Sistemas Digitales
Álgebra de Boole

Prof. Luis Araujo
Escuela de Ingeniería Eléctrica

UNIVERSIDAD
DE LOS ANDES
VENEZUELA

Axiomas

- Los *axiomas* (o *postulados*) de un sistema matemático son un conjunto mínimo de definiciones básicas que suponemos verdaderas.

(A1) $\mathrm{X} = 0 \quad \mathrm{si}\ \mathrm{X} \neq 1$ (A1') $\mathrm{X} = 1 \quad \mathrm{si}\ \mathrm{X} \neq 0$

Principio de Dualidad

- Cualquier teorema o identidad en el álgebra de Boole continúa siendo verdadera si tanto 0 y 1 como · y + son intercambiados en todas partes.

- Expresión dual se obtiene:
  - Cambiando los 0 por 1, y viceversa, y
  - Cambiando los + por ·, y viceversa.

- Ejemplo:

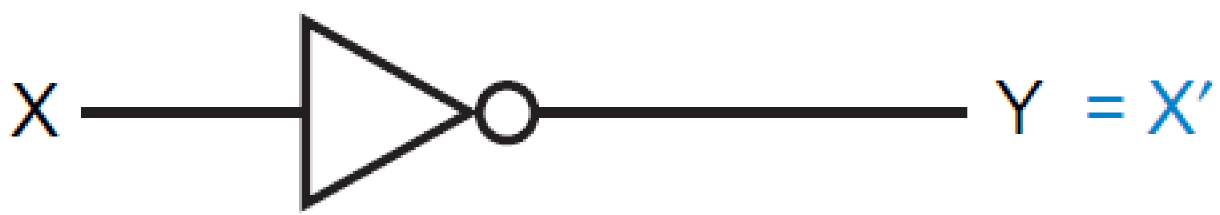
  expresión : $y + (w \cdot \bar{z}) = 1$

  expresión dual : $\mathrm{y} \cdot (w + \bar{z}) = 0$

Axiomas

(A2) Si $X = 0, entonces\ \bar{X} = 1$

(A2') Si $X = 1, entonces\ \bar{X} = 0$

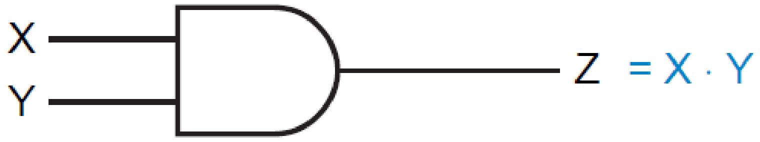


Axiomas

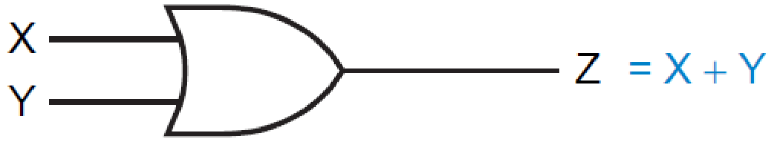
(A3) $0 \cdot 0 = 0$ (A3') $1 + 1 = 1$

(A4) $1 \cdot 1 = 1$ (A4') $0 + 0 = 0$

(A5) $0 \cdot 1 = 0$ (A5') $1 + 0 = 1$



(a)



(b)

Teoremas de Álgebra de Boole

- Teoremas de una variable:

(T1)	$X + 0 = X$	(T1′)	$X \cdot 1 = X$	(Identities)
(T2)	$X + 1 = 1$	(T2′)	$X \cdot 0 = 0$	(Null elements)
(T3)	$X + X = X$	(T3′)	$X \cdot X = X$	(Idempotency)
(T4)	$(X')' = X$			(Involution)
(T5)	$X + X' = 1$	(T5′)	$X \cdot X' = 0$	(Complements)

Prueba de los Teoremas

- Inducción Perfecta:

  (T1) $X + 0 = X$

  X = {0, 1} (A1)

  - Para X = 0 : $0 + 0 = 0$ (A4’)
  - Para X = 0 : $1 + 0 = 1$ (A5’)

Teoremas de Álgebra de Boole

- Teorema con dos o tres variables:

(T6)	$X + Y = Y + X$	(T6′)	$X \cdot Y = Y \cdot X$	(Commutativity)
(T7)	$(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$	(T7′)	$(X \cdot Y) \cdot Z = X \cdot (Y \cdot Z)$	(Associativity)
(T8)	$X \cdot Y + X \cdot Z = X \cdot (Y + Z)$	(T8′)	$(X + Y) \cdot (X + Z) = X + Y \cdot Z$	(Distributivity)
(T9)	$X + X \cdot Y = X$	(T9′)	$X \cdot (X + Y) = X$	(Covering)
(T10)	$X \cdot Y + X \cdot Y' = X$	(T10′)	$(X + Y) \cdot (X + Y') = X$	(Combining)
(T11)	$X \cdot Y + X' \cdot Z + Y \cdot Z = X \cdot Y + X' \cdot Z$			(Consensus)
(T11′)	$(X + Y) \cdot (X' + Z) \cdot (Y + Z) = (X + Y) \cdot (X' + Z)$			

Prueba de los Teoremas

- Usando otros teoremas

(T9) $X + X \cdot Y = X$

$$X + X \cdot Y = X \cdot 1 + X \cdot Y \qquad \text{(T1')}$$

$$X + X \cdot Y = X \cdot (1 + Y) \qquad \text{(T8)}$$

$$X + X \cdot Y = X \cdot 1 \qquad \text{(T2)}$$

$$X + X \cdot Y = X \qquad \text{(T1')}$$

Teoremas de Álgebra de Boole

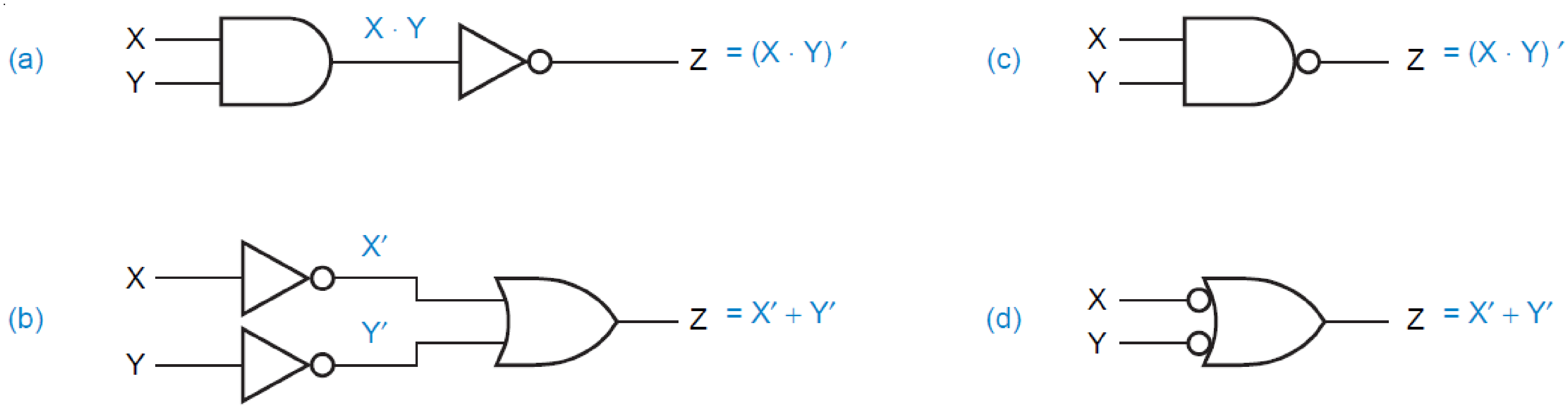
- Teoremas con n variables:

(T12)	$X + X + \cdots + X = X$	(Generalized idempotency)
(T12′)	$X \cdot X \cdot \cdots \cdot X = X$	
(T13)	$(X_1 \cdot X_2 \cdot \cdots \cdot X_n)' = X_1' + X_2' + \cdots + X_n'$	(DeMorgan's theorems)
(T13′)	$(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)' = X_1' \cdot X_2' \cdot \cdots \cdot X_n'$	
(T14)	$[F(X_1, X_2, \ldots, X_n, +, \cdot)]' = F(X_1', X_2', \ldots, X_n', \cdot, +)$	(Generalized DeMorgan's theorem)
(T15)	$F(X_1, X_2, \ldots, X_n) = X_1 \cdot F(1, X_2, \ldots, X_n) + X_1' \cdot F(0, X_2, \ldots, X_n)$	(Shannon's expansion theorems)
(T15′)	$F(X_1, X_2, \ldots, X_n) = [X_1 + F(0, X_2, \ldots, X_n)] \cdot [X_1' + F(1, X_2, \ldots, X_n)]$	

Principio de Dualidad

- Con Compuertas, la compuerta dual (o equivalente) se obtiene:
  - Cambiando las entradas sin complementar por entradas complementadas, y viceversa, y
  - Cambiando los AND + por ·, y viceversa.

Teorema de DeMorgan



Representación de Funciones Lógicas

- Tabla de Verdad

Row	X	Y	Z	F	F
0	0	0	0	F(0,0,0)	1
1	0	0	1	F(0,0,1)	0
2	0	1	0	F(0,1,0)	0
3	0	1	1	F(0,1,1)	1
4	1	0	0	F(1,0,0)	1
5	1	0	1	F(1,0,1)	0
6	1	1	0	F(1,1,0)	1
7	1	1	1	F(1,1,1)	1

Representación Algebraica

- Literal : $x, \ \bar{x}, \ y, \ \bar{y}$
- Término producto : $x, \ x \cdot \bar{y}, \ \ x \cdot y \cdot \bar{z}$
- Expresión en suma de productos :
$$x + x \cdot \bar{y} + \bar{x} \cdot y \cdot \bar{z}$$
- Término suma : $x, \ x + \bar{y}, \ \ x + y + \bar{z}$
- Expresión en producto de sumas :
$$x \cdot (x + \bar{y}) \cdot (x + y + \bar{z})$$
- MiniTérmino : $x \cdot \bar{y} \cdot \bar{z}, \ \ \bar{x} \cdot y \cdot z, \ x \cdot y \cdot z$
- MaxiTérmino : $x + \bar{y} + z, \ \ x + y + \bar{z}$

Representación Algebraica

Row	X	Y	Z	F	Minterm	Maxterm
0	0	0	0	$F(0,0,0)$	$X' \cdot Y' \cdot Z'$	$X + Y + Z$
1	0	0	1	$F(0,0,1)$	$X' \cdot Y' \cdot Z$	$X + Y + Z'$
2	0	1	0	$F(0,1,0)$	$X' \cdot Y \cdot Z'$	$X + Y' + Z$
3	0	1	1	$F(0,1,1)$	$X' \cdot Y \cdot Z$	$X + Y' + Z'$
4	1	0	0	$F(1,0,0)$	$X \cdot Y' \cdot Z'$	$X' + Y + Z$
5	1	0	1	$F(1,0,1)$	$X \cdot Y' \cdot Z$	$X' + Y + Z'$
6	1	1	0	$F(1,1,0)$	$X \cdot Y \cdot Z'$	$X' + Y' + Z$
7	1	1	1	$F(1,1,1)$	$X \cdot Y \cdot Z$	$X' + Y' + Z'$

Representación Algebraica

Suma Canónica:

- $F = \sum_{x,y,z}(0,3,6,7)$
- $F = \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} + \bar{x} \cdot y \cdot z + x \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} + x \cdot y \cdot z$

Producto Canónico:

- $F = \prod_{x,y,z}(1,2,5\ )$
- $F = (x + y + \overline{z}) \cdot (x + \bar{y} + z) \cdot (\bar{x} + y + \overline{z})$

Representación Algebraica

- $\sum_{x,y,z}(0,1,2,3) = \prod_{x,y,z}(4,5,6,7)$

- $\sum_{x,y}(1) = \prod_{x,y}(0,2,3)$

- $\sum_{w,x,y,z}(0,1,2,3,5,7,11,13) =$
  $\prod_{x,y,z}(4,6,8,9,10,12,14,15)$