Sistema de Ecuac. Diferenciales Lineales No Homogeneos de Primer Orden

Digamos que tenemos la siguiente ecuación diferencial:

$$Y' - aY = b \quad (1)$$

Multiplicamos (1) por un Factor integrante $\mu = e^{-at}$

$$\underbrace{e^{-at} Y' - e^{-at} . aY}_{} = e^{-at} b(t)$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-at} . Y\right) = e^{-at} . b(t)$$

$$e^{-at} . Y = C + \int e^{-at} . b \, dt$$

<u>Luego</u>: $Y = e^{at} . C + e^{at} \int e^{-at} . b \, dt$ con $X(0) = X_0$

Si llevamos lo anterior, a un sist. de ecuac. diferenciales lineales de 1^er orden no homogéneo, obtenemos:

$$\dot{X}(t) = AX(t) + B(t)$$

$$X(t) = e^{At} . C + e^{At} \int e^{-At} . B(t) \, dt$$

Si A es diagonalizable, entonces $D = P^{-1} A P$

$$P^{-1} . \dot{X} = P^{-1} A X + P^{-1} B(t)$$

$$P^{-1} \dot{X} = \underbrace{P^{-1} A P}_{D} . \underbrace{P^{-1} X}_{Z} + P^{-1} B(t)$$

Nos queda: con $Z = P^{-1}X$

$$\dot{Z} = DZ + P^{-1}B(t)$$

$$Z = e^{Dt}C + e^{Dt}\int e^{-Dt}\cdot P^{-1}B(t)\,dt$$

<u>Luego</u>: $x(t) = \underbrace{P e^{Dt} C}_{\substack{X_h \\ \text{Sol. general de} \\ \text{la homogénea}}} + \underbrace{P e^{Dt}\int e^{-Dt}\cdot P^{-1}\cdot B(t)\,dt}_{\substack{X_p = \text{Solución} \\ \text{particular.}}}$

<u>Ejemplo</u>: Resolver

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} e^{t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 7\lambda + 10 \Rightarrow P(\lambda) = 0 \Rightarrow (\lambda-5)(\lambda-2) = 0$$

• Para $\lambda = 5 \Rightarrow (A - \lambda I)X = 0$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -x_1 + 2x_2 = 0$$
$$x_1 = 2x_2$$

$$V_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

• Para $\lambda = 2$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$2x_1 + 2x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2$$

Luego: $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$P^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$X_h(t) = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

$$X_p(t) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{5t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}\int \begin{pmatrix} e^{5t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix} dt$$

$$X_p(t) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2e^{5t} & e^{2t} \\ e^{5t} & -e^{2t} \end{pmatrix}\int \begin{pmatrix} e^{-5t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix} dt$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2e^{5t} & e^{2t} \\ e^{5t} & -e^{2t} \end{pmatrix}\int \begin{pmatrix} e^{-4t} - e^{-6t} \\ e^{-t} + 2e^{-3t} \end{pmatrix} dt$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2e^{5t} & e^{2t} \\ e^{5t} & -e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{4}e^{-4t} + \frac{1}{6}e^{-6t} \\ -e^{-t} - \frac{2}{3}e^{-3t} \end{pmatrix}$$

Solución General: $X(t) = X_h(t) + X_p(t)$

Para comprobar, se debe satisfacer que: $\dot{X}(t) = AX(t) + B(t)$

HACERLO ¡¡

Método de Variación de Parámetros

Se tiene el sistema $\dot{X} = AX$, la solución general de este sistema es de la forma:

$$X(t) = C_1 X_1(t) + C_2 X_2(t) + \cdots + C_n X_n(t)$$

$$X(t) = C_1 \underbrace{V_1 e^{\lambda_1 t}}_{X_1} + C_2 \underbrace{V_2 e^{\lambda_2 t}}_{X_2} + \cdots + C_n \underbrace{V_n e^{\lambda_n t}}_{X_n}$$

Luego:

$$X(t) = C_1 \begin{pmatrix} X_{11} \\ X_{21} \\ \vdots \\ X_{n1} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} X_{12} \\ X_{22} \\ \vdots \\ X_{n2} \end{pmatrix} + \cdots + C_n \begin{pmatrix} X_{1n} \\ X_{2n} \\ \vdots \\ X_{nn} \end{pmatrix}$$

$$X(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2n} \\ \vdots & & & \\ X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{nn} \end{pmatrix}}_{\emptyset(t)} \underbrace{\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}}_{C}$$

Donde $\Phi(t)$ se llama Matriz Fundamental

De esta manera, la solución general del sistema homogéneo $\dot{X} = AX$ siempre puede ser escrita en términos de una matriz fundamental del sistema, como:

$$X(t) = \Phi(t) \cdot C \quad (1)$$

↳ Vector columna $n \times 1$ de las constantes $C_1, C_2, \ldots, C_n$

Además, si $x(t) = \Phi(t).c$ es solución de $\dot{x} = Ax$, esto significa que sustituyendo, queda:

$$\text{Si} \quad x(t) = \Phi(t).C \Rightarrow x'(t) = \Phi'(t)\, c.$$

Luego:

$$\Phi'(t)\, c = A.\Phi(t)\, c$$

$$(\Phi'(t) - A\,\Phi(t))\, C = 0$$

Como los elementos de C son constantes, entonces:

$$\Phi'(t) - A\Phi(t) = 0 \Rightarrow \Phi'(t) = A\,\Phi(t) \quad (2)$$

Ahora bien, si reemplazamos a C, por un vector columna de funciones $u(t)$ (para hallar X_p) de la forma:

$$U(t) = \begin{pmatrix} U_1(t) \\ U_2(t) \\ \vdots \\ U_n(t) \end{pmatrix}$$

de modo que:

$$(3) \quad X_p = \Phi(t).U(t)$$ → sea una solución particular del sistema no homogéneo

$$x' = AX + F(t) \quad (4)$$

Derivando a (3), queda:

$$x_p' = \Phi(t).U'(t) + \Phi'(t).U(t) \qquad (5)$$

Sustituyendo en (4), ya que x_p es solución:

$$\Rightarrow \Phi(t)u'(t) + \Phi'(t)u(t) = A\Phi(t)u(t) + F(t) \qquad (6)$$

Pero por la ecuac. (2) se tiene que $\Phi'(t) = A\Phi(t)$ y sustituyendo esto en (6)

$$\Phi(t).u'(t) + A\Phi(t)u(t) = A\Phi(t)u(t) + F(t)$$

$$\boxed{\Phi(t).u'(t) = F(t)} \qquad (7)$$

Despejando a $u'(t)$, queda:

$$u'(t) = \Phi^{-1}(t).F(t)$$

$$\Rightarrow \boxed{u(t) = \int \Phi^{-1}(t).F(t)\,dt.} \qquad (8)$$

Luego: en (3):

$$\boxed{X_p = \Phi(t).\int \Phi^{-1}(t).F(t)\,dt.} \qquad (9)$$

y la solución general del sistema será:

$$X(t) = X_h(t) + X_p(t)$$

$$\boxed{X(t) = \Phi(t).C + \Phi(t)\int \Phi^{-1}(t).F(t)\,dt} \; //$$

Ejemplo: Resolver el sistema.

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 3t \\ e^{-t} \end{pmatrix}$$

a) Solución de la homogenea: $\dot{X} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} X$

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 7\lambda + 10 \Rightarrow (\lambda+5)(\lambda+2) = 0 \,.\, \left\{ |(A-\lambda I)| = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 \\ 2 & -4-\lambda \end{vmatrix} \right.$$

Vectores propios:

- Para $\lambda = -2$ $\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} -x+y=0 \\ y=x \end{matrix} \Rightarrow V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- Para $\lambda = -5$ $\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 2x+y=0 \\ y=-2x \end{matrix} \Rightarrow V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Luego, la solución de la homogénea viene dada por:

$$X_h(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-5t}$$

Donde: $$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{pmatrix}$$

Buscamos la inversa de $\Phi(t)$:

$$\Phi^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} e^{2t} & \frac{1}{3} e^{2t} \\ \frac{1}{3} e^{5t} & -\frac{1}{3} e^{5t} \end{pmatrix}$$

Luego: $X_p(t) = \Phi(t) \int \Phi^{-1}(t) \cdot F(t)\, dt$

$$X_p = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{pmatrix} \int \begin{pmatrix} \frac{2}{3}e^{2t} & \frac{1}{3}e^{2t} \\ \frac{1}{3}e^{5t} & -\frac{1}{3}e^{5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3t \\ e^{-t} \end{pmatrix} dt$$

$$X_p = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{pmatrix} \int \begin{pmatrix} 2te^{2t} + \frac{1}{3}e^{t} \\ te^{5t} - \frac{1}{3}e^{4t} \end{pmatrix} dt.$$

Integrando c/elemento por partes:

$$X_p = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} te^{2t} - \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{3}e^{t} \\ \frac{1}{5}te^{5t} - \frac{1}{25}e^{5t} - \frac{1}{12}e^{4t} \end{pmatrix}$$

$$X_p(t) = \begin{pmatrix} \frac{6}{5}t - \frac{27}{50} + \frac{1}{4}e^{-t} \\ \frac{3}{5}t - \frac{21}{50} + \frac{1}{2}e^{-t} \end{pmatrix}$$

Finalmente, la solución general:

$$X(t) = X_h(t) + X_p(t)$$

$$X(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-5t} + \begin{pmatrix} 6/5 \\ 3/5 \end{pmatrix} t - \begin{pmatrix} 27/50 \\ 21/50 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \end{pmatrix} e^{-t}$$