Operaciones Unitarias 2 – Sección 01 – Semestre A07
Escuela de Ingeniería Química Mérida, 21 de junio de 2007.

SEGUNDO PARCIAL

Problema 1:
Considere un reactor químico de forma cilíndrica con tapas planas en la parte inferior y superior del reactor; dichas tapas son muy buenos aislantes térmicos. Dentro del reactor (radio interno Ri, radio externo Ro, longitud L) hay un gas en el cual se produce una reacción exotérmica que genera calor a una tasa q_g (W/m^3). Para evitar un calentamiento excesivo del reactor, se retira calor mediante agua que circula por la parte externa del reactor a una temperatura T_∞ (h_∞ conocido). Obtenga el perfil de temperatura para la pared del reactor (conocido k). (6 p)

Problema 2:
Se tiene una aleta de enfriamiento cuyo perfil es parabólico invertido la aleta tiene una base de radio e y un largo L.
a) Demuestre que, colocando los ejes de coordenadas en la punta de la aleta (esto lleva a un balance microscópico de calor que resulta en una ecuación diferencial más sencilla), las áreas de conducción y convección a nivel microscópico son, respectivamente:

$$\Delta A_{cond} = \frac{\pi e^2}{L} z$$

$$\Delta A_{conv} = \frac{\pi e}{L} \Delta z \sqrt{4Lz + e^2}$$

b) Demuestre que, cuando L >> e, el balance microscópico de energía para esta aleta es

$$\frac{\partial (z q_z)}{\partial z} = k \beta^2 \sqrt{z}\, \theta$$

donde $\beta^2 = \dfrac{2h_\infty \sqrt{L}}{k e}$ y $\theta = T - T_\infty$

c) Obtenga el perfil de temperatura en la aleta.

Nota muy importante: Al colocar los ejes de coordenadas en la punta de la aleta, los flujos de calor van al contrario de la dirección positiva del eje z; igualmente, el gradiente de temperatura cambia de signo. (7 p)

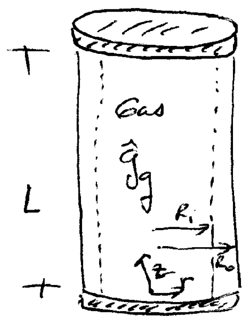
Problema 3:
En un experimento de mecánica de fluidos se quiere determinar cómo varía la temperatura de un fluido que circula por la parte externa de una cubierta semicilíndrica (largo L, radio interno Ri, radio externo Ro). Con el fin de medir la temperatura del fluido, se han colocado N pequeñas termocuplas (diámetro d y altura h) sobre la superficie de la cubierta, uniformemente espaciadas. El sistema de toma de temperatura actúa de la forma siguiente: la cubierta se calienta en su parte interna a una tasa q conocida, de modo que la temperatura de la pared interna de la cubierta, Ti, esté siempre a una temperatura mayor que la temperatura del fluido. Esto produce un flujo de calor hacia fuera, a través de la pared de la cubierta y por las termocuplas. Obtenga una ecuación que permita calcular la temperatura del fluido suponiendo que cada termocupla actúa como una aleta de enfriamiento. La cubierta y las aletas son del mismo material (k conocido) y se conoce h_∞. (7 p)

Operaciones Unitarias II

21/06/07

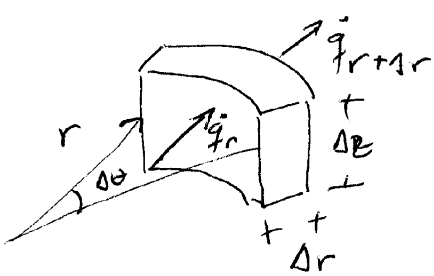
Segundo Parcial

Problema 1:



El calor que se genera debido a la reacción química se transfiere a través de las paredes del reactor, en la dirección radial. No hay flujo axial debido a que las tapas son aislantes

Balance de energía en estado estacionario:



$$\Delta V = r\Delta\theta\, \Delta r\, \Delta z$$

$$\Delta A_{cond} = r\Delta\theta\, \Delta z$$

$$\dot{q}_r = \dot{q}_{r+\Delta r}$$

$$q_r\, r\Delta\theta\Delta z = q_{r+\Delta r}\, r\Delta\theta\Delta z \; ; \; \div \Delta V$$

$$\lim_{\Delta r \to 0} \left(\frac{r q_{r+\Delta r} - r q_r}{\Delta r} \right) = 0 \rightarrow \frac{d(r q_r)}{dr} = 0$$

Integrando: $q_r = \frac{c_1}{r}$

Condición de frontera: $r = R_i \; , \; \hat{q}_g \frac{V_{gas}}{A} = k\left(-\frac{dT}{dr}\right)_{r=R_i} = q_{R_i}$

$$q_{R_i} = \hat{q}_g \frac{\pi R_i^2 L}{2\pi R_i L} = \frac{c_1}{R_i} \; ; \; c_1 = \frac{\hat{q}_g R_i^2}{2} \; ; \; q_r = \frac{\hat{q}_g R_i^2}{2r}$$

Sustituyendo la ley de Fourier, $q_r = k\left(-\frac{dT}{dr}\right)$ y acomodando:

$$dT = \frac{-\hat{q}_g R_i^2}{2Kr} dr \; ; \; T = \frac{-\hat{q}_g R_i^2}{2K} \ln r + c_2$$

Condición de frontera: $r = R_o \; , \; \dot{q}_g = q_{conv}$

$$\hat{q}_g \, \pi R_i^2 L = h_\infty \, 2\pi R_o L \, (T_o - T_\infty)$$

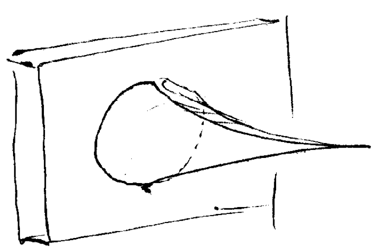
$$T_o = T_\infty + \frac{\hat{q}_g R_i^2}{2 h_\infty R_o}$$ → se sustituye en perfil de temperatura para $r = R_o$, y se despeja c_2

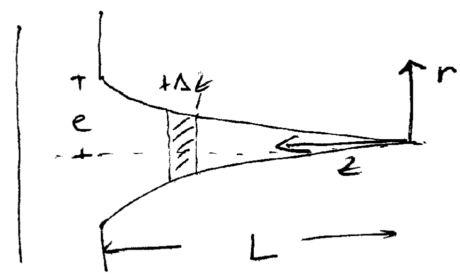
$$c_2 = T_\infty + \frac{\hat{q}_g R_i^2}{2}\left[\frac{1}{R_o h_\infty} + \frac{\ln R_o}{k}\right]$$; finalmente:

$$T = \frac{\hat{q}_g R_i^2}{2}\left[\frac{\ln(R_o/r)}{k} + \frac{1}{R_o h_\infty}\right] + T_\infty$$ perfil de temperatura en la pared del reactor.

Problema 2:

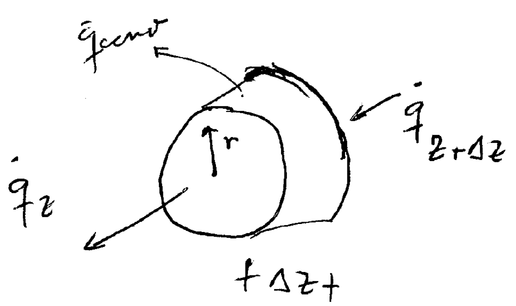
a)





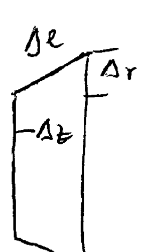
Ecuación del perfil de la aleta invertida: $z = \frac{L}{e^2} r^2$

De este resultado: $r = e\sqrt{\frac{z}{L}}$, $dr = \frac{e\,dz}{2\sqrt{Lz}}$



$$\Delta V = \pi r^2 \Delta z = \frac{\pi e^2 z}{L} \Delta z$$

$$\Delta A_{cond} = \pi r^2 = \frac{\pi e^2 z}{L}$$



$$\Delta A_{conv} = 2\pi r \, \Delta l \; ; \quad \Delta l = \sqrt{\Delta z^2 + \Delta r^2}$$

$$\Delta l = \sqrt{\Delta z^2 + \frac{e^2}{4Lz}\Delta z^2} = \frac{\Delta z}{2\sqrt{Lz}} \sqrt{4Lz + e^2}$$

$$\Delta A_{conv} = 2\pi e \sqrt{\frac{z}{L}} \frac{\Delta z}{2\sqrt{Lz}} \sqrt{4Lz+e^2}$$

$$\Delta A_{conv} = \frac{\pi e}{L} \Delta z \sqrt{4Lz+e^2}$$

b) Balance microscópico de energía en estado estacionario:

$$-\left(\dot{q}_z + \bar{q}_{conv}\right) = -\dot{q}_{z+\Delta z}$$

el signo menos es porque el flujo de calor está en la dirección negativa del eje z

$$\Delta A_{cond}\, q_{z+\Delta z} - \Delta A_{cond}\, q_z = \dot{q}_{conv} = h_\infty \Delta A_{conv}(T-T_\infty)$$

$$\frac{\pi e^2}{L}\left(z q_{z+\Delta z} - z q_z\right) = h_\infty \frac{\pi e}{L} \Delta z \sqrt{4Lz+e^2}\,(T-T_\infty)$$

Ahora bien, como $L >> e^2$, $4Lz >>> e^2$ (en $z \neq 0$)

y $\sqrt{4Lz+e^2} \rightarrow 2\sqrt{Lz}$.

Se divide ahora por ΔV

$$\frac{\frac{\pi e^2}{L}\left(z q_{z+\Delta z} - q_z z\right)}{\frac{\pi e^2}{L} z \,\Delta z} = \frac{h_\infty \frac{\pi e}{L} 2\sqrt{Lz}\,\Delta z\,(T-T_\infty)}{\frac{\pi e^2}{L} z\,\Delta z}$$

$$\lim_{\Delta z \to 0}\left(\frac{z q_{z+\Delta z} - z q_z}{\Delta z}\right) = \frac{2h_\infty}{e}\sqrt{L}\sqrt{z}\,(T-T_\infty) = \frac{\delta(z q_z)}{\delta z}$$

Como $\theta = T - T_\infty$ y $\beta^2 = \frac{2h_\infty \sqrt{L}}{k e}$, sustituyendo y acomodando:

$$\frac{\delta(z q_z)}{\delta z} = k\,\beta^2 \sqrt{z}\,\theta$$

c) Se sustituye ley de Fourier $q_z = k \dfrac{d\theta}{dz}$ (dado que $\theta = T - T_\infty$, $d\theta = dT$); el signo es positivo porque la temperatura aumenta en la dirección positiva del eje z.

$$\frac{d}{dz}\left(z \cancel{k} \frac{d\theta}{dz}\right) = \cancel{k}\, \beta^2 \sqrt{z}\, \theta \text{ ; desarrollando.}$$

$$z \frac{d^2\theta}{dz^2} + \frac{d\theta}{dz} - \beta^2 \sqrt{z}\, \theta = 0 \text{ , multiplicando por } z$$

$$z^2 \frac{d^2\theta}{dz^2} + z\frac{d\theta}{dz} - \beta^2 z^{3/2}\, \theta = 0 \Rightarrow \text{Ec. de Bessel}$$

$a + 2bz^r = 1$ $\left\{ \begin{array}{l} b = 0 \\ a = 1 \end{array} \right.$ $\Big|$ $c + dz^{2q} + b(a + r - 1)z^r - b^2 x^{2r} = \beta^2 z^{3/2}$; $c = 0$; $d = -\beta^2$; $\cancel{q} = \frac{3}{4}$

$\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\lambda = \frac{4}{3}\beta$, $p = 0$

Como $\left. \begin{array}{l} d < 0 \\ p = 0 \end{array} \right\}$ $\begin{array}{l} Z_0(-) = I_0(-) \\ Z_0(-) = K_0(-) \end{array}$ $\longrightarrow$ solución es:

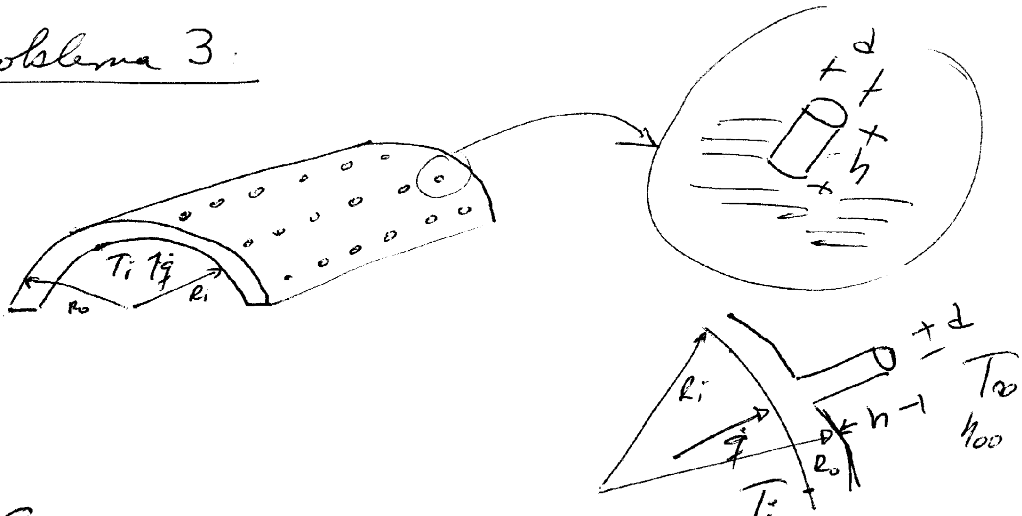
$$\theta = C_1 I_0\left(\tfrac{4}{3}\beta z^{3/4}\right) + C_2 K_0\left(\tfrac{4}{3}\beta z^{3/4}\right)$$

Condición de frontera $z=0$ da $K_0(0) = -\infty \Rightarrow C_2 = 0$

Condición de frontera $z = L$, $\theta = \theta_0 \Rightarrow C_1 = \dfrac{\theta_0}{I_0\left(\frac{4}{3}\beta L^{3/4}\right)}$

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{I_0\left(\frac{4}{3}\beta z^{3/4}\right)}{I_0\left(\frac{4}{3}\beta L^{3/4}\right)}$$ // perfil de temperatura en la aleta.

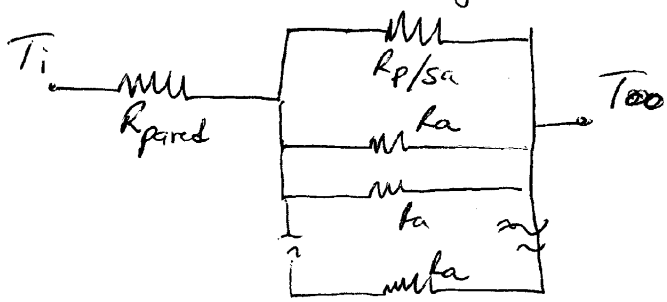
Problema 3:



Este problema se puede resolver de varias formas; aquí se presentan dos maneras.

Resolución 1:

Circuito térmico equivalente



$$\dot{q} = \frac{(T_i - T_\infty)}{R_{pared} + \left[\dfrac{1}{R_{p/sa}} + \dfrac{N}{R_a}\right]^{-1}}$$

N: número de aletas
p/sa: pared sin aleta
a: aleta

$$R_{pared} = \frac{\ln(R_o/R_i)}{\pi K L}$$

$$R_{p/sa} = \frac{1}{h_\infty A_{p/sa}} = \frac{1}{h_\infty\left(2\pi R_o L - N\,\dfrac{\pi d^2}{4}\right)}$$

$$R_a = \frac{1}{\eta_f A_a h_\infty} = \frac{1}{\eta_f N\left(\pi d h + \dfrac{\pi d^2}{4}\right)h_\infty} \; ; \; \eta_f = \frac{\tanh(\beta L)}{\beta L}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{h_\infty P}{K A_c}} = \sqrt{\frac{h_\infty \pi d}{K\,\pi d^2/4}} = \sqrt{\frac{4 h_\infty}{K d}}$$

$$\Sigma R = R_{pared} + \left[\frac{1}{R_{psa}} + \frac{N}{R_a}\right]^{-1} = \left\{\frac{\ln(R_o/R_i)}{\pi K L} + \left[h_\infty A_{p/sa} + \eta_f \overset{h_\infty}{A_a}\right]^{-1}\right\}$$

De la expresión para el flujo se despeja T_∞:

$$T_\infty = T_i - \dot{q}\sum R$$

Resolución 2:

Para esta solución se agrupa la resistencia en paralelo de la pared sin aleta y ~~la pared~~ de las aletas y se calcula como:

$$R_{(p+a)} = \frac{1}{\eta_g \, A_{TOTAL}}$$

$$A_{TOTAL} = A_{p/sa} + A_a \times N = \overbrace{\left(2\pi R_o L - N\frac{\pi d^2}{4}\right)}^{A_{p/sa}} + N\times\overbrace{\left(\pi d h + \frac{\pi d^2}{4}\right)}^{A_a}$$

$$\eta_g = 1 - \frac{N \times A_a}{A_{TOTAL}}\left(1-\eta_f\right), \text{ con } \eta_f = \frac{\tanh(\beta L)}{\beta L}$$

Entonces:

$$\dot{q} = \frac{T_i - T_\infty}{\left[R_{pared} + R_{(p+a)}\right]} = \frac{T_i - T_\infty}{\left[\frac{\ln(R_o/R_i)}{\pi k L} + \frac{1}{\eta_g A_{TOTAL}}\right]}$$

Finalmente:

$$T_\infty = T_i - \dot{q}\left[\frac{\ln(R_o/R_i)}{\pi k L} + \frac{1}{\eta_g A_{TOTAL}}\right]$$