KERNEL (NUCLEO) E IMAGEN DE UNA APLICACION

DEFINICION: Sea $T: V \to W$ una aplicación lineal

a) El conjunto de todos los vectores $v \in V$, tales que $T(v) = 0$, se llama Kernel (o núcleo) de T, es decir:

$$Ker(T) = \{v \in V / T(v) = 0\}.$$

b) El conjunto de todos los vectores $w \in W$, tales que existe algún $v \in V$ de forma que $T(v) = w$, se llama imagen de T, es decir:

$$Img(T) = \{w \in W / T(v) = w \text{ para algún } v \in V\}.$$

Ejemplos:

1) $I: V \to V$; $I(v) = v$

$$Ker(I) = \{0\} \quad ; \quad Img(I) = V$$

2) $T: V \to W$; $T(v) = 0$

$$Ker(T) = V \quad ; \quad Img(T) = \{0\}$$

3) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$; $T(x, y) = (2x, 3x + y, 0)$

$$Ker(T) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / T(x,y) = (0,0,0)\} = \{(0,0)\}$$

$$2x = 0 \quad ; \quad 3x + y = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$\text{Img}(T) = \{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 / T(x,y) = (u,v,w) \text{ para algún } (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$

$T(x,y) = (2x, 3x+y, 0) = (u,v,w)$

$w = 0$
$2x = u$
$3x + y = v$

$(2x, 3x+y, 0) = x(2,3,0) + y(0,1,0)$

$\text{Img}(T) = \text{gen}\{(2,3,0);(0,1,0)\}$

4) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$; $T(x,y,z) = (x-2y, y+3z)$

$\text{Ker}(T) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / T(x,y,z) = (0,0)\}$

$x - 2y = 0$
$y + 3z = 0$

$x = 2y$
$z = -y/3$

Si $y = \lambda$; $x = 2\lambda$; $z = -\lambda/3$

$(2\lambda, \lambda, -\lambda/3) = \lambda(2, 1, -1/3)$

$\therefore \text{Ker}(T) = \text{gen}\{(2,1,-1/3)\}$

$\text{Img}(T) = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 / T(x,y,z) = (u,v) \text{ para algún } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$

$(u,v) = (x-2y, y+3z) \Rightarrow \begin{array}{l} u = x - 2y \\ v = y + 3z \end{array} \quad \therefore \text{Img}(T) = \mathbb{R}^2$

AUTOVALORES Y AUTOVECTORES (VALORES Y VECTORES PROPIOS)

DEFINICION: Sea A una matriz cuadrada de orden "n", se dice que λ es un autovalor asociado al vector v, si $AV = \lambda V$ con $V \neq 0$ (Al vector v se le denomina vector propio o autovector)

La matriz cero $n\times 1$, se excluye como vector propio de A, ya que $A0 = 0 = \lambda 0$ para toda matriz A de $n\times n$ y cualquier escalar λ. Por lo tanto, cada uno de los valores propios debe corresponder a una matriz no nula de $n\times 1$

¿Cómo obtener los autovalores y autovectores?

De la ecuación anterior $AV=\lambda V$, si $V\neq 0$, se tiene que: $AV=(\lambda I)V$, donde I es la matriz identidad de orden n. Por consiguiente: $(A-\lambda I)V=0$. Sabemos que la ecuación anterior tiene una solución diferente a la trivial si y sólo si: $\det(A-\lambda I)=0$

<u>TEOREMA</u>: Sea A una matriz $n\times n$. Entonces λ es un valor característico (valor propio) de A si y sólo si λ es una solución real de la ecuación $(A-\lambda I)=0$

<u>Ejemplo</u>: Consideremos la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 3 & 1 \\ -1 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+1)(\lambda-3)(\lambda-1)$$

Polinomio característico: $P(\lambda) = -(\lambda+1)(\lambda-3)(\lambda-1)$

Para calcular los autovalores, hacemos $P(\lambda)=0$

$-(\lambda+1)(\lambda-3)(\lambda-1)=0$

Autovalores : $\lambda=-1$; $\lambda=3$; $\lambda=1$

Para hallar los autovectores después de haber encontrado los autovalores, hay que resolver el sistema: $(A-\lambda I)v=0$ para cada autovalor.

NOTA: El sistema siempre es compatible indeterminado

En el ejemplo anterior, para $\lambda=1$ se tiene:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vemos que: $-2x_3=0 \Rightarrow x_3=0$

$-x_1+3x_2=0 \Rightarrow x_1=3x_2$

Si hacemos $x_2=\lambda$; $x_1=3\lambda$; $x_3=0$

$v=(3x_2,x_2,0)=x_2(3,1,0)$. Los autovectores son gen$\{(3,1,0)^T\}$

Los autovectores son de la forma: $(3\lambda,\lambda,0)=\lambda(3,1,0)$

Para $\lambda=-1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x_1+3x_2+x_3=0$

$-x_1+5x_2 \quad =0 \Rightarrow x_1=5x_2$

$x_3=-8x_2$

Si hacemos $x_2=\alpha$; $x_1=5\alpha$; $x_3=8\alpha$

Los autovectores están en el espacio gen$\{(5,1,-8)^T\}$

Para $\lambda = 3$

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$-4x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 0$

$-x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = x_1$

Si hacemos: $x_1 = \lambda$; $x_2 = \lambda$; $x_3 = 0$

Los autovectores son: $\text{gen}\{(1,1,0)^T\}$

SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE PRIMER ORDEN:

Un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, es un sistema de la forma:

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1(t) + \dots + a_{1n}x_n(t) + f_1(t)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1(t) + \dots + a_{2n}x_n(t) + f_2(t) \qquad (1)$$

$$\vdots$$

$$\frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1(t) + \dots + a_{nn}x_n(t) + f_n(t)$$

donde las f_i son funciones continuas en un intervalo común I. Cuando $f_i(t) = 0$; $i = 1, 2, \dots, n$, se dice que el sistema (1) es homogéneo; de otra manera se llama no homogéneo.

La forma matricial del sistema (1) es:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix} \quad (2)$$

$x(t) \rightarrow$ vector de funciones incógnitas

De esta manera: $\dfrac{dX}{dt} = AX + F(t)$, si el sistema es homogéneo, entonces: $\dfrac{dX}{dt} = AX$

Un vector solución en un intervalo I es cualquier matriz columna:

$$X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

cuyos elementos son funciones diferenciables que satisfacen al sistema (2) en el intervalo.

<u>Ejemplo</u>: Verificar que: $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t}$ y $X_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} e^{6t}$

son soluciones de:

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} X \quad \text{en el intervalo } (-\infty, \infty)$$

Solución:

$$X_1 = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix} \Rightarrow X_1' = \begin{pmatrix} -2e^{-2t} \\ 2e^{-2t} \end{pmatrix}$$

$$AX_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2t} - 3e^{-2t} \\ 5e^{-2t} - 3e^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2e^{-2t} \\ 2e^{-2t} \end{pmatrix} = X_1'$$

Verificar para X_2.

TEOREMA: (PRINCIPIO DE SUPERPOSICION): Sean $X_1, X_2, \ldots, X_K$ un conjunto de vectores solución del sistema homogéneo $\dot{X} = AX$ en el intervalo I. Entonces la combinación lineal

$$X = C_1X_1 + C_2X_2 + \cdots + C_KX_K$$

donde C_i, $i = 1, 2, \ldots, K$, son constantes arbitrarias, es también una solución en el intervalo.

En el ejemplo anterior vimos que X_1 y X_2 son vectores solución del sistema homogéneo dado. De acuerdo al teorema anterior, $X_3 = -3X_1 + 2X_2$, también es un vector solución del sistema

COMPROBACION:

$$X_3 = -3X_1 + 2X_2 = \begin{pmatrix} -3e^{-2t} \\ 3e^{-2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6e^{6t} \\ 10e^{6t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3e^{-2t} + 6e^{6t} \\ 3e^{-2t} + 10e^{6t} \end{pmatrix}$$

$$\dot{X}_3 = \begin{pmatrix} 6e^{-2t} + 36e^{6t} \\ -6e^{-2t} + 60e^{6t} \end{pmatrix}$$

$$AX_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3e^{-2t} + 6e^{6t} \\ 3e^{-2t} + 10e^{6t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3e^{-2t} + 6e^{6t} + 9e^{-2t} + 30e^{6t} \\ -15e^{-2t} + 30e^{6t} + 9e^{-2t} + 30e^{6t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6e^{-2t} + 36e^{6t} \\ -6e^{-2t} + 60e^{6t} \end{pmatrix}$$

Queda verificado que: $AX_3 = \dot{X}_3$

TEOREMA: Sean $X_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}$; $X_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix}, \ldots, X_n = \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix}$

n vectores solución del sistema homogéneo $\dot{x} = AX$ en el intervalo I. Una condición necesaria y suficiente para el conjunto de soluciones linealmente independientes es que

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$ para toda t en I.

DEFINICION: Cualquier conjunto $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de "n" vectores solución linealmente independientes del sistema homogéneo $\dot{x} = AX$ (con A n-cuadrada) en un intervalo I, se dice que es un conjunto fundamental de soluciones en el intervalo.

DEFINICION: (SOLUCION GENERAL DE SISTEMAS HOMOGÉNEOS)

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ un conjunto fundamental de soluciones del sistema homogéneo $\dot{X} = AX$ en el intervalo I. La solución general del sistema en el intervalo se define como:

$$X = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \cdots + C_n X_n$$

donde las C_i; $i = 1, 2, \ldots, n$ son constantes arbitrarias

MATRIZ FUNDAMENTAL:

Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ es un conjunto fundamental de soluciones del sistema homogéneo $\dot{X} = AX$ en un intervalo I, entonces su solución general en el intervalo es:

$$X = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \cdots + C_n X_n$$

En forma matricial:

$$X = C_1 \begin{pmatrix} X_{11} \\ X_{21} \\ \vdots \\ X_{n1} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} X_{12} \\ X_{22} \\ \vdots \\ X_{n2} \end{pmatrix} + \cdots + C_n \begin{pmatrix} X_{1n} \\ X_{2n} \\ \vdots \\ X_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 X_{11} + C_2 X_{12} + \cdots + C_n X_{1n} \\ C_1 X_{21} + C_2 X_{22} + \cdots + C_n X_{2n} \\ \vdots \\ C_1 X_{n1} + C_2 X_{n2} + \cdots + C_n X_{nn} \end{pmatrix}$$

Así:

$$X = \underbrace{\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \uparrow X_1 & \uparrow X_2 & & \uparrow X_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{nn} \end{pmatrix} \end{array}}_{\text{Matriz Fundamental}} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}$$

SOLUCION SISTEMAS LINEALES HOMOGENEOS

Dado el sistema homogéneo:

$$\frac{dx}{dt} = X + 3Y \quad ; \quad \frac{dy}{dt} = 5X + 3Y$$

Se puede verificar de acuerdo a la definición de Solución general de Sist. Homogéneos (Pág 9), que la solución general del sistema homogéneo dado es:

$$X = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t} + C_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} e^{6t}$$

Dado que ambos vectores solución tienen la forma básica

$$X_i = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix} e^{\lambda_i t} \quad ; \quad i = 1,2$$

donde K_1 y K_2 son constantes, esto nos lleva a preguntarnos si siempre es posible encontrar una solución de la forma

$$X = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ \vdots \\ K_n \end{pmatrix} e^{\lambda t} = Ke^{\lambda t} \quad (1)$$

Si se supone que (1) es un vector solución de $\dot{X} = AX$, entonces $\dot{X} = \mathbf{K}\lambda e^{\lambda t}$, de modo que el sistema se convierte en:

$$K\lambda e^{\lambda t} = AKe^{\lambda t}$$

Simplificando queda: $AK = \lambda K$ ó $(A-\lambda I)K = 0$

La ecuación anterior es equivalente a la ecuación que permite determinar los autovalores de una matriz cuadrada A. Efectivamente, para hallar una solución X diferente de la trivial, se tiene que: $\det(A-\lambda I) = 0$.

En otras palabras, $X = Ke^{\lambda t}$ (1) será una solución del sistema de ecuaciones diferenciales si y sólo si λ es un valor característico de A y K es un vector característico correspondiente a λ

Cuando la matriz A de $n\times n$ cuenta con "n" valores característicos reales distintos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ entonces un conjunto de "n" vectores característicos Linealmente independientes $K_1, K_2, \ldots, K_n$ puede siempre encontrarse y $X_1 = K_1 e^{\lambda_1 t}$; $X_2 = K_2 e^{\lambda_2 t}$; $\ldots$, $X_n = K_n e^{\lambda_n t}$, es un conjunto fundamental de soluciones de $\dot{X} = AX$ en $(-\infty, \infty)$

<u>TEOREMA</u>: Sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ valores característicos reales y diferentes de la matriz A del sistema homogéneo $\dot{X} = AX$ y sea $K_1, K_2, \ldots, K_n$ sus correspondientes vectores característicos. Entonces la solución general de $\dot{X} = AX$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$ está dada por:

$$X = C_1 K_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 K_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + C_n K_n e^{\lambda_n t}$$

Ejemplo : Resolver

$$\frac{dx}{dt} = -4X + Y + Z$$

$$\frac{dY}{dt} = X + 5Y - Z$$

$$\frac{dZ}{dt} = Y - 3Z$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -4-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 5-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+3)(\lambda+4)(\lambda-5) = 0$$

y de esta manera, los valores característicos son: $\lambda = -3$; $\lambda = -4$ y $\lambda = 5$.

- Para $\lambda = -3$, queda el sistema $(A-(-3)I)K = 0$ $(A+3I)K = 0$, de donde se obtiene el vector característico $K_1 = (1 \ 0 \ 1)^T$

- Para $\lambda = -4$, queda el sistema $(A+4I)K = 0$, de donde se obtiene el vector característico $K_2 = (10 \ -1 \ 1)^T$

- Para $\lambda = 5$, queda el sistema $(A-5I)K = 0$, de donde se obtiene el vector característico $K_3 = (1 \ 8 \ 1)^T$

Solución general del sistema:

$$X = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t} + C_2 \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4t} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t}$$