RECTAS EN EL ESPACIO

PREVIO :

- **Vector Unitario** : Sea el vector $\vec{A}=[x_1,y_1,z_1]$, un vector unitario con la misma dirección y el mismo sentido que $\vec{A}$, viene dado por:

$$\mu_{\vec{A}}=\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}=\frac{1}{|\vec{A}|}\cdot[x_1,y_1,z_1]=\left[\frac{x_1}{|\vec{A}|},\frac{y_1}{|\vec{A}|},\frac{z_1}{|\vec{A}|}\right]$$

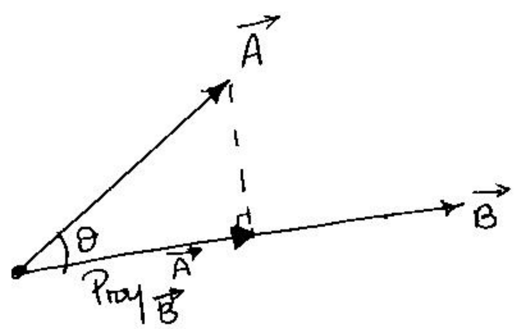
Y un vector unitario con la misma dirección y sentido contrario a $\vec{A}$, viene dado por:

$$\mu_{\vec{A}}=-\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}=\frac{-1}{|\vec{A}|}[x_1,y_1,z_1]=\left[\frac{-x_1}{|\vec{A}|},\frac{-y_1}{|\vec{A}|},\frac{-z_1}{|\vec{A}|}\right]$$

- **Vector Proyección** : Sean los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, el vector proyección de $\vec{A}$ sobre $\vec{B}$ viene dado por:

$$\text{Proy}_{\vec{B}}^{\vec{A}}=\underbrace{\left(\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{B}|^2}\right)}_{\text{Valor escalar.}}\cdot\vec{B}$$

DEMOSTRACION :



$$\cos\theta = \frac{|Proy_{\vec{B}}\vec{A}|}{|\vec{A}|} = \frac{\text{Cat. Ady}}{\text{Hipot.}} \Rightarrow |Proy_{\vec{B}}\vec{A}| = |\vec{A}|.\cos\theta$$

Sabemos que : $\cos\theta = \dfrac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|}$, sustituyendo queda:

$$|Proy_{\vec{B}}\vec{A}| = \cancel{|\vec{A}|}.\left(\frac{\vec{A}.\vec{B}}{\cancel{|\vec{A}|}|\vec{B}|}\right) = \frac{\vec{A}\circ\vec{B}}{|\vec{B}|}$$ (Módulo del Vector Proyec.)

Vector Proyección $\Rightarrow Proy_{\vec{B}}\vec{A} = |Proy_{\vec{B}}\vec{A}|.\mu_{\vec{B}}$

$$Proy_{\vec{B}}\vec{A} = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{B}|}.\frac{\vec{B}}{|\vec{B}|} \Rightarrow Proy_{\vec{B}}\vec{A} = \left(\frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{B}|}\right).\vec{B}$$ Demostrado!

<u>NOTA</u>: El vector resultante tendrá la misma dirección que el vector $\vec{B}$. Si $0 \le \theta < \pi/2$ el vector resultante tendrá el mismo sentido que $\vec{B}$ y si $\frac{\pi}{2} < \theta \le \pi$ el vector resultante tendrá sentido contrario que $\vec{B}$.

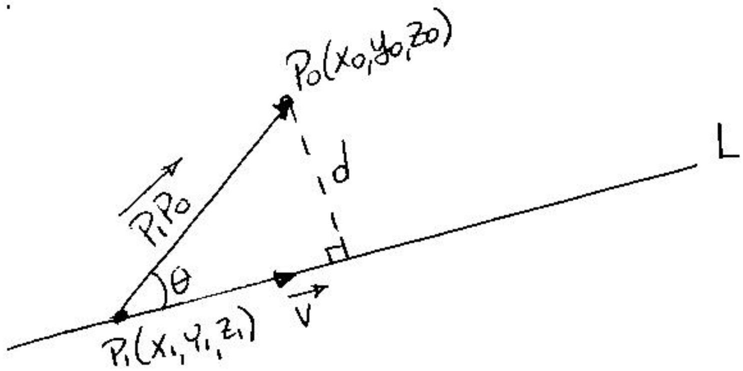
DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA

Sea L una recta en $\mathbb{R}^3$, con vector director $\vec{V}$ y sea el punto conocido $P_0(X_0, Y_0, Z_0)$. La distancia desde el punto P_0 a la recta L viene dada por:

$$d = \frac{|\vec{V} \times \overrightarrow{P_1P_0}|}{|\vec{V}|}$$

donde P_1 es un punto de la recta L. Estamos asumiendo que P_0 no pertenece a L. De ser así, la distancia sería cero.

PRUEBA :



θ es el ángulo entre los vectores $\overrightarrow{P_1P_0}$ y $\vec{v}$.

$$\operatorname{Sen}\theta = \frac{d}{|\overrightarrow{P_1P_0}|} = \frac{\text{Cat. Opuesto}}{\text{Hipot}} \Rightarrow d = |\overrightarrow{P_1P_0}|\operatorname{Sen}\theta$$

Recordemos que : $|\vec{v} \times \overrightarrow{P_1P_0}| = |\vec{v}||\overrightarrow{P_1P_0}|\operatorname{Sen}\theta$

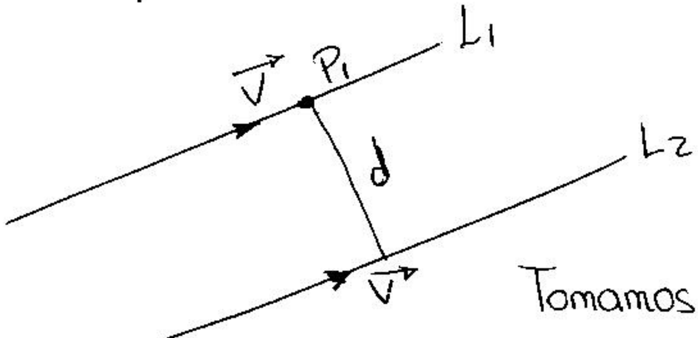
Sustituyendo $\operatorname{Sen}\theta$, se tiene que:

$$d = |\overrightarrow{P_1P_0}| . \frac{|\vec{v} \times \overrightarrow{P_1P_0}|}{|\vec{v}||\cancel{\overrightarrow{P_1P_0}}|} \Rightarrow d = \frac{|\vec{v} \times \overrightarrow{P_1P_0}|}{|\vec{v}|} \quad \text{Demostrado!}$$

DISTANCIA ENTRE RECTAS PARALELAS

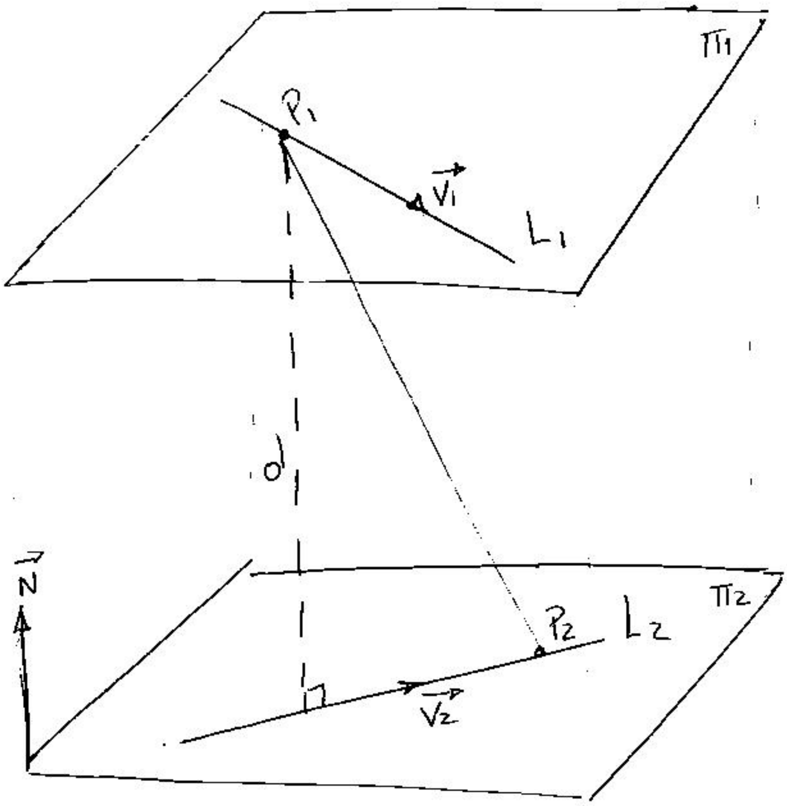
Sean las rectas paralelas L_1 y L_2 con vector director $\vec{v}$, la distancia entre ellas viene dada por:

$$d = \frac{|\vec{v} \times \overrightarrow{P_2P_1}|}{|\vec{v}|}$$ donde P_1 es un punto de L_1 y P_2 es un punto de L_2



Tomamos el punto P_1 y aplicamos la fórmula de distancia de un punto a una recta.

DISTANCIA ENTRE RECTAS QUE SE CRUZAN



El vector $\vec{N}$ es perpendicular a L_1 y a L_2, por lo tanto:

$\vec{N} = \vec{V_1} \times \vec{V_2}$

La distancia d viene dada por el módulo del vector proyección de $\overrightarrow{P_1P_2}$ en la dirección del vector $\vec{N}$. Por lo tanto:

$$d = \left| Proy_{\vec{N}} \overrightarrow{P_1P_2} \right| = \frac{|\vec{N} \cdot \overrightarrow{P_1P_2}|}{|\vec{N}|^2} \cdot |\vec{N}| = \frac{|\vec{N} \cdot \overrightarrow{P_1P_2}|}{|\vec{N}|}$$

Finalmente: $$d = \frac{|(\vec{V_1} \times \vec{V_2}) \cdot \overrightarrow{P_1P_2}|}{|\vec{V_1} \times \vec{V_2}|}$$

Ejemplo: Estudiar la posición relativa de las rectas dadas. En caso de que se corten, hallar el pto. intersección. Si son paralelas o se cruzan, hallar la distancia entre ellas.

$L_1: \frac{X-2}{2} = Y-3 = \frac{Z+1}{-2}$ $\qquad$ $L_2: \frac{X+1}{-2} = Y = \frac{Z-1}{2}$

$\vec{V_1} = [2,1,-2]$ $\qquad$ $\vec{V_2} = [-2,1,2]$

¿Son paralelas?

$\vec{V_1} = K\vec{V_2} \Rightarrow [2,1,-2] = K[-2,1,2]$

$2 = -2K \;;\; 1 = K \;;\; -2 = 2K$

$K = -1 \;;\; K = 1 \quad K = -1$

$\vec{V_1}$ y $\vec{V_2}$ no son proporcionales, por lo tanto L_1 y L_2 no son paralelas

¿Se cortan?

$L_1: \begin{cases} X = 2+2t \\ Y = 3+t \\ Z = -1-2t \end{cases}$ $\qquad$ $L_2: \begin{cases} X = -1-2w \\ Y = w \\ Z = 1+2w \end{cases}$

① $2+2t = -1-2w$; ② $3+t = w$; ③ $-1-2t = 1+2w$

Sustituimos ② en ① : $2+2t = -1-2(3+t)$

$2+2t = -1-6-2t$

$4t = -9$

$\boxed{t = -9/4}$ $\qquad$ $W = 3 - 9/4$

$\boxed{W = 3/4}$

Sustituimos t y W en ③:

$-1-2\left(-\frac{9}{4}\right) = 1+2\left(\frac{3}{4}\right)$

$-1+\frac{9}{2} = 1+\frac{3}{2}$

$\frac{7}{2} \neq \frac{5}{2}$ No se satisface. Por lo tanto L_1 y L_2 no se cortan, sino que se cruzan

$$d = \frac{|(\vec{V_1} \times \vec{V_2}) \cdot \vec{P_1P_2}|}{|\vec{V_1} \times \vec{V_2}|}$$

$$\vec{V_1}\times\vec{V_2} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (2+2)\hat{i} - (4-4)\hat{j} + (2+2)\hat{k}$$

$\vec{V_1}\times\vec{V_2} = [4,0,4]$; $P_1(2,3,-1)$; $P_2(-1,0,1)$

$|\vec{V_1}\times\vec{V_2}| = \sqrt{2.16} = 4\sqrt{2}$ $\quad \overrightarrow{P_1P_2} = [-3,-3,2]$

$$(\vec{V_1}\times\vec{V_2}).\overrightarrow{P_1P_2} = [4,0,4].[-3,-3,2] = -12+8 = -4$$

$$d = \frac{|-4|}{4\sqrt{2}} \rightarrow d = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

PLANOS

Sea $\vec{N} = [A,B,C]$ un vector fijo no nulo y $P_1(X_1,Y_1,Z_1)$ un punto fijo conocido. El conjunto de puntos $P(X,Y,Z)$ que satisfacen $\overrightarrow{P_1P}\cdot\vec{N} = 0$, es el plano que pasa por P_1 y es perpendicular a $\vec{N}$

Para obtener la ecuación cartesiana del plano, se escribe el vector $\overrightarrow{P_1P}$ en forma de componentes; es decir:

$$\overrightarrow{P_1P} = [X-X_1, Y-Y_1, Z-Z_1]$$

Entonces $\overrightarrow{P_1P}\cdot\vec{N} = 0$, es equivalente a:

$$A(X-X_1) + B(Y-Y_1) + C(Z-Z_1) = 0$$

$$AX + BY + CZ + (-AX_1 - BY_1 - CZ_1) = 0$$

$$\boxed{AX + BY + CZ + D = 0} \quad ; \; D = -AX_1 - BY_1 - CZ_1$$

Ecuación del plano con vector normal $\vec{N} = [A,B,C]$

ANGULO ENTRE DOS PLANOS.

Sean los planos $\pi_1: A_1X + B_1Y + C_1Z + D_1 = 0$ y $\pi_2: A_2X + B_2Y + C_2Z + D_2 = 0$, el ángulo entre ellos viene dado por el ángulo formado por sus vectores directores.

Ejemplo: Determinar la ecuación del plano que pasa por $(5,1,-2)$ y es perpendicular a $\vec{N}=[2,4,3]$. Luego, calcular el ángulo entre este plano y el plano con ecuación $3X-4Y+7Z=5$

Plano: $P(5,1,-2)$ $\quad \vec{N}=[2,4,3]$

$$2(X-5)+4(Y-1)+3(Z+2)=0$$

$$2X-10+4Y-4+3Z+6=0$$

$$\boxed{2X+4Y+3Z-8=0}$$

Angulo entre $2X+4Y+3Z-8=0$ y $3X-4Y+7Z=5$

$\vec{N_1}=[2,4,3]$ $\quad \vec{N_2}=[3,-4,7]$

$$\cos\theta=\frac{\vec{N_1}\cdot\vec{N_2}}{|\vec{N_1}||\vec{N_2}|}=\frac{[2,4,3]\cdot[3,-4,7]}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{74}}\cong 0{,}2375$$

Luego: $\theta \cong 76{,}26^\circ$.

Condición de Paralelismo y Perpendicularidad:

- Dos planos $\Pi_1: A_1X+B_1Y+C_1Z+D_1=0$ y $\Pi_2: A_2X+B_2Y+C_2Z+D_2=0$ son paralelos si sus vectores normales son proporcionales. Es decir: $\vec{N_1}=K\vec{N_2}$ ó $[A_1,B_1,C_1]=K[A_2,B_2,C_2]$

- Dos planos Π_1 y Π_2 son perpendiculares si $\vec{N_1}\cdot\vec{N_2}=0$

Planos Paralelos a los Planos Coordenados

- $X=X_0 \rightarrow$ Ecuación de un plano paralelo al plano coordenado YZ
- $Y=Y_0 \rightarrow$ Ecuación de un plano paralelo al plano coordenado XZ
- $Z=Z_0 \rightarrow$ Ecuación de un plano paralelo al plano coordenado XY

Planos Paralelos a los Ejes Coordenados

- $AX+BY+D=\emptyset$ → Ecuación de un plano paralelo al eje Z; $\vec{N}=[A,B,\emptyset]$
- $AX+CZ+D=0$ → Ecuación de un plano paralelo al eje Y; $\vec{N}=[A,\emptyset,C]$
- $BY+CZ+D=0$ → Ecuación de un plano paralelo al eje X; $\vec{N}=[\emptyset,B,C]$

DISTANCIA DE UN PUNTO A UN PLANO

La distancia "d" del punto $P_0(X_0,Y_0,Z_0)$ al plano $AX+BY+CZ+D=0$ está dada por la fórmula

$$d=\frac{|AX_0+BY_0+CZ_0-D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

DISTANCIA ENTRE PLANOS PARALELOS

Dados los planos $\pi_1: AX+BY+CZ+D_1=0$ y $\pi_2: AX+BY+CZ+D_2=0$ que son paralelos, la distancia entre ellos viene dada por la fórmula:

$$d=\frac{|D_1-D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

RECTA DADA POR LA INTERSECCION DE DOS PLANOS

Hallar la ecuación de la recta dada por la intersección de los planos: $\pi_1: X+3Y+Z+2=\emptyset$ y $\pi_2: X-Y-3Z-2=\emptyset$.

$\vec{N_1} = [1,3,1]$ $\qquad$ $\vec{N_2} = [1,-1,-3]$

¿Son paralelos? $\vec{N_1} = K\vec{N_2}$; $[1,3,1] = K[1,-1,-3]$

$K = 1$; $K = -3$; $K = -1/3$

No son paralelos.

$\vec{V} = \vec{N_1} \times \vec{N_2}$ El vector director de la recta a obtener debe ser perpendicular tanto a $\vec{N_1}$ como a $\vec{N_2}$ ya que estará contenida en ambos planos a la vez

$$\vec{V} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = (-9+1)\hat{\imath} - (-3-1)\hat{\jmath} + (-1-3)\hat{k}$$

$\vec{V} = [-8, 4, -4]$ ó $\vec{V} = [-2, 1, -1]$

Sólo falta un punto por donde pasa la recta para obtener su ecuación. Dicho punto es común ó pertenece a ambos planos, por lo que debe satisfacer las ecuaciones de ambos planos simultáneamente. Es decir, debemos resolver el sistema: $X + 3Y + Z + 2 = 0$ y $X - Y - 3Z - 2 = 0$

Tenemos 2 ecuaciones y tres incognitas, por lo tanto es un sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones). Le damos un valor arbitrario a cualquiera de las incognitas y resolvemos el sistema resultante para hallar el valor de las otras dos incógnitas.

Digamos que $Z = 0$

$$\begin{cases} X + 3Y + 2 = 0 \\ X - Y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -X - 3Y - 2 = 0 \\ X - Y - 2 = 0 \end{cases}$$

$$-4Y - 4 = 0$$

$$\boxed{Y = -1}$$

$$\Downarrow$$

$$X = Y + 2$$

$$\boxed{X = 1}$$

Punto: $Q(1, -1, 0)$

Ecuación de la recta intersección:

$$L: \begin{cases} X = 1 - 2t \\ Y = -1 + t \\ Z = -t \end{cases}$$

PUNTO DE CORTE ENTRE UNA RECTA Y UN PLANO

Sean las rectas $L: \begin{cases} X = X_0 + at \\ Y = Y_0 + bt \\ Z = Z_0 + ct \end{cases}$ y el plano $\pi: AX + BY + CZ + D = 0$

el punto de corte entre L y π, se obtiene sustituyendo las ecuaciones paramétricas de la recta L, en la ecuación del plano. Es decir:

$$A(X_0 + at) + B(Y_0 + bt) + C(Z_0 + ct) + D = 0$$

Luego se despeja "t" y el valor obtenido se sustituye en L y así se obtiene el punto de corte.

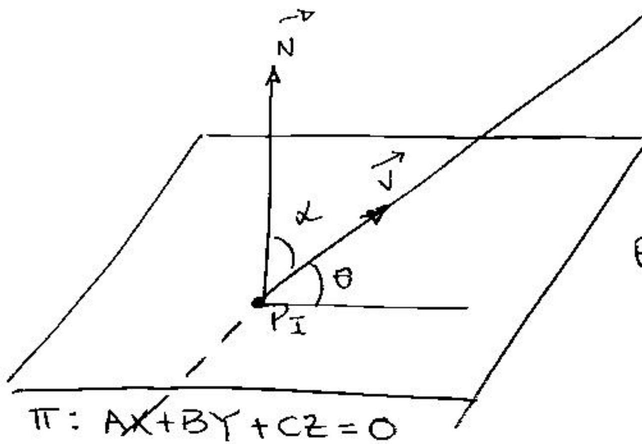
Ejemplo: Hallar el punto de intersección de la recta y el plano:

$$L: X - 1 = \frac{Y+1}{-2} = \frac{Z}{6} \quad ; \quad 2X + 3Y + Z - 1 = 0$$

$$L: \begin{cases} X = 1 + t \\ Y = -1 - 2t \\ Z = 6t \end{cases} \qquad \begin{aligned} 2(1+t) + 3(-1-2t) + 6t - 1 &= 0 \\ 2 + 2t - 3 - \cancel{6t} + \cancel{6t} - 1 &= 0 \\ 2t - 2 = 0 \Rightarrow t &= 1 \end{aligned}$$

Luego el punto intersección es: $P(2, -3, 6)$

ANGULO DETERMINADO POR UNA RECTA Y UN PLANO



$$L:\begin{cases} X = X_0 + at \\ Y = Y_0 + bt \\ Z = Z_0 + ct \end{cases}$$

$\theta \rightarrow$ ángulo entre L y π

Luego: $\cos\alpha = \dfrac{\vec{V}\cdot\vec{N}}{|\vec{V}||\vec{N}|}$ pero $\cos\alpha = \operatorname{Sen}\theta$

$\operatorname{Sen}\theta = \dfrac{\vec{V}\cdot\vec{N}}{|\vec{V}||\vec{N}|}$ Finalmente $\theta = \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{\vec{V}\cdot\vec{N}}{|\vec{V}||\vec{N}|}\right)$