB} - \Delta_B$$

siendo

$$\Delta_B = 180 - \alpha$$

luego

$$\varphi_{B1} = \varphi_{AB} + \alpha - 180^\circ$$



El acimut φ_{12} será

$$\varphi_{12} = \varphi_{B1} + \Delta_1$$

siendo

$$\Delta_1 = \angle 1 - 180^\circ$$

luego

$$\varphi_{12} = \varphi_{B1} + \angle 1 - 180^\circ$$

Si aplicamos el mismo procedimiento sobre cada uno de los vértices restantes, podremos generalizar el cálculo de los acimutes según la siguiente ecuación:

$$\varphi_i = \varphi_{i-1} + \angle \text{vértice} \pm 180^\circ \quad (5.5)$$

en donde:

φ_i = acimut del lado

φ_{i-1} = acimut anterior

Los criterios para la utilización de la ecuación (5.5) son los siguientes:

Si $(\varphi_{i-1} + \angle \text{vértice}) < 180^\circ \Rightarrow$ se suma 180°

Si $(\varphi_{i-1} + \angle \text{vértice}) \geq 180^\circ \Rightarrow$ se resta 180°

Si $(\varphi_{i-1} + \angle \text{vértice}) \geq 540^\circ \Rightarrow$ se resta 540° ya que ningún acimut puede ser mayor de 360°

Ejemplo 5.1

Conocido el acimut φ_{A1} y los ángulos en los vértices de la figura E5-1, calcule los acimutes de las alineaciones restantes.

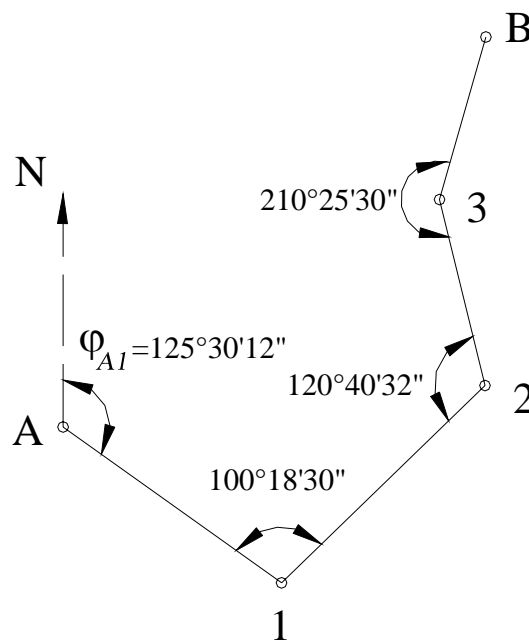


Figura E5-1

Solución

Aplicando la ecuación (5.5) tenemos:

Acimut de la alineación 1-2

$$\varphi_{12} = (125^\circ 30' 12'' + 100^\circ 18' 30'') \pm 180^\circ$$

como

$$(125^{\circ}30'12'' + 100^{\circ}18'30'') = 225^{\circ}48'42'' > 180^{\circ}$$

$$\varphi_{12} = 225^{\circ}48'42'' - 180^{\circ} = 45^{\circ}48'42''$$

$$\varphi_{12} = 45^{\circ}48'42''$$

Acimut de la alineación 2-3

$$\varphi_{2-3} = (45^{\circ}48'42'' + 120^{\circ}40'32'') \pm 180^{\circ}$$

como

$$(45^{\circ}48'42'' + 120^{\circ}40'32'') = 166^{\circ}29'14'' < 180^{\circ}$$

$$\varphi_{23} = 166^{\circ}29'14'' + 180^{\circ} = 346^{\circ}29'14''$$

$$\varphi_{23} = 346^{\circ}29'14''$$

Acimut de la alineación 3-B

$$\varphi_{3B} = (346^{\circ}29'14'' + 210^{\circ}25'30'') \pm 180^{\circ}$$

como

$$(346^{\circ}29'14'' + 210^{\circ}25'30'') = 556^{\circ}54'44'' > 540^{\circ}$$

$$\varphi_{3B} = 556^{\circ}54'44'' - 540 = 16^{\circ}54'44''$$

$$\varphi_{3B} = 16^{\circ}54'44''$$

5.1.1.3. Cálculo de las proyecciones de los lados

El cálculo de las proyecciones de los lados de una poligonal se estudió en el capítulo 1.1.3, correspondiente a las relaciones entre los sistemas de coordenadas polares y rectangulares.

Recordemos que las proyecciones de los lados de una poligonal se calculan en función de los acimutes y las distancias de los lados aplicando las ecuaciones (1-3) y (1-4), las cuales se reproducen a continuación:

$$\Delta N_{1-2} = D_{1-2} \times \cos \varphi_{12} \quad (1-3)$$

$$\Delta E_{1-2} = D_{1-2} \times \sin \varphi_{12} \quad (1-4)$$

En la figura 5-4 se representan gráficamente las proyecciones de una poligonal cerrada.

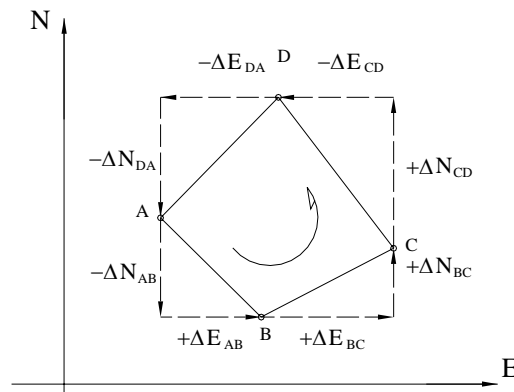


Figura 5-4. Representación de las proyecciones de los lados de una poligonal

5.1.1.4. Cálculo del error de cierre lineal

En una poligonal cerrada la suma de las proyecciones sobre el eje norte-sur debe ser igual a cero. De igual manera, la suma de las proyecciones sobre el eje este-oeste debe ser igual a cero (figura 5.4).

Debido a los inevitables errores instrumentales y operacionales presentes en la medición de distancias, la condición lineal mencionada nunca se cumple, obteniéndose de esta manera el **error de cierre lineal** representado en la figura 5.5.

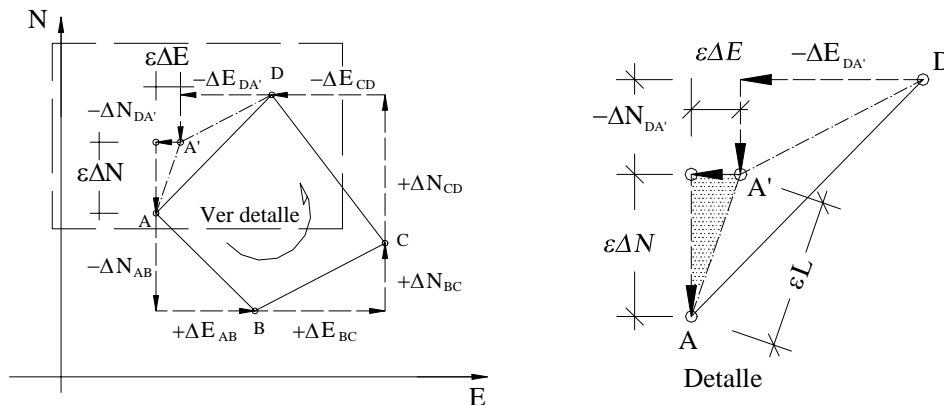


Figura 5-5 Error de cierre lineal en poligonales cerradas

En la figura 5.5., el punto A' representa la posición del punto A una vez calculadas las proyecciones con las distancias medidas. Nótese que para que se cumpla la condición lineal de cierre, el punto A' debería coincidir con el punto A.

Si hacemos suma de proyecciones a lo largo del eje norte-sur tendremos,

$$\varepsilon\Delta N = \Sigma\Delta_{N-S} \quad (5.6)$$

de igual manera, sumando proyecciones sobre el eje este-oeste, tenemos

$$\varepsilon\Delta E = \Sigma\Delta_{E-O} \quad (5.7)$$

el error lineal vendrá dado por

$$\varepsilon L = \sqrt{\varepsilon\Delta N^2 + \varepsilon\Delta E^2} \quad (5.8)$$

En el caso de una poligonal abierta, con control, como la mostrada en la figura 5.6, la suma de las proyecciones sobre el eje norte-sur debe ser igual a la diferencia entre las coordenadas norte de los puntos de control inicial y final (ΔN_{BC}), y la suma de las proyecciones sobre el eje este-oeste debe ser igual a la diferencia entre las coordenadas este de los puntos de control inicial y final (ΔE_{BC}); por lo tanto, el error sobre las proyecciones puede ser calculado

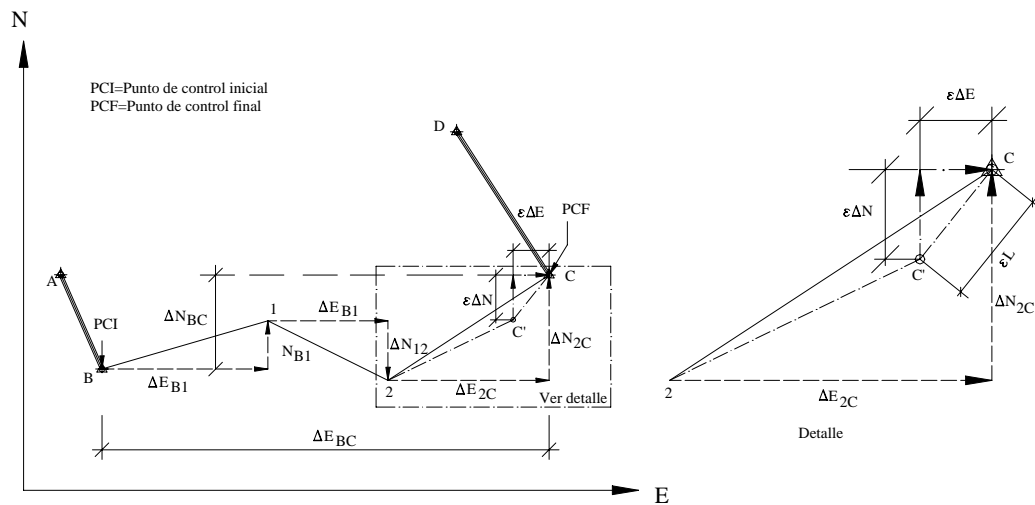


Figura 5-6. Poligonal abierta con control

$$\varepsilon\Delta N = \sum\Delta_{N-S} - \Delta N_{BC} \tag{5.9}$$

$$\varepsilon\Delta E = \sum\Delta_{E-O} - \Delta E_{BC} \tag{5.10}$$

y el error lineal se puede calcular aplicando la ecuación (5.8).

Una vez calculado el error lineal, se debe verificar que éste sea menor a la tolerancia lineal, (generalmente especificada por normas de acuerdo al tipo de importancia del trabajo, condiciones topográficas y precisión de los instrumentos de medida).

En algunos casos, la tolerancia lineal se relaciona con la precisión obtenida en el levantamiento definido por la siguiente ecuación.

$$P = \frac{\varepsilon L}{\Sigma L} \tag{5.11}$$

en donde:

P = precisión de la poligonal

ΣL = suma de los lados de la poligonal en m

El error relativo *n*, generalmente expresado en términos 1:*n*, viene dado por el inverso de P.

$$n = 1/P \tag{5.12}$$

La tabla 5.1, adaptada de Torres y Villate¹, nos puede servir como guía para la selección de la tolerancia lineal en función del error relativo.

¹ Torres A. y Villate E. (1968) *Topografía*. Colombia: Editorial Norma. p. 81.

Tabla 5.1.
Valores guías de tolerancia lineal en función de n

Tolerancia lineal	Tipo de levantamiento
1:800	Levantamiento de terrenos accidentados, de poco valor, levantamientos de reconocimiento, colonizaciones, etc.
1:1.000 a 1:1.500	Levantamientos de terreno de poco valor por taquimetría con doble lectura a la mira
1:1.500 a 1:2.500	Levantamiento de terrenos agrícolas de valor medio, con cinta.
1:2.500 a 1:5.000	Levantamientos urbanos y rurales, de mediano a alto valor, uso de distanciómetros electrónicos
1:10.000 ~	Levantamientos geodésicos

Algunas especificaciones empleadas en el estudio de carreteras² establecen la tolerancia lineal según las siguientes expresiones

$$\text{Terreno llano } TL = 0,015 \sqrt{\Sigma L} \quad (5.13)$$

$$\text{Terreno ondulado } TL = 0,025 \sqrt{\Sigma L} \quad (5.14)$$

Si el error lineal es mayor que la tolerancia lineal, es necesario comprobar en campo las distancias; en caso de verificarse que el error lineal sea menor que la tolerancia, se procede a la corrección lineal siguiendo un método de compensación adecuado.

5.1.1.5. Compensación del error lineal

El método adecuado para la compensación del error lineal depende de la precisión lograda por los instrumentos y procedimientos empleados en la medición.

Al presente, se han desarrollado diferentes métodos de compensación: el método de la brújula, el del tránsito, el de Crandall, el de los mínimos cuadrados, etc.; basados todos en diferentes hipótesis.

Recientemente, la evolución de la tecnología empleada en la fabricación de instrumentos ha igualado la precisión obtenida en la medición de distancias con la precisión obtenida en la medición angular, lo que hace al método de la brújula el método más adecuado para la compensación del error lineal, no sólo por asumir esta condición sino por la sencillez de los cálculos involucrados.

5.1.1.5.1. Método de la brújula

Este método, propuesto por Nathaniel Bowditch alrededor de 1800, es el método más utilizado en los trabajos normales de topografía.

² Ministerio de Obras Públicas. *Especificaciones Generales para el Estudio de Carreteras con Poligonal de Precisión*, Caracas. (citado por Carciente Jacob en *Carreteras Estudio y Proyecto*, 1980. P.89).

El método asume que:

- Los ángulos y las distancias son medidos con igual precisión
- El error ocurre en proporción directa a la distancia
- Las proyecciones se corrigen proporcionalmente a la longitud de los lados

Matemáticamente tenemos,

$$-CpNi : Li = \varepsilon\Delta N : \Sigma Li$$

$$-CpEi : Li = \varepsilon\Delta E : \Sigma Li$$

en donde,

$$CpNi = -\left(\frac{\varepsilon\Delta N}{\Sigma Li}\right) \cdot Li \quad (5.15)$$

$$CpEi = -\left(\frac{\varepsilon\Delta E}{\Sigma Li}\right) \cdot Li \quad (5.16)$$

siendo:

$CpNi$ = corrección parcial sobre la proyección norte-sur del lado i

$CpEi$ = corrección parcial sobre la proyección este-oeste del lado i

Li = longitud del lado i

El signo negativo es debido a que la corrección es de signo contrario al error

5.1.1.6. Cálculo de las coordenadas de los vértices

Una vez compensadas las proyecciones, se procede al cálculo de las coordenadas de los vértices de la poligonal.

Haciendo referencia a la figura 5.6, las coordenadas del punto 1, calculadas en función de las coordenadas del punto B, se obtienen de la siguiente manera

$$N_1 = N_B + \Delta N_{B1}$$

$$E_1 = E_B + \Delta E_{B1}$$

y las coordenadas de 2, calculadas a partir de 1,

$$N_2 = N_1 - \Delta N_{12}$$

$$E_2 = E_1 + \Delta E_{12}$$

y en forma general

$$N_i = N_{i-1} \pm \Delta N_{i-1:i} \quad (5.17)$$

$$E_i = E_{i-1} \pm \Delta E_{i-1:i} \quad (5.18)$$

El signo de la proyección depende de la dirección de la misma

Ejemplo 5-2

Siguiendo el procedimiento de cálculo de poligonales descrito, calcule las coordenadas de los vértices de la poligonal de la figura E5-2.

Punto	∠ Horizontal	Dist.
A	86°56'20"	
B	162°00'10"	38,20
C	119°25'14"	53,40
D	74°49'34"	96,20
E	96°48'32"	102,75
		104,20

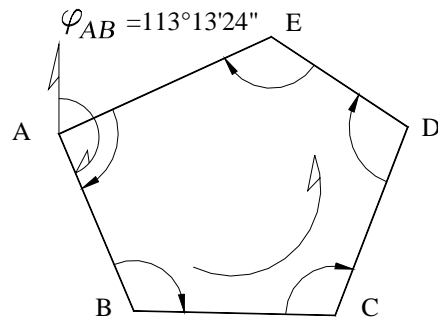


Figura E5-2

Coordenadas de A

A (1.040,82; 1.340,16)

Teodolito Wild T1-A con $A_p = 20''$

Solución

Aunque es costumbre calcular las poligonales en forma tabulada, este primer ejemplo lo trabajaremos siguiendo paso a paso el procedimiento indicado.

Cálculo y compensación del error angular

Tabla. TE5.2.1
Corrección Angular

Est.	∠ medido	Ca	∠ Corr.
A	86°56'20"	+2"	86°56'22"
B	162°00'10"	+2"	162°00'12"
C	119°25'14"	+2"	119°25'16"
D	74°49'34"	+2"	74°49'36"
E	96°48'32"	+2"	96°48'34"
Σ	539°59'50"	+10"	539°59'60"

Aplicando la condición geométrica de la ecuación 5.2 para una poligonal cerrada de 5 lados tenemos,

$$\varepsilon_a = (539°59'50'') - (5 - 2) \times 180$$

$$\varepsilon_a = (539°59'50'') - 540°$$

$$\varepsilon_a = -10''$$

Tolerancia angular $T_a = 20'' \sqrt{5} \cong 45''$

Como $\epsilon_a < T_a$ procedemos a distribuir el error en partes iguales a cada uno de los ángulos.

$$C_a = -(10'')/5 = 2'' \text{ por vértice}$$

Las correcciones parciales y los ángulos corregidos aparecen en la tabla TE5.2-1.

Con los ángulos corregidos procedemos al cálculo de los acimutes de los lados.

Tabla TE5.2.2

Est.	∠ Corregido	Acimut	∠ + Acimut	Signo
A	86°56'22''			
		113°13'24''		
B	162°00'12''		275°13'26''	> 180°
		95°13'36''		
C	119°25'16''		214°38'52''	> 180°
		34°38'52''		
D	74°49'36''		109°28'28''	< 180°
		289°28'28''		
E	96°48'34''		386°28'39''	> 180°
		206°17'02''		
A	86°56'22''		293°25'01''	>180°
	Control →	113°13'24''		

La tabla TE5.2.2 se calcula por aplicación de la ley de propagación de los acimutes, de la siguiente manera:

Sumamos el acimut conocido

$$\varphi_{AB} = 113^{\circ}13'24'' \text{ con el ángulo en B}$$

$$\angle B = 162^{\circ}00'12''$$

$$275^{\circ}13'26'' \text{ Como } \varphi_{AB} + \angle B > 180^{\circ}$$

$$\underline{-180^{\circ}00'00''}$$

$$\varphi_{BC} = 95^{\circ}13'36''$$

Colocamos este valor en la columna correspondiente a acimutes entre las filas B y C.

Procedemos de la misma manera para los lados restantes de la poligonal incluyendo, como control, el cálculo del acimut inicial.

En la tabla TE5.2.2 se ha incluido, de manera ilustrativa, una columna para la suma del ángulo y el acimut y una columna para el control del signo de la ecuación (5.5). Estas columnas no son necesarias ya que comúnmente estos pasos se hacen en una sola operación.

El cálculo y compensación de las proyecciones de los lados y de las coordenadas de los vértices se realiza en la forma que se muestra en la tabla TE5.2.3.

Tabla TE5.2.3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Punto	Acimut	Dis.	Proyecciones		Correcciones		Proyecciones corregidas		Coord.	
			ΔN	ΔE	CpN	CpE	ΔN	ΔE	Norte	Este
			D cos ρ	D sen ρ						
A									1.040,82	1.340,16
	113°13'24"	38,20	-15,06	35,10	-0,01	+0,00	-15,07	35,10		
B									1.025,75	1.375,26
	95°13'36"	53,40	-4,86	53,18	-0,01	+0,01	-4,87	53,19		
C									1.020,88	1.428,45
	34°38'52"	96,20	79,14	54,69	-0,01	+0,01	79,13	54,70		
D									1.100,01	1.483,15
	289°28'28"	102,75	34,26	-96,87	-0,01	+0,01	34,25	-96,86		
E									1.134,26	1.386,29
	206°17'02"	104,20	-93,43	-46,14	-0,01	+0,01	-93,44	-46,13		
A									1.040,82	1.340,16
	Σ	394,75	+0,05	-0,04	-0,05	+0,04	0,00	0,00		
			ϵL	0,06						

$$\text{Area} = 9.669,19 \text{ m}^2$$

En la tabla TE5.2.3, la columna 1 corresponde a la identificación del vértice o estación de la poligonal. La columna 2, a los valores de los acimutes corregidos. La columna 3, a las distancias de los lados. Las columnas 4 y 5, corresponden a las proyecciones norte y este, calculadas con las ecuaciones (1.3) y (1.4), respectivamente.

La suma de las proyecciones norte, columna 4, corresponde al $\epsilon\Delta N = + 0,05$. De igual manera, el error $\epsilon\Delta E = -0,04$ resulta de la suma de las proyecciones este, columna 5.

Chequeo de la tolerancia lineal

$$\epsilon L = \sqrt{(0,05)^2 + (-0,04)^2} = 0,06m$$

$$P = \frac{0,06}{394,75} = 0,0001520$$

$$n = \frac{1}{P} = 1:6.579$$

$$TL = 0,015\sqrt{\Sigma L} = 0,30m$$

$TL > \epsilon L \rightarrow$ procederemos a la compensación de las proyecciones

Compensación de proyecciones

Las columnas 6 y 7, correspondientes a las correcciones de las proyecciones, se calculan mediante la aplicación de las ecuaciones (5.15) y (5.16).

$$CpN_i = -\left[\frac{0,05}{394,75} \right] \cdot L_i$$

$$CpE_i = -\left[\frac{-0,04}{394,75} \right] \cdot L_i$$

Como chequeo, la suma de las correcciones de la columna 6 debe ser igual a $-\varepsilon\Delta N$ y la suma de las correcciones de la columna 7 debe ser igual a $-\varepsilon\Delta E$.

La columna 8 resulta de la suma de las columnas 4 y 6 y la columna 9 de la suma de las columnas 5 y 7.

Como chequeo, la suma de las proyecciones norte, columna 8, debe ser cero, y la suma de las proyecciones este, columna 9, debe ser cero.

Las coordenadas norte y este, columnas 10 y 11, se calculan sumando, en forma secuencial, las proyecciones corregidas a las coordenadas del punto anterior.

Por último, en caso de ser necesario, se calcula el área de la poligonal cerrada mediante la aplicación de la ecuación (1.14), sección 1.1.6.2.

La tabla TE5.2.4 muestra la forma usual de ordenar los datos de campo y el procedimiento de cálculo de poligonales.

Tabla E5.2.4

Cálculo de poligonal cerrada

Ubicación: _____

Fecha: _____

Equipo: Wild T1-A; cinta acero

Levantado por: _____

Revisado: _____

Origen de Coordenadas

Punto A: (1.040,82; 1.340,16)

Calculado por: _____

 φ_{AB} : 113°13'24"

Est.	\angle Medido	Ca	\angle Corregido	Acimut	Dist.	Proyecciones		Correcciones		Proyecciones corregidas		Coordenadas	
						ΔN	ΔE	CpN	CpE	ΔN	ΔE	Norte	Este
A	86°56'20"	+2"	86°56'22"									1.040,82	1.340,16
				113°13'24"	38,20	-15,06	35,10	-0,01	0,00	-15,07	35,10		
B	162°00'10"	+2"	162°00'12"									1.025,75	1.375,26
				95°13'36"	53,40	-4,86	53,18	-0,01	+0,01	-4,87	53,19		
C	119°25'14"	+2"	119°25'16"									1.020,88	1.428,45
				34°38'52"	96,20	79,14	54,69	-0,01	+0,01	79,13	54,70		
D	74°49'34"	+2"	74°49'36"									1.100,01	1.483,15
				289°28'28"	102,75	34,26	-96,87	-0,01	+0,01	34,25	-96,86		
E	96°48'32"	+2"	96°48'34"									1.134,26	1.386,29
				206°17'02"	104,20	-93,43	-46,14	-0,01	+0,01	-93,44	-46,13		
A												1.040,82	1.340,16
Σ	539°59'50"	+10"			394,75	+0,05	-0,04	-0,05	+0,04	0,00	0,00		

$$\text{Area} = 9.669,19 \text{ m}^2$$

$$\varepsilon \Delta N = +0,05$$

$$\varepsilon a = -10''$$

$$\varepsilon \Delta E = -0,04$$

$$T a = 20'' \sqrt{5} \cong 45''$$

$$\varepsilon L = 0,06$$

$$C a = -\varepsilon a/n = +02''$$

$$\varepsilon r = 1:6.579$$

$$T L = 0,015 \sqrt{394,75} = 0,30$$

Ejemplo 5-3

Calcule las coordenadas de los vértices de la poligonal de enlace mostrada en la figura E5-3

$$\varphi_{AB} = 218^{\circ}16'32''$$

$$\varphi_{CD} = 309^{\circ}39'51''$$

Punto	Norte	Este
B	5.013,969	15.357,378
C	6.045,452	18.010,088

Punto	\angle horiz..	Dist.
B	$52^{\circ}32'15''$	
		728,453
1	$122^{\circ}16'47''$	
		625,348
2	$225^{\circ}21'43''$	
		680,745
3	$215^{\circ}16'26''$	
		420,331
4	$110^{\circ}13'07''$	
		765,358
C	$85^{\circ}42'31''$	

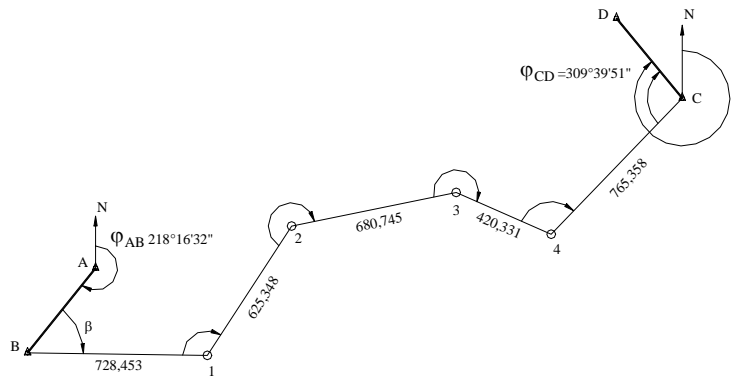


Figura E5-3

Wild T1-A (AP = 20'')

Dist. Electrónico

Solución

Como el procedimiento de cálculo de una poligonal abierta es similar al realizado en el cálculo de poligonales cerradas, este ejemplo se resolverá en la forma usual, tal y como se muestra en la tabla TE5-3.

En la tabla TE5.3 se han remarcado los datos de campo y los valores conocidos.

La columna 1 se utiliza para identificar el vértice de la estación, anotando al lado, en la columna 2, el valor del ángulo horizontal medido en campo. En la columna 3 se anotan las distancias de campo. En la columna 4 anotamos los acimutes conocidos, y por medio de la ley de propagación de acimutes, calculamos los acimutes de las alineaciones restantes. Nótese que el acimut φ_{CD} es un acimut conocido, por lo que debe coincidir con el acimut calculado con los datos de campo. La diferencia entre el acimut calculado y el conocido nos proporciona el error angular (ecuación 5.4).

$$\varepsilon_a = (309^{\circ}39'21'' - 309^{\circ}39'51'') = -0^{\circ}00'30''$$

$$C_a = -\varepsilon_a/6 = +05''$$

La corrección angular se puede aplicar directamente a los ángulos medidos o, para no volver a calcular los acimutes, aplicamos la corrección, en forma acumulativa (columna 5) sobre los acimutes calculados para obtener los acimutes corregidos (columna 6).

Las columnas 7 y 8, correspondientes a las proyecciones norte y este, se calculan aplicando las ecuaciones 1.3 y 1.4, respectivamente.

La suma de las proyecciones norte (columna 7), correspondiente a la proyección norte entre B y C, debe coincidir con la proyección norte conocida entre B y C ($N_C - N_B$). La diferencia entre ambos valores nos proporciona el $\varepsilon\Delta N$.

De igual manera se procede para las proyecciones este.

$$\varepsilon\Delta N = (1.031,532 - 1.031,483) = + 0,049 \text{ m}$$

$$\varepsilon\Delta E = (2.652,826 - 2.652,710) = + 0,116 \text{ m}$$

El error y la tolerancia lineal serán,

$$\varepsilon L = \sqrt{0,049^2 + 0,116^2} = 0,126 \text{ m}$$

$$TL = 0,015\sqrt{3.220,235} = 0,851 \text{ m}$$

siendo la tolerancia mayor que el error lineal, procedemos a la corrección de las proyecciones (columnas 9 y 10) aplicando las ecuaciones (5.15) y (5.16). Como control de cálculo, la suma de CpN (columna 9) debe ser igual a $-\varepsilon\Delta N$ y la suma de CpE (columna 10) debe ser igual a $-\varepsilon\Delta E$.

Las proyecciones corregidas Norte (columna 11) se obtienen sumando las columnas 7 y 9, y las proyecciones corregidas Este (columna 12) se obtienen sumando las columnas 8 y 10. Como control, la suma de las proyecciones norte corregidas debe ser igual a la diferencia de coordenadas norte entre B y C, y la suma de las proyecciones Este corregidas debe ser igual a la diferencia de coordenadas este entre B y C.

Por último, las coordenadas Norte y Este de los vértices restantes se calculan en la misma forma realizada en el ejemplo 5.1.

Tabla TE5.3
Cálculo de poligonal abierta con control

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
Est.	Ang. Hor.	Dist.	Acimut	Corr	Acimut Corr.	Proy. Calc.		Correc.		Proy. Correg.		Coordenadas		Punto
						Norte	Este	CpN	CpE	Norte	Este	Norte	Este	
A	° ' "		° ' "		° ' "									A
			218 16 32											
B	52 32 15			5"								5.013,969	15.357,378	B
		728,453	90 48 47		90 48 52	-10,354	728,379	-0,011	-0,026	-10,365	728,353			
1	122 16 47			10"								5.003,604	16.085,731	1
		625,348	33 5 34		33 5 44	523,892	341,463	-0,010	-0,023	523,882	341,440			
2	225 21 43			15"								5.527,486	16.427,171	2
		680,745	78 27 17		78 27 32	136,197	666,981	-0,010	-0,025	136,187	666,957			
3	215 16 26			20"								5.663,673	17.094,128	3
		420,331	113 43 43		113 44 3	-169,181	384,781	-0,006	-0,015	-169,187	384,766			
4	110 13 7			25"								5.494,486	17.478,894	4
		765,358	43 56 50		43 57 15	550,978	531,222	-0,012	-0,028	550,966	531,194			
C	85 42 31			30"								6.045,452	18.010,088	C
			309 39 21		309 39 51									
D			309 39 51											D
		3.220,235				1.031,532	2.652,826	-0,049	-0,116	1.031,483	2.652,710	1.031,483	2.652,710	

$$Ea = -00^{\circ}00'30''$$

$$Ca = +30/6 = +5''$$

$$Ta = 20'' \times SQR(6) = 49''$$

$$Ta = 20'' \sqrt{6} = 49''$$

$$\varepsilon\Delta N = (1.031,532 - 1.031,483) = +0,049 \text{ m}$$

$$\varepsilon\Delta E = (2.652,826 - 2.652,710) = + 0,116 \text{ m}$$

$$e_l = 0,126 \text{ m}$$

$$1/n = 1: 25.275$$

$$Tl = 0,015 * SQR(\Sigma L) = 0,851 \text{ m}$$

$$Tl = 0,015\sqrt{\Sigma L} = 0,851 \text{ m}$$

5.2. Triangulación

Hasta la introducción de los distanciómetros electrónicos, con lo que se hizo posible la medición de distancias en forma rápida y precisa, la triangulación constituía uno de los métodos más importantes para el control de levantamientos de grandes áreas con vegetación abundante o de topografía muy accidentada; en el apoyo terrestre para levantamientos fotogramétricos; y en el control para el replanteo de obras tales como puentes, túneles, etc.

El uso de los distanciómetros electrónicos ha incrementado de tal forma la precisión obtenida en poligonales, que actualmente las poligonales están siendo usadas en el establecimiento y densificación de redes de control.

Por ser la triangulación un procedimiento útil en el control de replanteo de obras, ya que proporciona métodos efectivos en el control de la precisión obtenida en los levantamientos topográficos, en el presente capítulo nos dedicaremos a estudiar los métodos de triangulación más empleados en la ingeniería civil.

La triangulación consiste en formar figuras triangulares en las cuales es necesario medir, con precisión, todos los ángulos de una red de triángulos y dos de sus lados. Luego, a partir de estas mediciones aplicando el teorema del seno, se pueden calcular los demás lados, comprobando la precisión obtenida por comparación del último lado calculado con el valor medido en campo.

Una red de triangulación está formada por una serie de triángulos consecutivos unidos entre sí por un lado común, como se muestra en la figura 5.6.

De acuerdo con la forma de las redes, las triangulaciones se puede clasificar en:

- Red de triángulos independientes (figura 5.6.a).
- Red de cuadriláteros (figura 5.6.b).
- Red de figuras de punto central (figura 5.6.c).

De acuerdo a la precisión requerida en los trabajos de triangulación, la U.S. COAST and Geodetic Survey¹ ha clasificado las triangulaciones en triangulaciones de primero, segundo o tercer orden, de acuerdo a los criterios de clasificación de la tabla 5.2.

Para los trabajos normales de ingeniería, se utiliza normalmente la red de triángulos independientes, siendo suficiente cumplir con los criterios para las triangulaciones de 3^{er} orden. Las triangulaciones de primer y segundo orden son conocidas como triangulaciones geodésicas, y salen del alcance de nuestro curso.

¹ Kissan P. (1967). *Topografía para Ingenieros*. New York: McGraw-Hill. p 447.

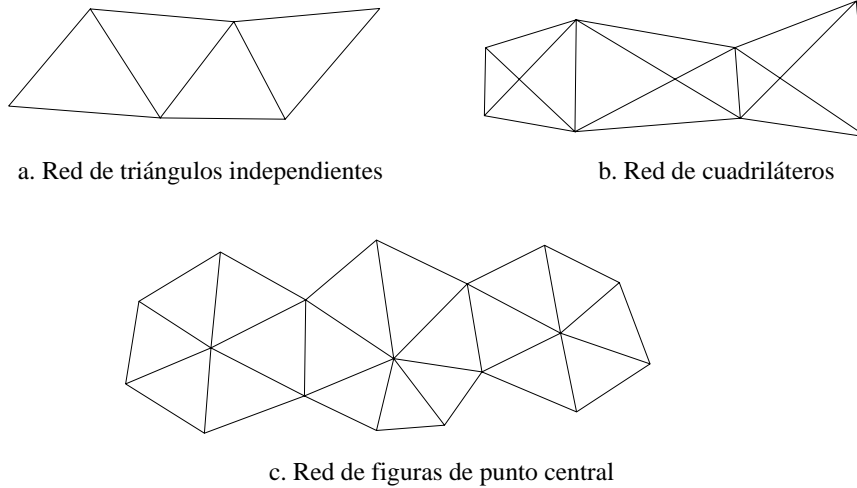


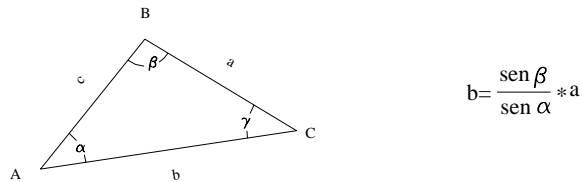
Figura 5.6. Tipos de triangulación

**Tabla 5.2.
Criterios para la clasificación de las triangulaciones**

Tipo de error	Requisitos mínimos a cumplir		
	1 ^{er} orden	2 ^{do} orden	3 ^{er} orden
Error lineal Discrepancia entre la longitud calculada y la medida de una base	1:25.000	1:10.000	1:5.000
Error angular en triángulos Promedio Máximo por figura	1'' 3''	3'' 5''	5'' 10''
Precisión Error probable en la medición de la base	1:1.000.000	1:500.000	1:250.000

5.2.1. Consistencia de los triángulos

Como se mencionó anteriormente, el cálculo de los lados de un triángulo se basa en el teorema del seno, quedando determinado un lado desconocido por medio de la siguiente expresión:



La ecuación anterior es muy sensible a discrepancias en las medidas angulares para ángulos menores a 30° y mayores a 150°, por lo que se recomienda que los ángulos de los triángulos formados estén comprendidos entre estos dos valores².

5.2.2. Compensación de Triangulaciones

5.2.2.1. Compensación de una red de triángulos

Una red de triángulos debe cumplir las siguientes condiciones:

5.2.2.1.1. Condición angular

En la condición angular se debe cumplir que la suma de los ángulos alrededor de un vértice sea igual a 360° y que la suma de los ángulos de cada triángulo sea igual a 180°. En cada caso, la discrepancia debe ser menor que la tolerancia permitida para triangulaciones de 3^{er} orden de la tabla 5.2.

5.2.2.1.2. Condición de lado

Una vez realizada la compensación angular se procede a calcular los lados desconocidos de cada uno de los triángulos de la red por medio de la ley del seno (ecuación 1.32).

Como por lo general se ha medido una base final de comprobación, la diferencia entre el valor medido y el valor calculado debe ser menor que la tolerancia permitida para triangulaciones de 3^{er} orden de la tabla 5.2.

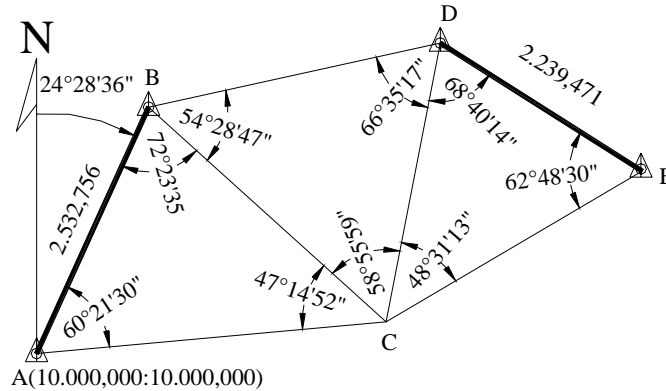
A continuación se explicará, mediante la solución de un ejemplo práctico, el método de compensación de una red de triángulos.

² Kissan P. (1967). *Topografía para Ingenieros*. New York: McGraw-Hill. p. 141.

Ejemplo 5.4

Con los datos de la figura E5-4 calcule:

- a) Las longitudes compensadas de los lados de la red de triángulos



NOTA: los ángulos dados son los obtenidos después de la compensación de vértice.

- b) Coordenadas topográficas de los puntos B, C, D, y E.

Figura E.5.4

Solución

- a) Cálculo y compensación de los lados de la red.

Para realizar en forma tabulada el cálculo y compensación de la red de triángulos, se recomienda colocar en la primera fila el vértice opuesto al lado conocido, luego el vértice opuesto al lado que no es común al siguiente triángulo, y en tercer lugar, el vértice opuesto al lado común al siguiente triángulo.

Tabla E5.4.1
Datos de campo

Triang	Vert.	Angulo Medido	Corr.	Lado	Dis. Cal.	Corr.	Dis. Corr.
C-AB	C	47°14'52"	53"	AB	2.532,756	-0,020	2.532,736
B-CA	B	72°23'35"	36"	CA	3.287,637	-0,026	3.287,611
A-BC	A	60°21'30"	31"	BC	2.997,843	-0,024	2.997,819
Σ		179°59'57"	Σ			+3"	
D-CB	D	66°35'17"	16"	CB	2.997,843	-0,024	2.997,819
C-DB	C	58°55'59"	58"	DB	2.798,217	-0,022	2.798,195
B-CD	B	54°28'47"	46"	CD	2.658,871	-0,021	2.658,850
Σ		180°00'03"	Σ			-3"	
E-DC	E	62°48'30"	31"	DC	2.658,871	-0,021	2.658,850
D-EC	D	68°40'14"	15"	EC	2.784,481	-0,022	2.784,459
C-ED	C	48°31'13"	14"	Ed	2.239,507	-0,018	2.239,471
Σ		179°59'57"	Σ			+3"	

$Error = base\ calculada - base\ medida$

$Error = 2.239,507 - 2.239,471 = +0,036\ m$

$Error\ relativo = + 0,036/2.239,471 = 1:62.207,5$

$Tolerancia = 1/5.000\ Error < tolerancia$

$Corrección\ parcial = -1/2\ error\ relativo\ x\ lado\ calculado$

b) Cálculo de las coordenadas de los vértices

Una vez compensada la red de triángulos se procede al cálculo de las coordenadas de sus vértices.

Debe tenerse en cuenta que cualquiera sea el camino que se escoja para calcular las coordenadas de uno de los vértices, el valor obtenido debe ser el mismo.

Tabla E5.4.2.
Cálculo de las coordenadas de los vértices

Lado	Acimut	Distancia	Coordenadas		Punto
			Norte	Este	
AB	24°28'36"	2.532,736	12.305,119	11.049,370	B
AC	84°50'07"	3.287,611	10.295,949	13.274,263	C
BC	132°05'00"	2.997,819	10.295,949	13.274,263	C
BD	77°36'14"	2.798,195	12.905,806	13.782,330	D
CD	11°00'58"	2.658,850	12.905,806	13.782,330	D
CE	59°32'12"	2.784,459	11.707,633	15.674,339	E
DE	122°20'43"	2.239,489	11.707,633	15.674,339	E

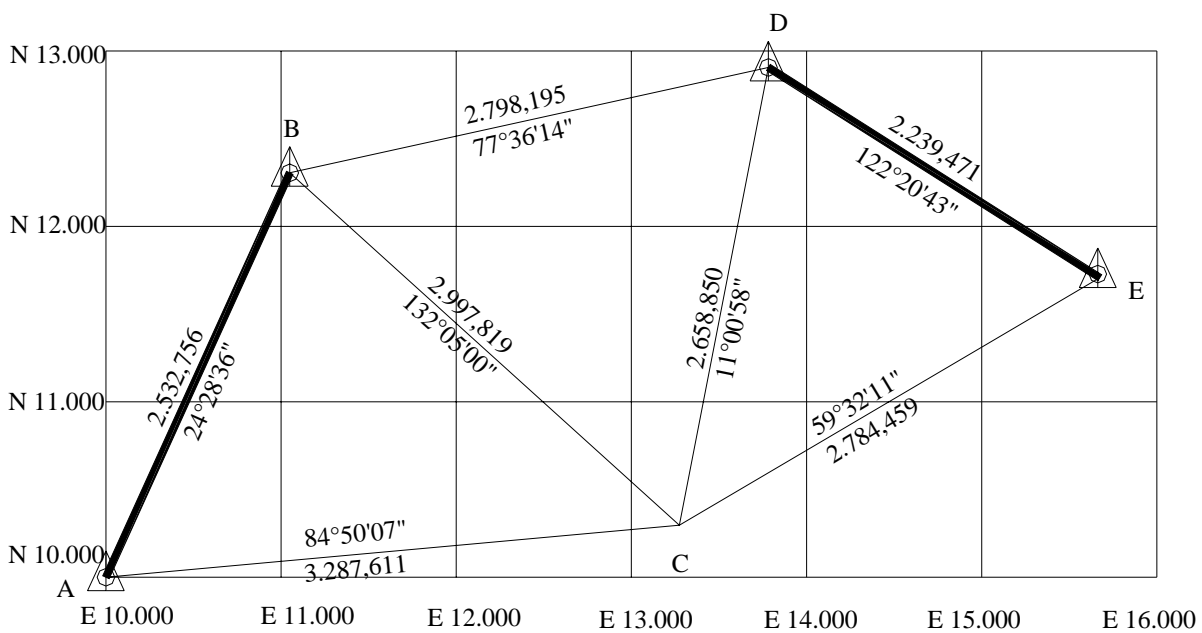


Figura E5.4.1. Representación gráfica de la red de triángulos calculada

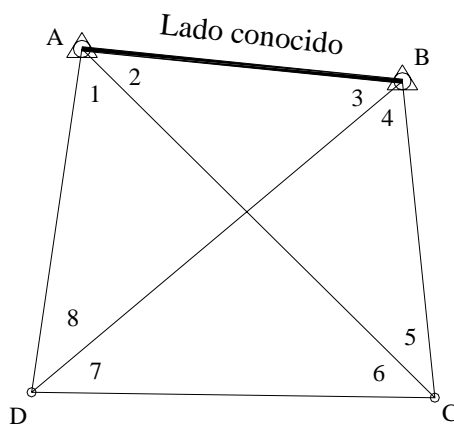
5.2.2.2 Compensación de un cuadrilátero

En la compensación de un cuadrilátero se deben cumplir las siguientes condiciones :

5.2.2.2.1. Condición de angular

La suma de los ángulos alrededor de cada vértice debe ser igual a 360° .

En cada cuadrilátero se deben satisfacer las siguientes condiciones :



- 1) $2 + 3 + 4 + 5 = 180^\circ$
- 2) $1 + 6 + 7 + 8 = 180^\circ$
- 3) $1 + 2 + 3 + 8 = 180^\circ$
- 4) $7 + 4 + 5 + 6 = 180^\circ$
- 5) $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 360^\circ$
- 6) $2 + 3 = 7 + 6$
- 7) $1 + 8 = 4 + 5$

Figura 5.7 Compensación de un cuadrilátero.

Sólo es necesario chequear las condiciones 5,6 y 7 ya que al cumplirse estas, se cumplirán también las condiciones 1, 2, 3 y 4 .

La discrepancia encontrada en la condición 5 se reparte en igual magnitud a cada uno de los ángulos.

El error encontrado en la condición 6 se reparte en partes iguales entre los cuatro ángulos, sumando la corrección a los ángulos cuya suma sea menor y restando la corrección a aquellos cuya suma sea mayor.

Para la condición 7 se procede de igual manera que para la condición 6.

5.2.2.2.2. Condición de lado

La condición de lado o condición trigonométrica establece que cualquiera sea el camino utilizado para calcular una longitud su valor debe ser el mismo. Con el apoyo de la figura 5.7 y calculando el valor del lado CD por diferentes rutas, tendremos :

Primera ruta

$$\frac{AB}{\text{sen } 5} = \frac{BC}{\text{sen } 2} \therefore BC = AB \frac{\text{sen } 2}{\text{sen } 5}$$

$$\frac{BC}{\text{sen } 7} = \frac{CD}{\text{sen } 4} \therefore CD = BC \frac{\text{sen } 4}{\text{sen } 7}$$

$$CD = AB \times \frac{\text{sen } 2 \text{sen } 4}{\text{sen } 5 \text{sen } 7} \quad (\text{A})$$

Segunda ruta

$$\frac{AB}{\text{sen } 8} = \frac{AD}{\text{sen } 3} \therefore AD = AB \frac{\text{sen } 3}{\text{sen } 8}$$

$$\frac{AD}{\text{sen } 6} = \frac{CD}{\text{sen } 1} \therefore CD = AD \frac{\text{sen } 1}{\text{sen } 6}$$

$$CD = AB \times \frac{\text{sen } 1 \text{sen } 3}{\text{sen } 6 \text{sen } 8} \quad (\text{B})$$

Igualando A con B tenemos

$$\frac{\text{sen } 2 \text{sen } 4}{\text{sen } 5 \text{sen } 7} = \frac{\text{sen } 1 \text{sen } 3}{\text{sen } 6 \text{sen } 8}$$

$$\text{sen } 2 \times \text{sen } 4 \times \text{sen } 6 \times \text{sen } 8 = \text{sen } 1 \times \text{sen } 3 \times \text{sen } 5 \times \text{sen } 7$$

Tomando logaritmos y calculando diferencias tendremos el error lineal

$$w = \Sigma \log \text{Sen} \angle \text{pares} - \Sigma \log \text{Sen} \angle \text{impares} \quad (5.19)$$

Calculando el factor de corrección k

$$k = \frac{w}{\Sigma(d^2)} \quad (5.20)$$

Luego, la corrección angular en segundos será

$$v'' = kd \quad (5.21)$$

en donde

d = Diferencia para 1" en el log sen del ángulo

v'' = Corrección angular en segundos

w = Error lineal

k = Factor de corrección

Teniendo en cuenta la numeración y el orden que se le ha dado al cuadrilátero de la figura 5.7 podemos recordar fácilmente la ecuación (5.19) de la siguiente manera.

La suma de los logaritmos de los senos de los ángulos pares debe ser igual a la suma de los logaritmos de los senos de los ángulos impares.

Con el fin de explicar la compensación de un cuadrilátero, resolveremos el ejemplo E5-4.

Ejemplo E5-4

Con los datos de la figura E5-4, calcule :

- las longitudes compensadas de los lados del cuadrilátero
- coordenadas topográficas de los vértices.

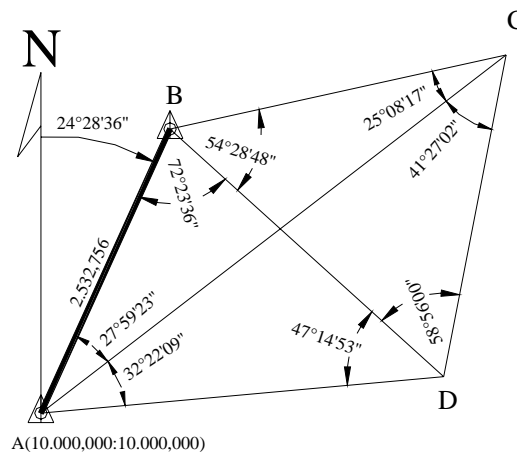


Figura E5-4

NOTA: los ángulos en los vértices son los obtenidos después de la compensación de vértices.

Solución:

Aplicando las condiciones 5,6 y 7 tenemos:

Tabla E5.4.1

Est.	Ang.	Horizontal com. Vértice	Corr .	(5) ∠ correg.	(6) y (7)	Correg. (6) y (7)
A	1	32°22'09"	-1"	32°22'08"	+0.75"	32°22'08",75
	2	27°59'23"	-1"	27°59'22"	+0.75"	27°59'22",75
	3	72°23'36"	-1"	72°23'35"	+0.75"	72°23'35",75
	4	54°28'48"	-1"	54°28'47"	-0.75"	54°28'46",25
	5	25°08'17"	-1"	25°08'16"	-0.75"	25°08'15",25
	6	41°27'02"	-1"	41°27'01"	-0.75"	41°27'00",25
	7	58°56'00"	-1"	58°55'59"	-0.75"	58°55'58",25
	8	47°14'53"	-1"	47°14'52"	+0.75"	47°14'52",75
		360°00'08"	-8"	360°00'00"	0"	360°00'00"

Condición (5) $\Sigma \angle_{int} = 360^\circ$

Error = + 08" Corrección = -1",00

Condición (6) 2 + 3 = 100°22'57"

Error = 03" Corrección = 0",75

6 + 7 = 100°23'00"

Condición (7) 1 + 8 = 79°37'00"

Error = 03" Corrección = 0",75

4 + 5 = 79°37'03"

Condición de lado o trigonométrica

$$w = \Sigma \log \text{sen } \angle_{\text{pares}} - \Sigma \log \text{sen } \angle_{\text{impares}} = 9.39 \times 10^{-6}$$

$$d1'' = \log[\text{sen}(\text{ángulo})] - \log[\text{sen}(\text{ángulo} + 1'')]$$

$$k = \frac{w}{\Sigma(d^2)} = \frac{9,39E^{-6}}{6,064878E^{-11}} \quad v = kd$$

Tabla E5.4.2

Vert.	Log sen ∠ pares	Log sen ∠ impares	d 1"	d ²	v = kd	Ang. Comp.
1		0,27134489	3,3217 E-6	1.1034 E-11	0,51"	32°22'09",26
2	0,32853825		3,9616 E-6	1.5694 E-11	-0,61"	27°59'22",14
3		0,02083642	0,6682 E-6	4.4646 E-13	0,10"	72°23'35",85
4	0,08942477		1,5029 E-6	2.2589 E-12	-0,23"	54°28'46",02
5		0,37182252	4,4871 E-6	2.0134 E-11	0,69"	25°08'15",94
6	0,17916358		2,3840 E-6	5.6835 E-12	-0,37"	41°26'59",88
7		0,06724065	1,2685 E-6	1.6090 E-12	0,20"	58°55'58",45
8	0,13412727		1,9464 E-6	3.7886 E-12	-0,30"	47°14'52",45
Σ	0,73125387	0,73124448	19,540508 E-6	6,06487881E-11	0"	359°59'59,99

por cualquier camino podemos calcular las coordenadas de los vértices restantes .

Problemas Propuestos

5.1. y 5.2. Calcule los errores de cierre angular, lineal y las coordenadas compensadas y el área de las poligonales mostradas en las figuras P5-1 y P5-2.

EST.	ANG.MED.	DIST.
A	91°15'34"	369,393
B	94°25'38"	283,540
C	109°49'40"	284,033
D	102°23'49"	230,187
E	142°03'39"	214,807
A		

$$\varphi_{AB} = 176^{\circ}49'00''$$

COORD. A: (10.000, 10.000)

$$Ta = 1' \sqrt{N}$$

$$Tl = 1/10.000$$

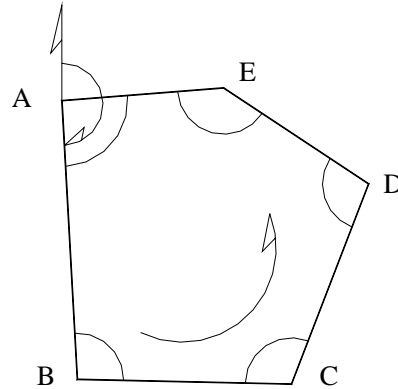


Figura P5-1

EST.	ANG.MED.	DIST.
A	96°02'46"	280,135
B	95°17'55"	242,090
C	65°12'42"	187,712
D	216°19'40"	155,725
E	67°05'47"	224,915
A		

$$\varphi_{AB} = 180^{\circ}10'25''$$

COORD. A (10.0000, 10.0000)

$$Ta = 1' \sqrt{N}$$

$$Tl = 1/10.000$$

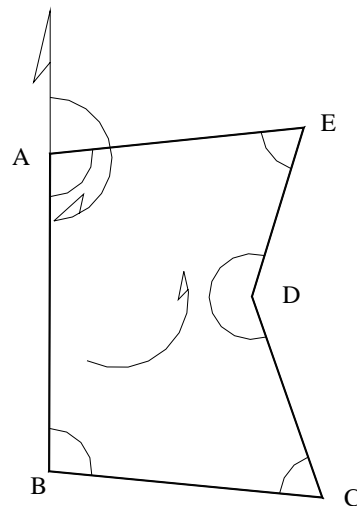


Figura P5-2

5.3. y 5.4. Calcule los errores de cierre angular y lineal y las coordenadas compensadas de las poligonales mostradas en las figuras P5-3 y P5-4

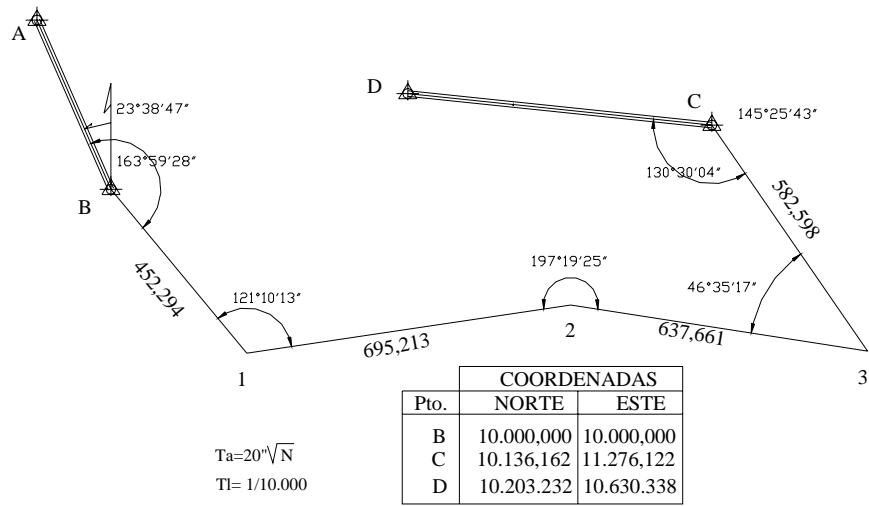


Figura P5-3

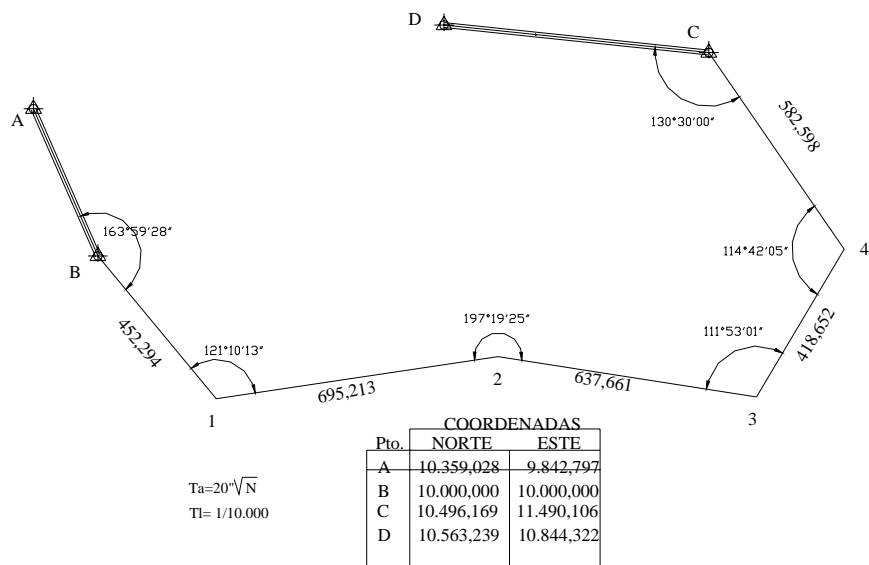
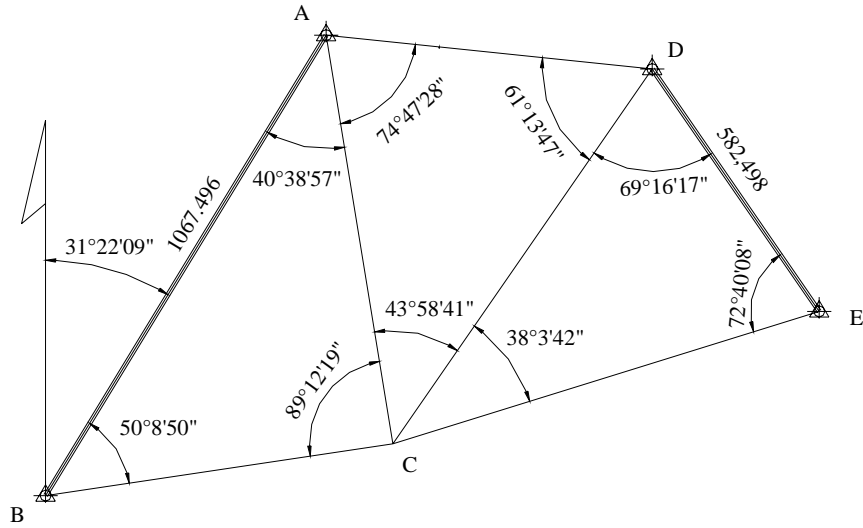


Figura P5-4

5.5. y 5.6. Con los datos de las figuras P5-5 y P5-6, calcule:

- a) Longitudes compensadas de los lados de la red.
- b) Coordenadas topográficas de los vértices



$T_a = 20''\sqrt{N}$
 $T_l = 1/10.000$
 A: (10.563,239; 10.844,322)

Figura P5-5

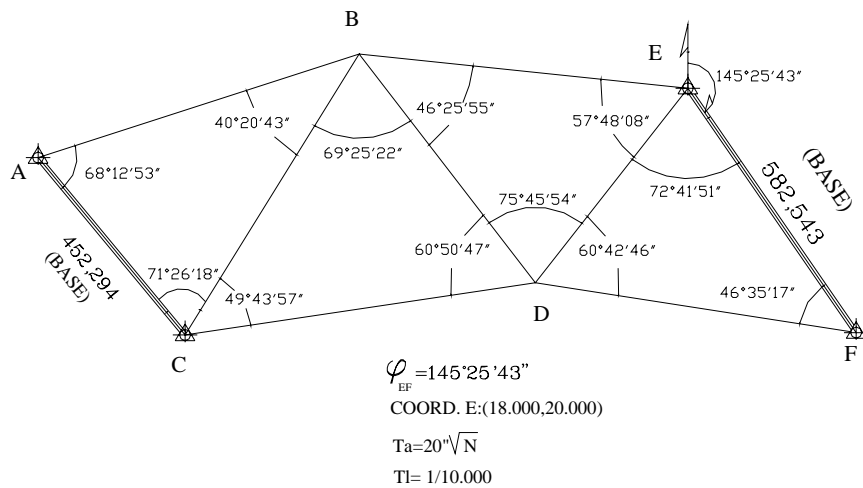


Figura P5-6