OPERACIONES UNITARIAS II

RESOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES

ECUACIONES DE EULER Y DE BESSEL

Prof. María Isabel Briceño

1. Ecuaciones parciales lineales de coeficientes constantes. Ecuaciones de Euler

A continuación se presenta un método de resolución aplicable a ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes, también denominadas ecuaciones de Euler. Este tipo de ecuaciones pueden ser reducidas a la forma:

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = f(x) \qquad (1),$$

donde a, b y c son términos constantes y f(x) es alguna función que depende exclusivamente de x. La solución de una ecuación de este tipo depende de la forma que tome la f(x). Ahora bien, la ecuación siguiente es similar a la Ec. 1, siendo que

$$b\frac{dy}{dx} + cy = 0 \qquad (2),$$

cuya solución es

$$\ln y = \frac{c}{b}x + k, \qquad \text{o bien} \qquad y = \exp\left(\frac{c}{b}x + k\right) \qquad (3).$$

Con base en este resultado, se ha propuesto entonces que la solución de la Ec. 1 se aproxima a una función tal que

$$y = e^{rx} \qquad (4);$$

a esto se le ha llamado la sustitución de d'Alembert. De esta forma se puede obtener la Ec. 1 dado que pueden derivarse sus derivadas, de modo que

$$\frac{dy}{dx} = r\,e^{rx} \qquad y \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = r^2\,e^{rx} \qquad (5)$$

Cuando f(x) = 0, al sustituir las Ec. 4 y 5 en 1, se obtiene que:

$$a\,r^2\,e^{rx} + b\,r\,e^{rx} + c\,e^{rx} = 0 \qquad (6)$$

Al eliminar el término e^{rx}, queda una ecuación cuadrática

$$a\,r^2 + b\,r + c = 0 \qquad (7),$$

o ecuación característica cuya solución es bien conocida. Esta ecuación admite dos raíces, r_1 y r_2; dependiendo del valor de estas raíces, se tendrá una solución distinta; a saber:

a) Raíces reales iguales ($r_1 = r_2 = r$):

$$y = c_1\, x\, e^{rx} + c_2\, e^{rx} \qquad (8).$$

b) Raíces reales diferentes ($r_1 \neq r_2$):

$$y = c_1\, e^{r_1 x} + c_2\, e^{r_2 x} \qquad (9).$$

c) Raíces reales repetidas p veces ($r_1 = r_2 = \ldots = r_p$):

$$y = \left(c_1 + c_2\, x + c_3\, x^2 + \ldots + c_p\, x^{p-1}\right) e^{rx} \qquad (10).$$

En el caso en que $f(x) \neq 0$, se dice que la solución de la Ec. 1 es tal que

$$y = y_c + y_p \qquad (11),$$

donde y_c es la llamada solución complementaria obtenida cuando $f(x) = 0$, y y_p es la solución particular la cual depende de la forma de la función f(x). A continuación se presenta una tabla que muestra la forma que toma y_p para diferentes tipos de función f(x).

f(x)	y_p
a	A
e^{ax}	$A\, e^{ax}$
$x\, e^{ax}$	$A\, x\, e^{ax} + B\, e^{ax}$
$a\, x^3 + b\, x^2 + c\, x + d$	$A\, x^3 + B\, x^2 + C\, x + D$
Sen 2x ó Cos 2x	A Sen 2x + B Cos 2x

Nótese que todos los parámetros constantes que surgen en las soluciones deben conseguirse por medio de las condiciones de frontera.

Ejemplo:

Hallar la solución para la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\, \frac{dy}{dx} + 2\, y = 40\, e^{3x}$$

Solución: La ecuación anterior admite una solución similar a la Ec. 11 ya que $f(x) \neq 0 = 40\, e^{3x}$. Primero se encuentra la solución complementaria sustituyendo a "y" y sus derivadas según las Ecs. 4 y 5. Luego de sustituir se tiene la ecuación cuadrática $r^2 + 3\, r + 2 = 0$, cuyas raíces son –2 y –1 (r_1 y r_2). Entonces, la solución complementaria sería:

$$y_c = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$$

A continuación debe hallarse la solución particular; según la Tabla 1, $y_p = A\, e^{3x}$ dado que f(x) es de la forma "$b\, e^{ax}$". Se sustituye y_p en la ecuación de modo que

$$\frac{d^2\left(Ae^{3x}\right)}{dx^2} + 3\, \frac{d\left(Ae^{3x}\right)}{dx} + 2\, Ae^{3x} = 40\, e^{3x}$$

Al obtener la segunda y primera derivadas, la ecuación toma la forma

$$9\ Ae^{3x} + 9\ Ae^{3x} + 2\ Ae^{3x} = 40\ e^{3x}$$

Puede observarse en la ecuación anterior que el término e^{3x} se cancela en ambos lados de la ecuación y puede entonces despejarse el valor de A, dando entonces A = 2. Sustituyendo entonces las soluciones para tanto la solución complementaria como la particular, se obtiene finalmente:

$$y = c_1\ e^{-x} + c_2\ e^{-2x} + 2\ e^{3x}$$

2. Ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes variables

Las ecuaciones diferenciales reducibles a la forma

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + ... + a_n y = f(x) \tag{12}$$

pueden solucionarse haciendo las sustituciones siguientes:

- $z = \ln x \Rightarrow \rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = e^{-z}$ (13)
- Primera derivada: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{1}{x}$ (14)
- Segunda derivada: $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dz}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dz}{dx} = \frac{d}{dz}\left(\frac{dy}{dz}\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x}$

$$\rightarrow \left[\frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{1}{x^2}\frac{dy}{dz}\right] = \frac{1}{x^2}\left[\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz}\right] \tag{15}$$

- Tercera derivada:

$$\rightarrow \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1}{x^3}\left[\frac{d^3y}{dz^3} - 3\ \frac{d^2y}{dz^2} + 2\ \frac{dy}{dz}\right] \tag{16}$$

- Enésima derivada:

$$\rightarrow \frac{d^ny}{dx^n} = \frac{1}{x^n}\ \frac{d}{dz}\ \left[\frac{d}{dz} - 1\right]....\left[\frac{d}{dz} - n + 1\right] y \tag{17}$$

Una vez realizadas las sustituciones (Ecs. 13 a 17), la Ec. 12 toma la forma de la Ec. 1, o ecuación de Euler.

Ejemplo:

Hallar la solución de la ecuación

$$6x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 8x\frac{dy}{dx} - 8y = x^2$$

Solución: Sustituyendo por las Ecs. 13 a 15, se obtiene entonces

$$6x^2 \frac{1}{x^2}\left[\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz}\right] + 8x\frac{1}{x}\frac{dy}{dz} - 8y = x^2$$

Se observa que los términos que contienen la variable x en el lado izquierdo de la eciuación se eliminan; luego, haciendo $x^2 = e^{-2z}$, se tiene entonces la ecuación

$$6\frac{d^2y}{dz^2} + 2\frac{dy}{dz} - 8y = e^{-2z}$$

Esta ecuación es en todo similar a la ecuación de Euler (Ec. 1 con $f(x) \neq 0$) y se resuelve por el método antes descrito ($y = y_c + y_p$).

*3. **Ecuaciones diferenciales de Bessel***

Las ecuaciones diferenciales de Bessel pueden reducirse a la forma siguiente

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + \left[a + 2bx^{\sigma}\right]x\frac{dy}{dx} + \left[c + dx^{2q} + b(a + \sigma - 1)x^{\sigma} - b^2x^{2\sigma}\right]y = 0 \qquad (18)$$

donde los términos, a, b, c, d, σ y q son parámetros constantes. Estos parámetros deben hallarse por comparación con la ecuación diferencial que se tenga a mano.

La Ec. 18 admite la solución siguiente, siempre y cuando $(1-a)^2 \geq 4c$ y que d, σ y q sean diferentes de cero:

$$y = x^{\alpha}e^{-\beta x^{\sigma}}\left[c_1Z_p(\lambda x^q) + c_2Z_{-p}(\lambda x^q)\right] \qquad (19)$$

Los nuevos parámetros de la solución de la ecuación (Ec. 19) se calculan acorde con

$$\alpha = \frac{1-a}{2}; \quad \beta = \frac{b}{\sigma}; \quad \lambda = \frac{\sqrt{|d|}}{q} \quad y \quad p = \frac{\sqrt{(1-a)^2 - 4c}}{2q} \qquad (20),$$

en tanto que Z_p y Z_{-p} denotan alguna función de Bessel; el tipo de función de Bessel depende de los valores de d y de p. Así,

- Si $d \geq 0$ y p es diferente de cero y no es un número entero:

$Z_p = J_p$ y $Z_{-p} = J_{-p}$, o funciones de Bessel de primer tipo y orden p.

- Si $d \geq 0$ y p es igual a cero o es un número entero:

$Z_p = J_p$ y $Z_{-p} = Y_p$, siendo esta última la función de Bessel de segundo tipo y orden p.

- Si $d < 0$ y p es diferente de cero y no es un número entero:

$Z_p = I_p$ y $Z_{-p} = I_{-p}$, o funciones de Bessel de primer tipo modificada y orden p.

- Si $d < 0$ y p es cero o es un número entero:

$Z_p = I_p$ y $Z_{-p} = K_p$, siendo esta última una función de Bessel de segundo tipo modificada y orden p.

Los valores de las funciones de Bessel pueden hallarse en tablas (véase tabla anexa). Es también útil conocer las formas que toman las derivadas de algunas funciones; a saber:

$$\frac{d}{dx}\left[J_o(ax)\right] = -a\, J_1(ax) \tag{21}$$

$$\frac{d}{dx}\left[Y_o(ax)\right] = -aY_1(ax) \tag{22}$$

$$\frac{d}{dx}\left[I_o(ax)\right] = a\, I_1(ax) \tag{23}$$

$$\frac{d}{dx}\left[K_o(ax)\right] = -a\, K_1(ax) \tag{24}$$

Ejemplo:

Hallar la solución de la ecuación diferencial siguiente:

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - \rho^2 x^{3/2} y = 0$$

Solución: Primero, hay que determinar los valores de los parámetros a, b, c, d, σ y q de la Ec. 18. Así, se tiene que

$$\left[a + 2bx^{\sigma}\right]x = x$$

y $$\left[c + dx^{2q} + b(a + \sigma - 1)x^{\sigma} - b^2x^{2\sigma}\right] = -\rho^2 x^{3/2}$$

Una solución para las ecuaciones anteriores (se escogen las alternativas más sencillas) puede ser a = 1 y b = 0 (σ cualquier valor), para lo cual c = 0, q = 3/4 y d = - ρ^2. Con estos valores pueden calcularse entonces los parámetros de la Ec. 20, siendo entonces $\alpha = 0$; $\beta = 0$; $\lambda = 4\rho/3$ y p = 0. Sustituyendo estos valores en la solución genérica (Ec. 19), se tiene que

$$y = c_1 I_o\left(4/3\rho x^{3/4}\right) + c_2 K_o\left(4/3\rho x^{3/4}\right)$$

Para la solución anterior se consideró que, dado d < 0 y p = 0, $Z_p = I_p$ y $Z_{-p} = K_p$.

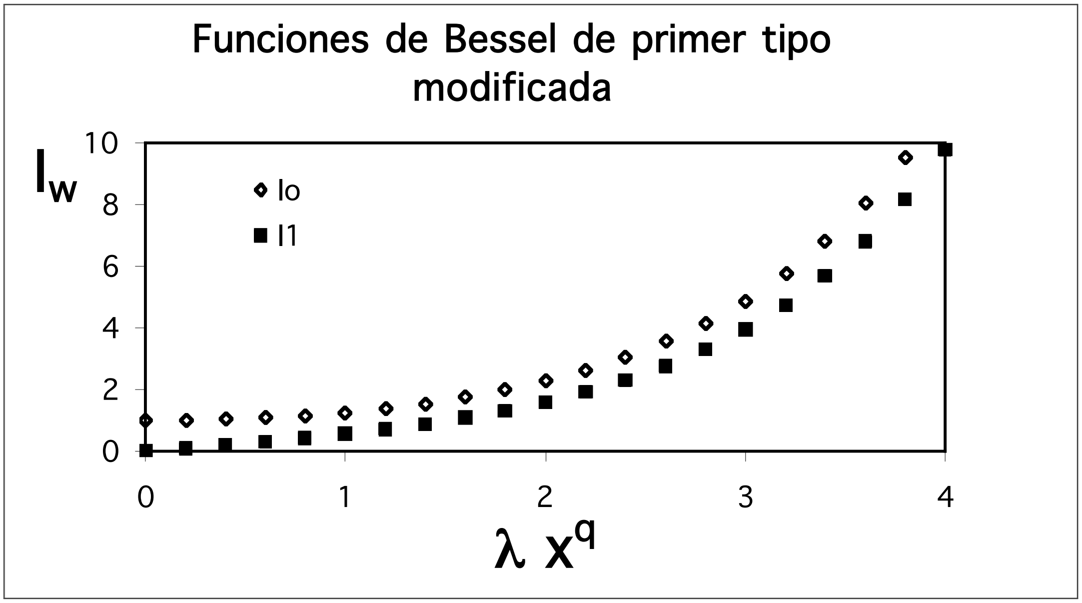
Tabla: Valores de algunas funciones de Bessel.

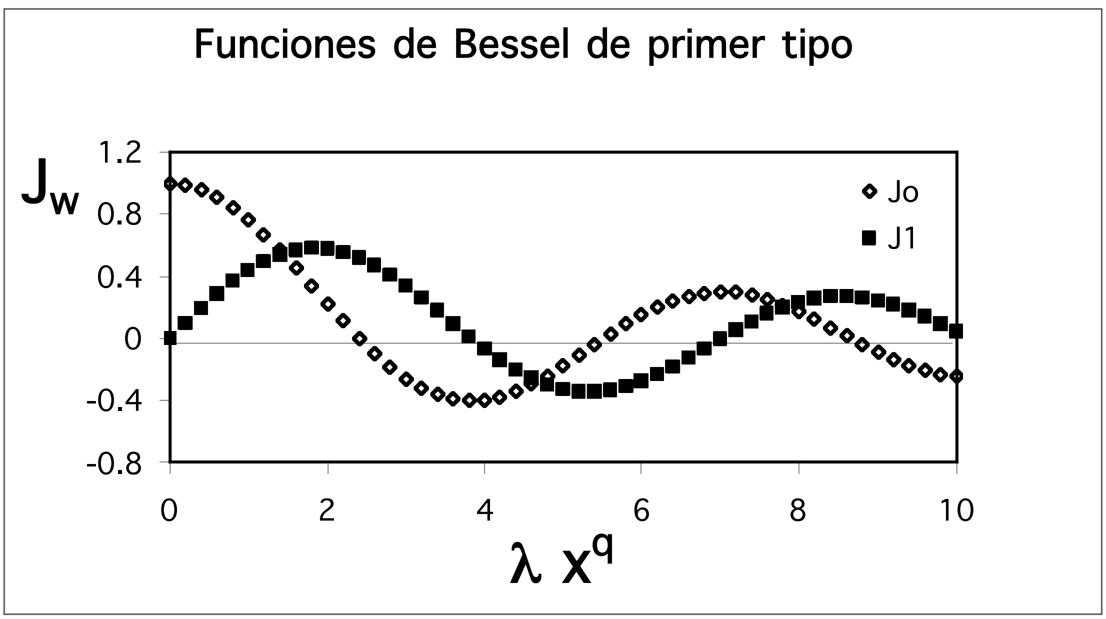
(λx^q)	$J_0(\lambda x^q)$	$J_1(\lambda x^q)$	$Y_0(\lambda x^q)$	$Y_1(\lambda x^q)$	$I_0(\lambda x^q)$	$I_1(\lambda x^q)$	$K_0(\lambda x^q)$	$K_1(\lambda x^q)$
0	1	0	- oo	- oo	1.00	0.00	- oo	+ oo
0.2	0.990	0.100	-1.081	-3.324	1.01	0.10	1.75	4.78
0.4	0.960	0.196	-0.606	-1.781	1.04	0.20	1.11	2.18
0.6	0.912	0.287	-0.309	-1.260	1.09	0.31	0.778	1.303
0.8	0.846	0.369	-0.087	-0.978	1.17	0.43	0.565	0.862
1	0.765	0.440	0.088	-0.781	1.27	0.57	0.421	0.602
1.2	0.671	0.498	0.228	-0.621	1.39	0.71	0.319	0.435
1.4	0.567	0.542	0.338	-0.479	1.55	0.89	0.244	0.321
1.6	0.455	0.570	0.420	-0.348	1.75	1.08	0.188	0.241
1.8	0.340	0.582	0.477	-0.224	1.99	1.32	0.146	0.183
2	0.224	0.577	0.510	-0.107	2.28	1.59	0.114	0.140
2.2	0.110	0.556	0.521	0.001	2.63	1.91	0.0893	0.1079
2.4	0.003	0.520	0.510	0.100	3.05	2.30	0.0702	0.0837
2.6	-0.097	0.471	0.481	0.188	3.55	2.76	0.0554	0.0653
2.8	-0.185	0.410	0.436	0.264	4.16	3.30	0.0438	0.0511
3	-0.260	0.339	0.377	0.325	4.88	3.95	0.0347	0.0402
3.2	-0.320	0.261	0.307	0.371	5.75	4.73	0.0276	0.0316
3.4	-0.364	0.179	0.230	0.401	6.78	5.67	0.0220	0.0250
3.6	-0.392	0.095	0.148	0.415	8.03	6.79	0.0175	0.0198
3.8	-0.403	0.013	0.065	0.414	9.52	8.14	0.0140	0.0157
4	-0.397	-0.066	-0.017	0.398	11.3	9.76	0.0112	0.0125
4.2	-0.377	-0.139	-0.094	0.368	13.4	11.7	0.00893	0.00994
4.4	-0.342	-0.203	-0.163	0.326	16.0	14.0	0.00715	0.00792
4.6	-0.296	-0.257	-0.223	0.274	19.1	16.9	0.00573	0.00633
4.8	-0.240	-0.298	-0.272	0.214	22.8	20.3	0.00460	0.00506
5	-0.178	-0.328	-0.309	0.148	27.2	24.3	0.00369	0.00404
5.2	-0.110	-0.343	-0.331	0.079	32.6	29.3	0.00297	0.00324
5.4	-0.041	-0.345	-0.340	0.010	39.0	35.2	0.00238	0.00260
5.6	0.027	-0.334	-0.335	-0.057	46.7	42.3	0.00192	0.00208
5.8	0.092	-0.311	-0.318	-0.119	56.0	50.9	0.00154	0.00167
6	0.151	-0.277	-0.288	-0.175	67.2	61.3	0.00124	0.00134
6.2	0.202	-0.233	-0.248	-0.222	80.7	73.9	0.00100	0.00108
6.4	0.243	-0.182	-0.200	-0.260	97.0	89.0	0.00081	0.00087
6.6	0.274	-0.125	-0.145	-0.286	117	107	0.00065	0.00070
6.8	0.293	-0.065	-0.086	-0.300	140	129	5.3.E-04	5.6.E-04
7	0.300	-0.005	-0.026	-0.303	169	156	4.2.E-04	4.5.E-04
7.2	0.295	0.054	0.034	-0.293	203	188	3.4.E-04	3.7.E-04
7.4	0.279	0.110	0.091	-0.273	244	227	2.8.E-04	3.0.E-04
7.6	0.252	0.159	0.142	-0.243	294	274	2.2.E-04	2.4.E-04
7.8	0.215	0.201	0.187	-0.204	355	331	1.8.E-04	1.9.E-04
8	0.172	0.235	0.224	-0.158	428	400	1.5.E-04	1.6.E-04
8.2	0.122	0.258	0.250	-0.107	516	483	1.2.E-04	1.3.E-04
8.4	0.069	0.271	0.266	-0.053	622	584	9.6.E-05	1.0.E-04

Tabla: Valores de algunas funciones de Bessel (cont.).

8.6	0.015	0.273	0.271	0.001	750	705	7.8.E-05	8.2.E-05
8.8	-0.039	0.264	0.266	0.054	906	853	6.3.E-05	6.6.E-05
9	-0.090	0.245	0.250	0.104	1094	1031	5.1.E-05	5.4.E-05
9.2	-0.137	0.217	0.224	0.149	1321	1247	4.1.E-05	4.3.E-05
9.4	-0.177	0.182	0.191	0.187	1595	1508	3.3.E-05	3.5.E-05
9.6	-0.209	0.140	0.150	0.217	1927	1824	2.7.E-05	2.8.E-05
9.8	-0.232	0.093	0.105	0.238	2329	2207	2.2.E-05	2.3.E-05
10	-0.246	0.043	0.056	0.249	2816	2671	1.8.E-05	1.9.E-05
20	0.167	0.067	0.063	-0.166	4.E+07	4.E+07	5.7.E-10	5.9.E-10
30	-0.086	-0.119	-0.117	0.084	8.E+11	8.E+11	2.1.E-14	2.2.E-14
40	0.007	0.126	0.126	-0.006	1.E+16	1.E+16	8.4.E-19	8.5.E-19
50	0.056	-0.098	-0.098	-0.057	3.E+20	3.E+20	3.4.E-23	3.4.E-23
60	-0.091	0.047	0.047	0.092	6.E+24	6.E+24	1.4.E-27	1.4.E-27
70	0.095	0.010	0.009	-0.095	1.E+29	1.E+29	5.9.E-32	6.0.E-32
80	-0.070	-0.056	-0.056	0.069	2.E+33	2.E+33	2.5.E-36	2.5.E-36
90	0.027	0.080	0.080	-0.026	5.E+37	5.E+37	1.1.E-40	1.1.E-40
100	0.020	-0.077	-0.077	-0.020	1.E+42	1.E+42	4.7.E-45	4.7.E-45
200	-0.015	-0.054	-0.054	0.015	-	-	0	0
300	-0.033	-0.032	-0.032	0.033	-	-	0	0
400	-0.039	-0.009	-0.009	0.039	-	-	0	0
500	-0.034	0.010	0.011	0.034	-	-	0	0
600	-0.022	0.024	0.024	0.022	-	-	0	0
700	-0.006	0.029	0.029	0.006	-	-	0	0
800	0.009	0.027	0.027	-0.009	-	-	0	0
900	0.020	0.018	0.018	-0.020	-	-	0	0
1000	0.025	0.005	0.005	-0.025	-	-	0	0

Figuras: Representación gráfica de algunas funciones de Bessel.





Figuras: Representación gráfica de algunas funciones de Bessel (cont.).