Sustituciones en Integrales Múltiples

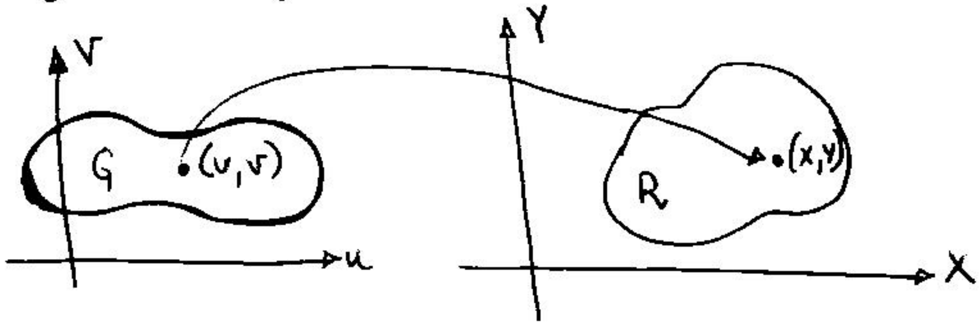
El objetivo de la sustitución es reemplazar integrales complicadas por otras más fáciles de evaluar.

Sustituciones en Integrales Dobles :

Cuando se realiza una sustitución en integrales múltiples, no sólo se plantean cambios en variables, sino que se genera también transformaciones de regiones.

Digamos que se tiene la sustitución :

$$X = g(u,v) \quad ; \quad Y = h(u,v) \qquad (1)$$



A través de las ecuaciones expresadas en (1), la región G en el plano UV se transforma uno a uno en la región R en el plano XY. Luego :

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint_G f\big(g(u,v),h(u,v)\big)\ |J(u,v)|\,du\,dv$$

Donde $J(u,v)$ es el jacobiano de la transformación coordenada y $|J(u,v)|$ es el valor absoluto de dicho jacobiano.

Si $x = g(u,v)$; $y = h(u,v)$, se tiene que:

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v}$$

El jacobiano también se denota por:

$$J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

Recordemos el caso particular de coordenadas polares, donde $x = r\cos\theta$ $y = r\,\text{Sen}\,\theta$. Luego:

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \iint_G f(r\cos\theta, r\,\text{Sen}\,\theta) \cdot r \cdot dr \cdot d\theta$$

$$J(r,\theta) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,\text{Sen}\,\theta \\ \text{Sen}\,\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\,\text{Sen}^2\theta = r$$

Sustituciones en Integrales Triples:

Supongamos que: $x = g(u,v,w)$; $y = h(u,v,w)$; $z = K(u,v,w)$

Entonces:

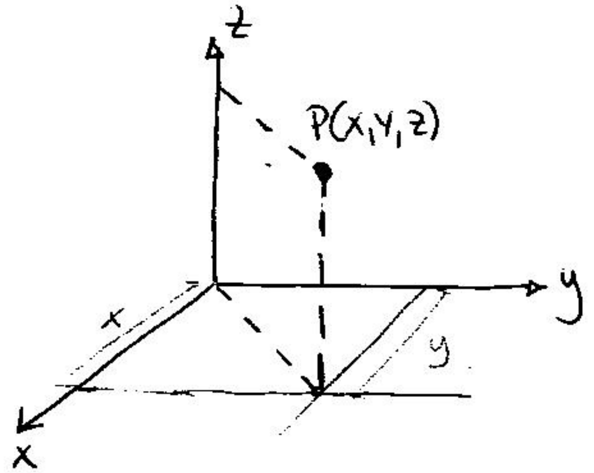
$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_G f\left[g(u,v,w), h(u,v,w), K(u,v,w)\right] \cdot |J(u,v,w)\,du\,dv\,dw$$

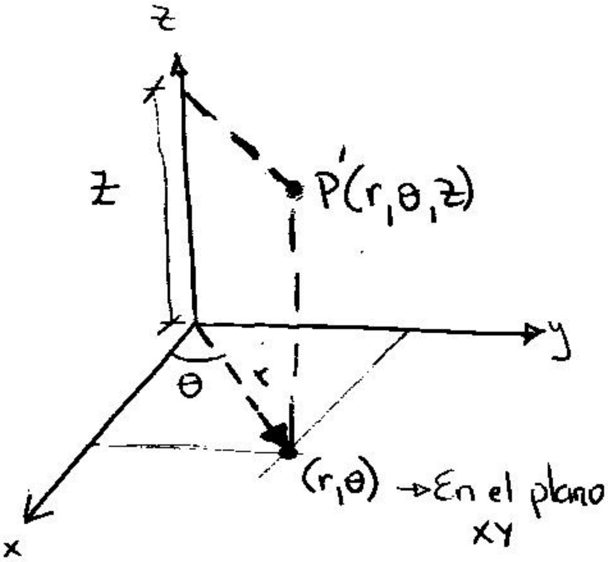
Donde:

$$J(u,v,w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$$

Veamos como se aplica lo anterior para el caso de Coordenadas Cilíndricas.

Veamos como un punto $P(x,y,z)$ en coordenadas rectangulares, se representa en su equivalente en coordenadas cilíndricas $P'(r,\theta,z)$





Ecuaciones de Transformación :

$$x = r\cos\theta \quad ; \quad y = r\,\mathrm{Sen}\,\theta \quad ; \quad z = z$$

El jacobiano de la transformación es:

$$J(r,\theta,z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{Sen}\,\theta & 0 \\ \mathrm{Sen}\,\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$J(r,\theta,z) = r\cos^2\theta + r\,\mathrm{Sen}^2\theta = r$$

<u>Por lo tanto</u>:

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_G H(r,\theta,z)\,r\,dr\,d\theta\,dz.$$

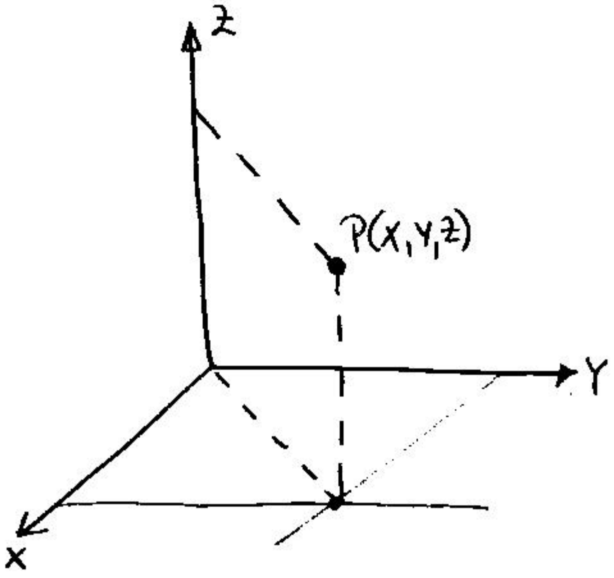
Donde: $|r| = r$; ya que $r \geq 0$ y:

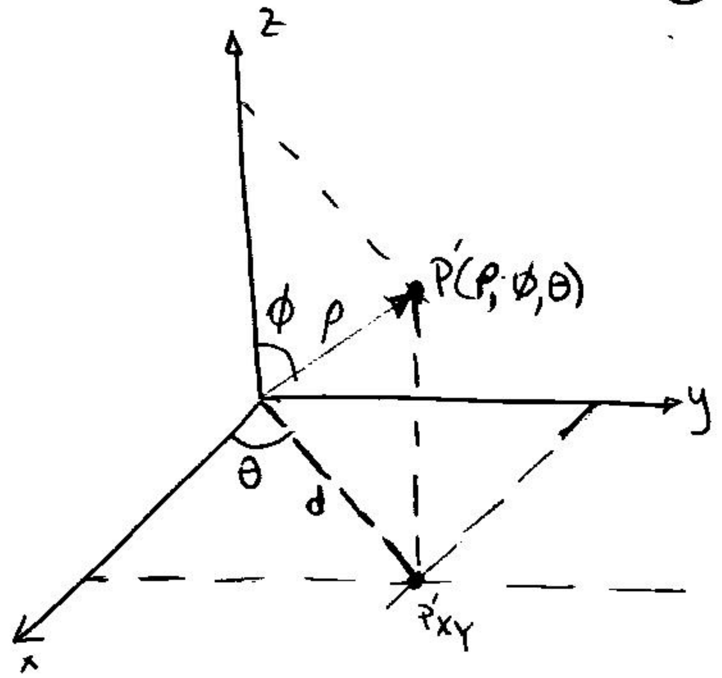
$$H(r,\theta,z) = f(r\cos\theta,\, r\,\mathrm{Sen}\,\theta,\, z)$$

Para coordenadas esféricas, ρ, ϕ y θ; la transformación del espacio cartesiano $\rho\phi\theta$ al espacio cartesiano XYZ, está dada por:

$$X = \rho\,\mathrm{Sen}\,\phi\cos\theta \quad ; \quad Y = \rho\,\mathrm{Sen}\,\phi\,\mathrm{Sen}\,\theta \quad ; \quad Z = \rho\cos\phi \qquad (1)$$

Representación gráfica del Punto $P(x,y,z)$ y su equivalente $P'(\rho,\phi,\theta)$ en coordenadas esféricas:

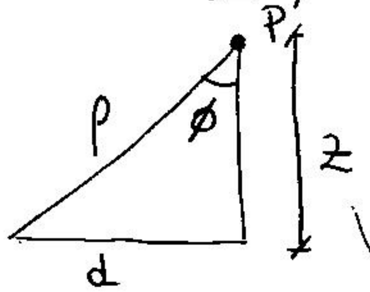




Aparte: 1) ϕ es el ángulo que forma el radio vector desde el origen hasta el punto P', con el semieje (+) Z. La magnitud de este radio vector es ρ.

2) θ es el ángulo que forma el radio vector cuya magnitud es "d", con el semieje (+) X.

<u>Luego</u>:

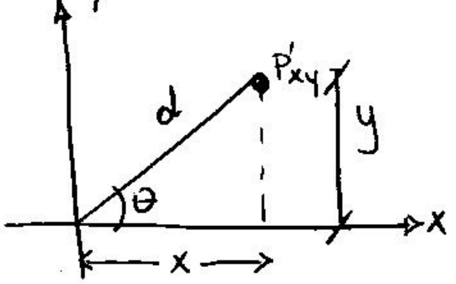


Se tiene que:

$d = \rho . Sen\phi$.

$\boxed{Z = \rho . Cos\phi}$

Si vamos a la proyección en el plano XY, se tiene:



$x = d Cos\theta \Rightarrow \boxed{X = \rho Sen\phi . Cos\theta}$

$Y = d Sen\theta \Rightarrow \boxed{Y = \rho Sen\phi . Sen\theta}$

Coinciden con las ecuaciones de transformación indicadas en (1) en la página 4.

El jacobiano de la transformación es:

$$J(\rho,\phi,\theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \rho^2 \cdot \operatorname{Sen}\phi$$

Luego, se tiene que:

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_G H(\rho,\phi,\theta)\,|\rho^2 \operatorname{Sen}\phi|\,d\rho\,d\phi\,d\theta .$$

<u>Donde</u>: $H(\rho,\phi,\theta) = f(\rho \operatorname{Sen}\phi \operatorname{Cos}\theta,\ \rho \operatorname{Sen}\phi \operatorname{Sen}\theta,\ \rho \operatorname{Cos}\phi)$