MATEMATICA ESPECIAL IE

EJERCICIOS ALGEBRA LINEAL Y MATRICIAL

1.- El campo gradiente asociado al potencial f(x,y,z)=Cos(x+2y+3z) ¿constituyen un subespacio de R^3? Justifique su respuesta.

2.- Los primeros cuatro polinomios de Hermite {1, 2t, $4t^2$-2, $8t^3$-12t} y de Chevyshev {1, t, $2t^2$-1, $4t^3$-3t} surgen de modelos de la física matemática. Exprese al polinomio P=7-12t-$8t^2$+$12t^3$ en término de estas bases. Cuál es la matriz de cambio de base? Compruebe sus resultados con dicha matriz.

3.- Dada la transformación $T: R^4 \to R^4$, definida por:

$$T\vec{v} = \begin{pmatrix} x-y+2z+w \\ -x+z+2w \\ x-2y+5z+4w \\ 2x-y+z-w \end{pmatrix}$$

a) Determine la matriz de la transformación T, b) Hallar KerT, ImagT, ν(T), ρ(T). (B1 y B2 son las bases canónicas).

4.- Dado el espacio vectorial V=R^2.
¿Es H=$\{(x,y)/y \geq 0\}$ un subespacio de V? Justificar.

5.- Suponga que se giran los ejes X y Y un ángulo θ (medido en grados o radianes) en sentido conrario a las agujas del reloj. Esto nos da nuevos ejes coordenados a los que denotaremos X', Y'.
a) ¿Cuáles son las nuevas coordenadas de los vectores **i** y **j** de la base girada?
b) Determine la matriz At de "cambio de coordenadas".
c) Si $\theta = \frac{2\pi}{3}$ =120º. Escriba el vector [4, 5] en términos de los nuevos ejes coordenados.

6.- Dado el vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3$. Escriba a $\vec{v}$ en términos de la base B=$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

7.- Dado el conjunto de vectores {1+x^2, -1-3x+$4x^2$+$5x^3$, 2+5x-$6x^3$, 4+6x+$3x^2$+$7x^3$}. Determine si forman una base para el subespacio $P_3(x)$.

8.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, determine A^n y e^{At}.

9.- En las siguientes matrices: a) Determine si es diagonalizable. b) Si es diagonalizable determine las matrices C y D talque se verifique $C^{-1}AC=D$. c) Determine A^n y e^{At}.

a) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ b) $A=\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$ c) $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

10.- Dada la matriz A= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Hallar $[A]^{-1}$, a) por transformaciones elementales, b) usando teorema de Cayley-Hamilton.

11.- Una matriz simétrica tiene por valores propios $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$, y dos vectores propios son:

$\bar{v}_1 = a\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\bar{v}_2 = b\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$. Hallar $[A]^n$ para n impar.

13.- Discutir y resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales, según los valores de λ.

a) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ \lambda x + 2y + 2z = 4 \\ \lambda^2 x + 4y + (\lambda + 3)z = \lambda^2 + 3\lambda + 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y + \lambda z = \lambda^2 \\ x + \lambda y + z = \lambda \\ \lambda x + y + z = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x + 2y - 2z + 6w = 4 \\ 6x - y - 4z - 3w = -12 \\ x + 2y + 2w = 6 \\ 8x - y - 6z + w = -14 \end{cases}$

14.- Dada la matriz [A]= $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}$. Determine un vector propio de [A], (uno solamente).

15.- Dada la matriz A= $\begin{pmatrix} \cos\alpha & sen\alpha \\ -sen\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$. Determine la potencia n-ésima de la matriz A. (recordar que $A^n = C.D^n.C^{-1}$).

16.- Usando matrices, hallar la solución general de los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales:

a) $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = -\frac{1}{2}x + y + e^t \tan(t) \end{cases}$, x(0)=y(0)=0

b) y'''-5y''+6y'=8+2sen(t)

c) $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}e^{2t}$

d) x''-3x'-10x=0 ; x(0)=3, x'(0)=2

e) $\begin{cases} x' = -6x - 3y + 14z \\ y' = 4x + 3y - 8z \\ z' = -2x - y + 5z \end{cases}$

Sol.: $x=2C_1e^{t}+4C_2e^{-t}+5C_3e^{2t}$
$y=-2C_2e^{-t}-4C_3e^{2t}$
$z= C_1e^{t}+C_2e^{-t}+2C_3e^{2t}$

f) $\begin{cases} x'+y'-2y = 0 \\ x'-y'-2x = 0 \end{cases}$

Sol.: $x=A\,e^{t}\cos t + B\,e^{t}\,\mathrm{sen}\,t$
$Y= B\,e^{t}\cos t - A\,e^{t}\,\mathrm{sen}\,t$

g) $x'''-6x''+11x'-6x=0$ Sol.: $x=C_1\,e^{t} + C_2\,e^{2t} + C_3\,e^{3t}$

17.- Resolver el siguiente sistema matricial: $\begin{cases} A.X + B.Y = A \\ B.X + Y = A \end{cases}$, siendo: A=$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ y B=$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Sol.: X=$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, Y=$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

18.- Dada la matriz B=$\begin{bmatrix} 1/3 & -2/3 & a \\ -2/3 & c & d \\ b & e & f \end{bmatrix}$, con a<0, b<0 y c>0. Determine a, b, c, d, e y f para que la matriz sea ortogonal.

Sol.: a=1, b=d=e=-2/3, c=f=1/3

19.- Determine los ángulos que forman los vectores propios de la siguiente matriz:

$$M=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

20.- Dada la matriz B=$\begin{bmatrix} 2a+3 & 1-a \\ 2+a & 3 \end{bmatrix}$. Determine el valor de a para que la matriz B tenga un solo valor propio y hállese el vector propio correspondiente.

21.- Determine una matriz [A] simétrica, talque dos de sus vectores propios sean $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$; $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ k \end{bmatrix}$, y tal que sus tres valores propios sean 1, 2 y 3. (k no es dato).

22.- Determine $[A]^{2n}$, siendo $[A]=\begin{bmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 8 & -7 & 2 \\ 7 & -5 & 1 \end{bmatrix}$.

Sol.: $[A]^{2n}= 3^{2n-1}\begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & 3 & -3 \end{bmatrix}$

23.- Utilizando el teorema de Cayley-Hamilton determine $[A]^{-2}$ si $[A]=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Sol.: $[A]^{-2} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

24.- Dada la matriz $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \end{bmatrix}$. Determine $X=A^{321}+A^{322}+A^{323}$

Sol.: $X=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

25 si X es una matriz simétrica 2x2 resolver la ecuación matricial $X^2 - 3X + 2I = 0$, sabiendo que uno de sus vectores propios es $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Sol.: $X= C.D.C^{-1} = \begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -1/2 & 3/2 \end{bmatrix}$

26.- Dada la matriz $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ determine e^A.

27.- Dada la matriz $A=\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$, determine sen(A). Sol.: sen(A)=sen(1) A

28.- Una matriz A es ortogonal y simétrica. Determine cos(A). Sol.: cos(A)=(I) cos(1)